

Mike Scherfner  
Torsten Volland

# Mathematik für das erste Semester

Analysis und Lineare  
Algebra für Studierende der  
Ingenieurwissenschaften

*2. Auflage*



Springer Spektrum

---

# Mathematik für das erste Semester

---

Mike Scherfner · Torsten Volland

# Mathematik für das erste Semester

Analysis und Lineare  
Algebra für Studierende der  
Ingenieurwissenschaften

2. Auflage

 Springer Spektrum

Mike Scherfner  
Berlin, Deutschland

Torsten Volland  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-662-61991-9      ISBN 978-3-662-61992-6 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61992-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2012, 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Einige Worte vorab

Das erste Semester zeigt oft deutlich, was über Mathematik bisher nicht gewusst (oder vergessen) wurde. Manchmal wurden schlummernde Begabungen gar nicht gefördert oder gefordert und erst zum Studium wird einem klar, dass die Mathematik nicht auf dem Schulhof blieb, als man dessen Tore für immer hinter sich ließ. Und dann ist es natürlich an Hochschulen oft so, dass noch viel mehr an Mathematik gelernt werden muss, als man auch nur zu träumen wagte. Dieses Buch wird Ihnen im Studium zur Seite stehen.

Wir behandeln die zwei wesentlichen mathematischen Themengebiete, die Ihnen zum Anfang Ihres Studiums begegnen, nämlich die so genannte Analysis (in einer Variablen) und Lineare Algebra. Diese bilden die Grundlage für diverse andere Kurse — nicht nur solche in der Mathematik. Die beiden genannten Gebiete werden zumeist im ersten Semester parallel (oder auch in einem Kurs zur höheren Mathematik verschmolzen) behandelt, das begründet wesentlich den Namen des Buches. Natürlich können die Teile auch getrennt gelesen werden — Sie haben faktisch zwei Bücher in einem. Nur an wenigen Stellen, wie bei den Differenzialgleichungen, gibt es explizit sichtbare Verknüpfungen.

Dieses Buch ist aus zwei zuvor getrennt erschienenen Büchern (Lineare Algebra bzw. Analysis für das erste Semester) entstanden, die hier in deutlich überarbeiteter Form vorliegen. Die ursprünglichen Werke wurden sehr gut angenommen und haben zahlreiche Studierende u. a. zum Bestehen ihrer Prüfungen gebracht; dennoch haben wir uns — auch nach vielen Gesprächen mit Kollegen und Studierenden — um Verbesserungen bemüht.

Am Ende kann es ohnehin nie allen Recht gemacht werden, denn was dem einen zu viel, ist dem anderen zu wenig; was dem einen klar erscheint, erscheint dem anderen viel zu kompliziert. Wir haben einfach versucht, Ihnen mit diesem Buch einen Begleiter zu schreiben, der Verständnis für Probleme zeigt und so gut wie (uns) möglich bei den Schwierigkeiten des ersten Semesters hilft. Denn oft entscheidet sich bereits hier, ob es für Sie im Studium eine Zukunft gibt oder nicht.

Vor dem eigentlichen Start möchten wir Ihnen genauer beschreiben, an was

und wen wir beim Verfassen gedacht haben.

## Für wen ist dieses Buch?

Dieses Buch richtet sich primär an Studierende der Ingenieurwissenschaften im ersten Semester an Universitäten und Fachhochschulen, nach unseren Erfahrungen profitieren aber auch durchaus Studierende der Informatik vom Inhalt. Dabei ist es gleichfalls gut als Einstieg für angehende Lehrer geeignet. Der Übergang zum Bachelor als erstem akademischen Grad hat zu zahlreichen Verwirrungen und Irrungen geführt, was leider auch die Studierenden erdulden müssen. Dadurch bleibt, teils auch in der mathematischen Ausbildung der Ingenieure, weniger Zeit, um alles bis ins Detail exakt zu präsentieren. Dies finden wir bedauerlich, versuchen aber trotzdem das Beste aus der verbleibenden Zeit zu machen.

Die Stoffauswahl richtet sich daher wesentlich nach dem, was der Ingenieur in seinen Mathematikveranstaltungen geboten bekommt. Wie es dort üblich ist, wird viel Wert auf Beispiele, Rechnungen und Verfahren gelegt. Wir haben uns aber bemüht, die Sachverhalte plausibel zu machen, was häufig auch die Idee für den Beweis (oder diesen selbst) einschließt. Es war lange Zeit die Tradition von Lehrbüchern der Mathematik, die Resultate im Textfluss zu präsentieren, sodass sich das eigentliche mathematische Resultat ganz natürlich ergab und man am Gedankengang teilhaben konnte. Diese Idee ist auch hier aufgenommen worden; es soll sich alles im Fluss erlernen (und erleben) lassen, das Buch soll freundlicher Erklärer sein, nicht strenger Oberlehrer.

Der Wert des Buches liegt auch darin begründet, dass das Wort „trivial“ nicht zu finden sein wird (auf das Entdecken im *nachfolgenden* Text setzen wir eine hohe Belohnung aus). Viele Begründungen sind eher intuitiv und weniger formal. Das ist keine Unterlassung, sondern Absicht; Gleichungswüsten in Buchform gibt es bereits genug.

Sie können das Buch gerne auch zur Hand nehmen, wenn Sie nicht im ersten Semester sind. Wir betonen die Eignung für Erstsemester nur, weil wir einen möglichst sanften Zugang bieten.

## Unser Ziel

Es gibt kein Buch, das Sie sich unter das Kopfkissen legen, um dann nach einigen Nächten wissend zu erwachen. Wir möchten aber beweisen, dass Mathematik kein Buch mit sieben Siegeln ist. Sicher ist Mathematik ein anspruchsvolles Geschäft, jedoch keines, was auch nur die geringste Angst berechtigt aufkommen lässt.

In unserem Buch gibt es kein Kapitel, dem nicht eine Motivation vorangestellt wurde. Was einen motiviert oder nicht, das ist allerdings sehr individuell; wir hoffen jedenfalls, das Kommende durch einleitende Worte leichter annehmbar zu machen. Vor dem richtigen Start gibt es auch noch eine Vorbereitung, die Sie von der Schule abholt und Wesentliches von dem liefert, was Sie eventuell verpasst, vergessen oder gar nicht gelernt haben.

In einem Buch für Studierende der Ingenieurwissenschaften erwarten viele, dass es unzählige Anwendungsaufgaben gibt, die sich direkt mit der Praxis befassen. Immerhin geht es um mathematische Grundlagen für die verschiedensten Studiengänge wie Maschinenbau, Biotechnologie, Verfahrenstechnik, Elektrotechnik, etc. Wir wollten jedoch der Tatsache Rechnung tragen, dass es gerade am Anfang des Studiums schwer genug ist, sich zu fokussieren. Und in den meisten Fällen müsste man für interessante Anwendungsaufgaben weit ausholen, was vom mathematischen Kern ablenken würde. Das ist der Grund, warum das Buch am Ende doch ein ziemlich (rein) mathematisches bleibt. Natürlich hätten wir weitere begeisternde Themen nehmen können, in die Numerik einführen und viele Seiten mit ingenieurwissenschaftlicher Praxis füllen. Letztendlich wollen — und müssen — die allermeisten Studierenden zum Schluss der Mathematikurse eine Klausur bestehen und/oder im Semester Hausaufgaben lösen. Und das ist dann nun einmal rein mathematischer Natur. Als Mathematiker und Naturwissenschaftler würden wir gerne jeden Tag „Mehr Begeisterung und Durchhaltevermögen, liebe Studierende, wir haben da noch was!“ schreien. Aber wir müssen auch keine Prüfungen mehr ablegen und begreifen, dass Studienordnungen, Arbeit neben dem Studium zum Überleben und neue Knechtschaften (wie die der Bachelor-Studiengänge) ihren Tribut fordern. Daher halten wir uns hier wesentlich an die Weisheit, dass sich der Magen auch mit zu viel gutem Essen verderben lässt.

## Inhalt und Aufbau

Wir behandeln die Standardthemen der Analysis für eine Variable und der Linearen Algebra. Diese Auswahl orientiert sich an der Tatsache, dass an den meisten Hochschulen gerade diese Themen an den Anfang gestellt werden. Die Reihenfolge der Hauptteile richtet sich danach, dass das Denken bezüglich einer Variable aus der Schule recht vertraut und vergleichsweise unkompliziert ist. Der Übergang zu mehreren Dimensionen erscheint oft sehr abstrakt, muss aber in der Linearen Algebra vollzogen werden. In der Zukunft erwartet Sie dann die Analysis in mehreren Variablen, wo zahlreiche Überlegungen aus den hier behandelten Themen offensichtlich zusammenfließen. Ein erstes Treffen findet bereits beim Thema Differenzialgleichungen statt. Die Behandlung selbiger ist durchaus nicht üblich für ein Buch zum ersten Semester, jedoch lernt man hier bereits viel über das Zusammenspiel der hier behandelten Disziplinen und Sie werden die Tragweite der Konzepte (z. B. das der Linearität) erkennen.

Mathematiker und Physiker werden das Fehlen von Themen (mit Recht) bedauern und auch den Studierenden der Ingenieurwissenschaften können wir nicht alles bieten, was wir wollten (oder aus der Sicht einiger sollten); ein solches Werk bleibt immer ein Spagat (mit mehr als zwei Beinen) zwischen den Notwendigkeiten des Studienplanes, den Wünschen der Studierenden, der Dozenten, der gegebenen Zeit und dem eigenen Anspruch. Und letzterer ist dann meist nur durch eine ständig wachsende Seitenzahl befriedigt, die jede Lücke zu schließen vermag — aber auch jeden Rahmen sprengen würde.

Wir werden in diesem Buch zahlreiche Beispiele betrachten, die das Erlernte greifbar machen. Wir haben uns bemüht, die ersten Beispiele stets einfach zu halten. Was zuvor in der Theorie gemacht wurde, soll gleich verstehbar in den Beispielen umgesetzt werden. Am Ende eines jeden Kapitels stehen Aufgaben, an die sich sofort die *vollständigen Lösungen* anschließen, damit Sie sofort prüfen können, ob Sie Weg und Ergebnis gefunden haben. Die Aufgaben sind dabei manchmal einfach (es müssen ja auch die Grundlagen verstanden werden), teils aber auch anspruchsvoll und benötigen neben Rechenfertigkeiten auch Verständnis.

Am Ende jedes Kapitels finden Sie jeweils noch einige ausgewählte Fragen, die in dieser Art aus einer (mündlichen) Prüfung stammen könnten. Es gibt keine abgeschlossenen Antworten, denn Sie finden alles im Text zuvor. Beherrschen Sie nämlich etwas nicht, so wollen wir Sie beabsichtigt wieder zum Lesen bringen.

Bitte beachten Sie, dass wir die Aufgaben nicht als Zusatz sehen, sondern als bedeutenden Teil des Buches: Es gibt nämlich einem gewaltigen Unterschied zwischen dem Kennen und dem Können.

Wie bereits erwähnt, finden Sie am Anfang eine Vorbereitung. Es handelt sich dabei um eine kleine (aber nützliche) Sammlung von Dingen, die vor dem eigentlichen Start gewusst werden sollten. Nicht alles davon werden wir in diesem Buch verwenden. Aber es hilft Ihnen sicher beim Studienanfang und bei anderen Mathematikveranstaltungen. Viele Bücher enden einfach mit dem Stoff, unseres mit Ideen und Tipps zu den Prüfungen, die vor Ihnen liegen. Ferner bieten wir zur realistischen Vorbereitung mögliche Klausuraufgaben.

Ihnen wird auffallen, dass Definitionen, Beispiele und Sätze farblich kenntlich gemacht wurden. Wir möchten damit erreichen, dass Sie die — sagen wir es bildlich — tragenden Teile des Gerüsts (z. B. zur direkten Vorbereitung auf einen Test oder zur Auffrischung von Gelerntem) schnell finden. Ein mathematisches Gerüst taugt aber nichts ohne die verbindenden (und erklärenden) Elemente, die sich wesentlich im restlichen Text befinden.

Wir hoffen, dass Sie dieses Buch als eine Art persönlichen Begleiter annehmen können; so haben wir uns nach Kräften bemüht, den Stoff freundlich und verbindlich zu vermitteln.

In die nun vorliegende zweite Auflage haben wir zahlreiche Verbesserungen im Detail eingefügt, Aufgaben ergänzt, an Grafiken gefeilt und natürlich auch Fehler korrigiert, die wir und aufmerksame Leser (wir danken Ihnen sehr dafür!) fanden.

## **Dank**

Einige liebe Menschen in unserem Umfeld hatten etwas weniger von uns, weil wir uns Zeit für dieses Buch genommen haben. Danke, dass Ihr das erduldet habt!

Wir bedanken uns bei Herrn Ferus, dessen Skripte zum Thema Inspiration und Hilfe waren. Wir bedanken uns ferner bei den Herren Epp und Schönfeld für ihre Hilfe bei den Graphiken. Den Herren Seiler und Rambau danken wir für ihr Skript zur Linearen Algebra, das in seinen verschiedenen Evolutionsstufen oft motivierender Richtungsgeber war. Ferner geht unser Dank an Stefan Born für charismatische und konstruktive Bemerkungen zur Mathematik und Restwelt, gleichfalls an Patrick Tischendorf, der als Student der Angewandten Informatik das Buch gelesen und hilfreiche Anmerkungen gemacht hat.

Mike Scherfner, Torsten Volland

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einige Worte vorab</b>	<b>v</b>
<b>Analysis</b>	<b>1</b>
<b>1 Worum geht es in der Analysis?</b>	<b>3</b>
<b>2 Ein wenig Vorbereitung</b>	<b>5</b>
2.1 Motivation . . . . .	5
2.2 Ein Vorrat an Buchstaben . . . . .	5
2.3 Vom richtigen Umgang mit der Aussagenlogik . . . . .	7
2.4 Vollständige Induktion . . . . .	10
2.5 Mengen . . . . .	11
2.5.1 Ein kleiner Zoo wichtiger Mengen . . . . .	13
2.5.2 Wie aus bekannten Mengen neue entstehen . . . . .	14
2.6 Aufgaben . . . . .	17
2.7 Lösungen . . . . .	18
<b>3 Reelle und komplexe Zahlen</b>	<b>23</b>
3.1 Motivation . . . . .	23
3.2 Reelle Zahlen . . . . .	23

---

3.2.1	Rechnen mit Ungleichungen . . . . .	24
3.3	Summen und Produkte . . . . .	26
3.3.1	Fakultät und Binomialkoeffizient . . . . .	27
3.4	Komplexe Zahlen . . . . .	29
3.4.1	Polarkoordinaten . . . . .	32
3.5	Aufgaben . . . . .	33
3.6	Lösungen . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Abbildungen und Funktionen</b>	<b>41</b>
4.1	Motivation und Definitionen . . . . .	41
4.2	Einige Eigenschaften von Abbildungen . . . . .	42
4.3	Komposition von Abbildungen . . . . .	47
4.4	Darstellung von Funktionen . . . . .	49
4.5	Aufgaben . . . . .	50
4.6	Lösungen . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Wichtige Funktionen im Überblick</b>	<b>55</b>
5.1	Motivation . . . . .	55
5.2	Polynome und rationale Funktionen . . . . .	55
5.2.1	Polynome . . . . .	55
5.2.2	Rationale Funktionen . . . . .	56
5.3	Sinus, Kosinus und Tangens . . . . .	60
5.3.1	Einige Additionstheoreme . . . . .	63
5.4	Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	63
5.4.1	Potenz- und Logarithmusgesetze . . . . .	65
5.5	Weitere wichtige Funktionen . . . . .	66
5.6	Aufgaben . . . . .	68

---

5.7	Lösungen . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Folgen</b>	<b>75</b>
6.1	Motivation . . . . .	75
6.2	Grundlagen . . . . .	75
6.3	Konvergenz und Divergenz . . . . .	76
6.4	Rechenregeln für Folgen . . . . .	80
6.5	Das Monotoniekriterium . . . . .	81
6.6	Was noch über Folgen bekannt sein sollte . . . . .	82
6.7	Das Häufungspunktprinzip und mehr . . . . .	83
6.8	Aufgaben . . . . .	84
6.9	Lösungen . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Reihen</b>	<b>91</b>
7.1	Motivation . . . . .	91
7.2	Grundlegendes zu Reihen . . . . .	92
7.3	Eigenschaften von Reihen . . . . .	94
7.4	Konvergenzkriterien . . . . .	95
7.4.1	Majorantenkriterium . . . . .	96
7.4.2	Wurzelkriterium . . . . .	97
7.4.3	Quotientenkriterium . . . . .	98
7.4.4	Leibniz-Kriterium . . . . .	99
7.5	Aufgaben . . . . .	100
7.6	Lösungen . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Stetigkeit</b>	<b>105</b>
8.1	Motivation . . . . .	105
8.2	Grundlagen zur Stetigkeit . . . . .	106

---

8.3	Zusammensetzung stetiger Funktionen . . . . .	109
8.4	Der Zwischenwertsatz . . . . .	110
8.5	Supremum, Infimum, Maximum und Minimum . . . . .	112
8.6	Maximum und Minimum für stetige Funktionen . . . . .	113
8.7	Aufgaben . . . . .	114
8.8	Lösungen . . . . .	114
<b>9</b>	<b>Differenziation</b>	<b>119</b>
9.1	Motivation . . . . .	119
9.2	Grundlagen zur Differenziation . . . . .	120
9.3	Rechenregeln für Ableitungen . . . . .	122
9.4	Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus . . . . .	125
9.5	Höhere Ableitungen . . . . .	127
9.6	Ausflug: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion . . . . .	128
9.6.1	Schwingung eines Pendels . . . . .	129
9.6.2	Eigenschaften von Sinus und Kosinus . . . . .	130
9.6.3	Exponentialfunktion . . . . .	131
9.7	Die Regel von l'Hospital . . . . .	132
9.8	Aufgaben . . . . .	134
9.9	Lösungen . . . . .	134
<b>10</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>139</b>
10.1	Motivation . . . . .	139
10.2	Grundlegendes zu Potenzreihen . . . . .	139
10.3	Aufgaben . . . . .	143
10.4	Lösungen . . . . .	144
<b>11</b>	<b>Taylorpolynome, Taylorreihen und Extremwerte</b>	<b>149</b>

---

11.1	Motivation . . . . .	149
11.2	Taylorpolynom und Taylorreihe . . . . .	150
11.2.1	Das Taylorpolynom . . . . .	150
11.2.2	Die Taylorreihe . . . . .	153
11.2.3	Fehlerabschätzung . . . . .	156
11.3	Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen . . . . .	159
11.3.1	Zur Berechnung lokaler Extrema . . . . .	159
11.4	Aufgaben . . . . .	161
11.5	Lösungen . . . . .	162
<b>12</b>	<b>Integration</b>	<b>167</b>
12.1	Motivation . . . . .	167
12.2	Grundlagen zur Integration . . . . .	168
12.3	Der Hauptsatz . . . . .	171
12.4	Wichtige Regeln zur Integration . . . . .	174
12.4.1	Substitutionsregel . . . . .	174
12.4.2	Partielle Integration . . . . .	175
12.4.3	Integration rationaler Funktionen . . . . .	177
12.5	Das uneigentliche Integral . . . . .	179
12.5.1	Integration unbeschränkter Funktionen . . . . .	181
12.5.2	Unbeschränkte Integrationsgrenzen . . . . .	182
12.6	Aufgaben . . . . .	186
12.7	Lösungen . . . . .	187
<b>13</b>	<b>Ausblick: Fourierreihen</b>	<b>195</b>
13.1	Motivation . . . . .	195
13.2	Grundlagen zu Fourierreihen . . . . .	196

---

13.3	Komplexe Darstellung der Fourierreihe . . . . .	200
<b>Lineare Algebra</b>		<b>203</b>
14	Worum geht es in der Linearen Algebra?	205
15	Vektorräume, lineare Unabhängigkeit	209
15.1	Motivation . . . . .	209
15.2	Vektorräume . . . . .	210
15.3	Der Vektorraum der reellen Zahlen . . . . .	212
15.4	Der Vektorraum reellwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ . . . . .	214
15.5	Linearkombinationen . . . . .	215
15.6	Aufgaben . . . . .	220
15.7	Lösungen . . . . .	221
16	Lineare Abbildungen und Matrizen	227
16.1	Motivation . . . . .	227
16.2	Grundlagen zu linearen Abbildungen . . . . .	227
16.3	Kern und Bild . . . . .	229
16.4	Grundlegendes zu Matrizen . . . . .	231
16.5	Rechnen mit Matrizen . . . . .	234
16.5.1	Multiplikation von Matrizen . . . . .	234
16.5.2	Vektorraumstruktur für Matrizen . . . . .	236
16.6	Besondere Matrizen . . . . .	237
16.7	Aufgaben . . . . .	240
16.8	Lösungen . . . . .	242
17	Lineare Gleichungssysteme	247

---

17.1	Motivation und elementare Anwendungen . . . . .	247
17.2	Grundlagen . . . . .	249
17.3	Gauß-Algorithmus . . . . .	250
17.3.1	Abweichungen vom Idealfall . . . . .	252
17.4	Die Struktur der Lösungsmenge . . . . .	253
17.5	Zum Invertieren von Matrizen . . . . .	256
17.6	Aufgaben . . . . .	257
17.7	Lösungen . . . . .	258
<b>18</b>	<b>Determinanten</b>	<b>263</b>
18.1	Motivation . . . . .	263
18.2	Definition und Berechnung . . . . .	264
18.2.1	Berechnung für $(2 \times 2)$ -Matrizen . . . . .	266
18.2.2	Berechnung für $(3 \times 3)$ -Matrizen . . . . .	266
18.2.3	Dreiecksmatrizen . . . . .	267
18.3	Geometrische Interpretation . . . . .	267
18.3.1	Determinante als Volumenform . . . . .	267
18.3.2	Determinante und Orientierung . . . . .	268
18.3.3	Determinante und lineare Unabhängigkeit . . . . .	269
18.4	Rechenregeln für die Determinante . . . . .	271
18.5	Das Kreuzprodukt . . . . .	272
18.6	Aufgaben . . . . .	273
18.7	Lösungen . . . . .	274
<b>19</b>	<b>Norm und Skalarprodukt</b>	<b>279</b>
19.1	Motivation . . . . .	279
19.2	Die Norm . . . . .	279

---

19.3	Das Skalarprodukt . . . . .	282
19.4	Orthonormalisierung nach Schmidt . . . . .	285
19.4.1	Das Verfahren . . . . .	287
19.5	Orthogonale Matrizen . . . . .	289
19.6	Aufgaben . . . . .	290
19.7	Lösungen . . . . .	292
<b>20</b>	<b>Basiswechsel und darstellende Matrizen</b>	<b>297</b>
20.1	Motivation . . . . .	297
20.2	Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren . . . . .	298
20.2.1	Das Geschehen im Diagramm . . . . .	299
20.3	Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen . . . . .	301
20.4	Matrixtransformation bei einem Basiswechsel . . . . .	302
20.5	Aufgaben . . . . .	305
20.6	Lösungen . . . . .	306
<b>21</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>311</b>
21.1	Motivation . . . . .	311
21.2	Grundlagen . . . . .	311
21.3	Berechnung der Eigenwerte . . . . .	314
21.4	Berechnung der Eigenvektoren . . . . .	315
21.5	Vielfachheiten . . . . .	316
21.6	Hauptvektoren . . . . .	318
21.7	Diagonalisierbarkeit . . . . .	320
21.7.1	Diagonalisierung am Beispiel . . . . .	323
21.8	Aufgaben . . . . .	324
21.9	Lösungen . . . . .	325

---

<b>22 Differenzialgleichungen</b>	<b>331</b>
22.1 Motivation . . . . .	331
22.2 Grundlagen . . . . .	332
22.3 Umschreiben in ein System am Beispiel . . . . .	334
22.4 Einige Fragestellungen und erste Antworten . . . . .	335
22.5 Lösen durch Integration . . . . .	337
22.6 Standardlösungsansatz I . . . . .	337
22.7 Standardlösungsansatz II . . . . .	339
22.8 Finden einer partikulären Lösung . . . . .	341
22.9 Anfangswertprobleme . . . . .	342
22.10 Wronski-Test . . . . .	344
22.11 Beispiel für nicht-lineare Differenzialgleichungen . . . . .	346
22.12 Aufgaben . . . . .	347
22.13 Lösungen . . . . .	348
<b>Klausuraufgaben</b>	<b>353</b>
<b>23 Analysis</b>	<b>355</b>
23.1 Aufgaben . . . . .	355
23.2 Lösungen . . . . .	358
<b>24 Lineare Algebra</b>	<b>367</b>
24.1 Aufgaben . . . . .	367
24.2 Lösungen . . . . .	370

Vom Umgang mit Prüfungen	377
Literatur und Schlussbemerkungen	383
Index	385

# Analysis



# 1 Worum geht es in der Analysis?

Das Wort *Analysis* kommt aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie Auflösung. Tatsächlich hilft uns dies nicht wirklich beim Verständnis der aktuellen Bedeutung dieses wichtigen Teilgebietes der Mathematik. Historisch gesehen stammen die wesentlichen Grundlagen von Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Insbesondere Newton benötigte die von ihm entwickelten Methoden und Ideen, um eine mathematische Beschreibung wichtiger Naturvorgänge zu finden.

Die wesentlichen Grundbegriffe der Analysis sind: Grenzwert, Funktion, Differenziation und Integration, zu deren Klärung und Untersuchung wir z. B. auch etwas über Zahlen, Folgen und Reihen lernen müssen. Damit ist sicher nicht die ganze (und insbesondere moderne) Analysis erfasst, die ihre Wirkung in fast allen Teilen der Mathematik entfaltet. Dennoch führen diese Grundlagen, besonders im Bereich der Natur- und Ingenieurwissenschaften, sehr weit; auch die Wirtschaft verdankt ihr tiefe Einblicke, z. B. in die Dynamik der Märkte.

Die bekannten Wurzeln der Analysis reichen bis in die Zeit um 400 v. Chr. zurück und werden z. B. durch den berühmten Denker Archimedes genährt. Aber auch einer der Väter der Anwendung mathematischer Methoden bei der Beschreibung der Natur, Galileo Galilei (1564 – 1642), hatte wesentlichen Anteil. So erkannte er u. a. den Zusammenhang zwischen dem Ableitungsbegriff und der Geschwindigkeit.

Es ist wichtig zu verstehen, dass heute nahezu kein Teilgebiet der Mathematik — gerade soweit es die Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften betrifft — vollkommen von den anderen isoliert betrachtet werden kann. So werden wir in der Analysis an verschiedenen Stellen auch Gleichungen mit den Methoden der elementaren Algebra untersuchen und geometrische Überlegungen anstellen. Jedoch lassen sich für die Teilgebiete der Mathematik stets Charakteristika finden, die uns Aufschluss über ihr Wesen geben. Wir wollen daher die obige Aufzählung der Kerninhalte der Analysis etwas genauer beleuchten.

Der Grenzwertbegriff kann als der zentrale in der Analysis angesehen werden. Er ermöglicht es uns davon zu reden, dass sich (noch genauer zu bestimmende) Dinge beliebig an etwas — nämlich den Grenzwert — annähern. Damit können wir dann Sachverhalte *aus der Nähe betrachten*, was für genaue Untersuchungen schon sprichwörtlich eine gute Idee ist.

Dies kommt auch bei der Untersuchung der Stetigkeit zum Tragen, welche uns Aussagen über Sprünge bei einer betrachteten Funktion liefert. Der praktische Nutzen hier liegt z. B. in der Untersuchung einer Funktion, die den Temperaturverlauf in einem Raum zeigt. Ohne (eigentlich undenkbare) Phänomene scheint es vernünftig davon auszugehen, dass die Temperatur nicht innerhalb eines kurzen Augenblicks um einige hundert Grad steigt, also einen Sprung macht. Wir können also erwarten, dass die beschreibende Funktion — im Wortsinn — einen stetigen Verlauf hat.

Beim Differenzieren geht es in der Hauptsache um die Berechnung der Ableitung einer Funktion. Über die Ableitung, die mit der Steigung assoziiert ist, lassen sich dann häufig wieder interessante Rückschlüsse auf die Funktion selbst ziehen. Dies klingt eventuell befremdlich, denn wozu sollten wir eine bekannte Funktion ableiten, um dann wiederum etwas über die Funktion zu erfahren? Zum einen werden wir sehen, dass die Ableitung uns schnell nützliche Informationen liefert, die sonst mühsam erarbeitet werden müssten, aber noch bemerkenswerter ist: Die Natur gibt Informationen über sich selbst, also über die Sie beschreibenden Funktionen, oft nur über die Ableitungen dieser Funktionen preis! Und daraus haben wir dann die eigentliche Funktion zu (re)konstruieren, also das uns interessierende Verhalten der Natur, oder auch eines technischen Vorganges.

Schließlich kommen wir dann zur Integralrechnung, durch die wir u. a. Flächen bestimmen können. Auch dies hat großen Wert für die Praxis. Zeichnen wir nämlich die Geschwindigkeit eines Fahrrades als Funktionsgraph über der Zeitachse auf, so entspricht die Fläche unter diesem Graphen — zwischen zwei Zeitpunkten auf der Zeitachse — gerade der Strecke, welche wir auf dem Fahrrad von einem Zeitpunkt zum anderen zurückgelegt haben.

Endlich gelangen wir dann zum so genannten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Dieser manifestiert, dass Integrale über so genannte Stammfunktionen berechnet werden können. Was an dieser Stelle wie Klänge aus der Ferne erscheint, verknüpft die Differenzial- mit der Integralrechnung auf wunderbare Weise.

Es gibt noch mehr Interessantes aus der und über die Analysis zu berichten, dazu aber mehr in den einzelnen Kapiteln.



# 2 Ein wenig Vorbereitung

## 2.1 Motivation

Die Mathematik mit ihrer Symbolik, die am Anfang recht abstrakt erscheinen mag, kann als Sprache aufgefasst werden, mit deren Hilfe Aussagen, Definitionen und andere wichtige und schöne Dinge formuliert werden können. Allerdings müssen wir zuerst die grundlegenden Sprachkenntnisse (Grammatik, Vokabeln etc.) erwerben, bevor wir uns unterhalten können. Am Anfang ist es auch schon gut, einer Unterhaltung folgen zu können, wie sie dieses Lehrbuch bietet.

Diese Vorbereitung liefert eine kurze Zusammenfassung wichtiger Begriffe und Sachverhalte, deren Kenntnis in den nachfolgenden Kapiteln vorausgesetzt wird.

Wir ahnen, dass auf dem Weg von der Schule zur Uni, der tatsächlich bei einigen lang war, einige Dinge verloren gegangen sind. Wir werden diese gemeinsam mit Ihnen wiederfinden, Bekanntes neu betrachten und auch Neues entdecken. Teils werden wir intuitiv beginnen, dann aber stets zum Exakten kommen.

## 2.2 Ein Vorrat an Buchstaben

Der Satz von Pythagoras wird oft auf die bloße Formel  $a^2 + b^2 = c^2$  reduziert. Die Bedeutung von  $a$ ,  $b$  und  $c$  als die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks wird dabei unterschlagen. Der Wiedererkennungseffekt beruht zu einem großen Teil auf der steten Verwendung der gleichen Symbole für die Seitenlängen. So würden nur Wenige  $f^2 + x^2 = n^2$  als den Satz von Pythagoras identifizieren. Andere mathematische Formulierungen bestehen aus sehr viel mehr Größen, seien es Variablen, Konstanten, Mengen, Elemente verschiedener Mengen oder Funktionen. Um diese besser auseinander halten und somit eine Formel schneller verstehen zu können, haben sich gewisse — nicht immer, aber oft eingehaltene — Konventionen ergeben. So werden beispielsweise die Buchstaben  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  gerne für natürliche Zahlen verwendet,  $a, b, c, d$  für reelle Zahlen und  $f$ ,

$g, h$  für Funktionen. Natürlich ist der Vorrat an lateinischen Zeichen dadurch schnell erschöpft und es wird oft auf das griechische Alphabet zurückgegriffen. Dies ist Grund genug, um die griechischen Buchstaben einmal vorzustellen. In folgender Tabelle sind die griechischen Klein- und Großbuchstaben aufgeführt. Bei einigen Buchstaben wie dem rho sind sogar zwei Kleinbuchstaben notiert, die in etwa einer Druck- und Schreibschriftvariante entsprechen.

alpha	$\alpha$	$A$	iota	$\iota$	$I$	rho	$\rho, \varrho$	$P$
beta	$\beta$	$B$	kappa	$\kappa$	$K$	sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	lambda	$\lambda$	$\Lambda$	tau	$\tau$	$T$
delta	$\delta$	$\Delta$	my	$\mu$	$M$	ypsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	$E$	ny	$\nu$	$N$	phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$
zeta	$\zeta$	$Z$	xi	$\xi$	$\Xi$	chi	$\chi$	$X$
eta	$\eta$	$H$	omikron	$o$	$O$	psi	$\psi$	$\Psi$
theta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	pi	$\pi$	$\Pi$	omega	$\omega$	$\Omega$

Wir werden in diesem Buch nicht alle griechischen Buchstaben verwenden und verlangen auch nicht, sie und ihre Verwendung in mathematischen Formeln auswendig zu lernen. Letzteres ergibt sich vielmehr beim Verstehen und Anwenden der Mathematik von selbst. Außerdem ist es angenehm, Formeln vorlesen zu können, wozu natürlich die Namen der Symbole benötigt werden.

Hin und wieder werden auch viele, sehr ähnliche mathematische Objekte auf einmal verwendet. In solchen Fällen wird die Ähnlichkeit durch die Verwendung gleicher Buchstaben, die allerdings in verschiedenen Ausführungen vorkommen, ausgedrückt. So könnten beispielsweise  $a, \tilde{a}, \hat{a}$  drei reelle Zahlen bezeichnen. Ist bei den Objekten eine Reihenfolge wichtig, werden Indizes verwendet:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl sein soll.

Letztere Schreibweise wird uns in diesem Buch sehr häufig begegnen und die Anzahl der Objekte bzw. den letzten Index  $n$  werden wir nicht weiter konkretisieren, damit die Formeln und Aussagen allgemein bleiben. Um spätere Missverständnisse zu vermeiden, sei allerdings erwähnt, was mit obiger Aufzählung bei z. B.  $n = 2$  gemeint ist: nämlich  $a_1, a_2$  und nicht etwa  $a_1, a_2, a_3, a_2$ . Bei  $n = 1$  besteht die Aufzählung lediglich aus dem ersten Element  $a_1$  und bei  $n = 0$  aus gar keinem — auch das kommt in Spezialfällen vor.

## 2.3 Vom richtigen Umgang mit der Aussagenlogik

Im Alltag ist es üblich und wichtig, Aussagen miteinander zu verknüpfen. Teils sind die Folgerungen aus bestimmten Aussagen allerdings fragwürdig (Werbung und Politik gelten als gute Beispielgeber). In der Mathematik darf uns das nicht passieren! Aussagen müssen ordentlich und eindeutig verknüpft werden und wenn eine Aussage aus einer anderen folgt oder zwei Aussagen gar äquivalent sind, muss dies auch wirklich bewiesen werden. Als strenges Hilfsmittel zur Formulierung soll daher alles auf den Regeln der Aussagenlogik basieren. In dieser werden Aussagen verknüpft und im Folgenden halten wir uns an die hier eingeführte Strenge.

Eine *Aussage* ist dabei ein Satz in umgangssprachlicher oder mathematischer Formulierung, der einen Sachverhalt beschreibt, dem als *Wahrheitswert* stets „1“ (wahr) oder „0“ (falsch) zugeordnet werden kann. Eine Aussage kann dabei stets nur einen Wahrheitswert annehmen, der allerdings außerhalb der Mathematik vom Betrachter abhängen kann.

### Mathematik macht Spaß!

ist ein Beispiel. (Wir bitten den Leser aber an dieser Stelle, die „1“ zu zücken. Danke!)

Wenn wir in Zukunft ein „und“ zwischen zwei Aussagen verwenden — als Zeichen  $\wedge$  — so ist unsere Grundlage die folgende Wahrheitstabelle, in der  $A_1$  und  $A_2$  Aussagen sind. Die letzte Spalte gibt dann den Wahrheitswert der verknüpften Aussage „ $A_1$  und  $A_2$ “ an:

$A_1$	$A_2$	$A_1$ und $A_2$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

„Oder“ — als Symbol  $\vee$  — hat folgende Werte:

$A_1$	$A_2$	$A_1$ oder $A_2$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Die „*Implikation*“ ( $\rightarrow$ ) genügt der Tabelle:

$A_1$	$A_2$	$A_1$ impliziert $A_2$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

Für die Implikation verwenden wir auch das Synonym „es folgt“ und das Symbol  $\Rightarrow$ , sofern nicht reine mathematische Logik betrieben wird.

Ferner gibt es auch die „*Äquivalenz*“ ( $\leftrightarrow$  bzw.  $\Leftrightarrow$ ):

$A_1$	$A_2$	$A_1$ äquivalent $A_2$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

Als letztes Symbol führen wir die „*Negation*“ ( $\neg$ ) ein, die den Wahrheitswert einer Aussage einfach in das Gegenteil ändert:

$A$	nicht $A$
wahr	falsch
falsch	wahr

Wir möchten noch etwas zur Implikation bemerken, was insbesondere bei der Beweisführung nützlich ist, und machen uns zuerst klar, dass folgende Aussage gilt, wie wir anhand der Wahrheitstabellen leicht überprüfen können (bitte machen Sie das auch!):

$$(A_1 \rightarrow A_2) \quad \leftrightarrow \quad (\neg A_2 \rightarrow \neg A_1) .$$

Warum hilft dies beim Führen von Beweisen? Weil wir nun wissen, wie ein Widerspruchsbeweis gemacht wird. Denn anstatt „Aus  $A_1$  folgt  $A_2$ “ lässt sich auch „Aus  $\neg A_2$  folgt  $\neg A_1$ “ zeigen, was wegen der Äquivalenz das Gleiche ist, aber manchmal einfacher, sofern es den Beweis betrifft. Wir werden davon später Gebrauch machen.

Ferner wird die Implikation oft (aus Versehen, aus Faulheit oder mutwillig) mit der Äquivalenz verwechselt. So haben Sie in der Schule eventuell Folgendes gesehen, was wir hier in zwei Varianten präsentieren:

$$\text{i) } x = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

$$\text{ii) } x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1.$$

Was ist richtig? Natürlich nur i), denn  $x^2 = 1$  wird auch von  $x = -1$  erfüllt. Wie Sie sehen, haben wir hier „ $\Rightarrow$ “ und „ $\Leftrightarrow$ “ verwendet, was für den mathematischen Hausgebrauch üblich ist. (Der Logiker bevorzugt „ $\rightarrow$ “ und „ $\leftrightarrow$ “.)

Das Verhältnis zwischen Implikation und Äquivalenz wird vielmehr durch folgende Aussage beschrieben, die wir im Aufgabenteil beweisen werden:

$$((A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)) \quad \leftrightarrow \quad (A_1 \leftrightarrow A_2) .$$

Zum Abschluss wollen wir noch ein kleines logisches Rätsel lösen, das wir wesentlich von R. Smullyan übernommen haben (Logik-Ritter und andere Schurken; ein Buch, das viel über Logik auf unterhaltsame Weise lehrt):

Wir stellen uns eine Welt vor, in der ein Mensch entweder stets lügt oder stets die Wahrheit sagt. In einer kleinen Vorstadt ist ein Mord passiert und Kommissar G. Scheit sucht nun das Haus des Hauptverdächtigen Herrn M. auf. Dieser öffnet und der Kommissar muss nun erst einmal feststellen, ob Herr M. ein Lügner ist oder nicht. Eine direkte Frage „Sind Sie ein Lügner?“ würde in jedem Fall die Antwort „Nein“ ergeben und nichts nützen. Doch Kommissar Scheit ist erfahren und fragt geradeheraus: „Sind Sie und Ihre Frau Lügner?“ Herr M. stutzt einen Moment und antwortet: „Wir sind beide Lügner.“ Ein Lächeln huscht über das Gesicht des Kommissars, denn nun weiß er Bescheid und wird Herrn M. in Kürze verhaften.

Doch schauen wir uns anhand einer Tabelle genauer an, was aus der Antwort von Herrn M. gefolgert werden kann, wenn kein Kommissar in der Nähe ist, dafür aber ein Buch über Aussagenlogik.  $A_1$  steht für die Aussage: „Herr M. sagt die Wahrheit.“ und  $A_2$  für: „Frau M. sagt die Wahrheit.“ Herr M.s Antwort ist die Aussage  $(\neg A_1 \wedge \neg A_2)$ . Wenn Herr M. immer die Wahrheit sagt, muss auch diese Aussage wahr sein, wenn er stets lügt, ist auch diese Aussage falsch. Somit sind die Aussagen  $A_1$  und  $(\neg A_1 \wedge \neg A_2)$  äquivalent, d. h.  $(A_1 \leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2))$  ist eine wahre Aussage und dies bekommen wir nur in der dritten Zeile der folgenden Tabelle heraus, nach der Herr M. ein Lügner und seine Frau keine Lügnerin ist:

$A_1$	$A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$\neg A_1 \wedge \neg A_2$	$A_1 \leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	falsch

## 2.4 Vollständige Induktion

Wollen wir die Gültigkeit einer Aussage — beispielsweise einer Formel — für alle natürlichen Zahlen beweisen, so steht uns hierfür das Verfahren der *vollständigen Induktion* zur Verfügung. Dabei betrachten wir die Aussage kurzzeitig für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  separat und nennen sie  $A(n)$ . Bei der Aussage

$$n \leq n^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

wäre beispielsweise  $A(0)$ :  $0 \leq 0^2$  und  $A(42)$ :  $42 \leq 42^2$ .

Das Prinzip der vollständigen Induktion können wir uns durch eine (unendliche) Aneinanderreihung von Dominosteinen veranschaulichen, die wir zu Fall bringen wollen. Jeder Dominostein steht für ein  $A(n)$ . Um alle Steine umzustößeln, müssen wir den ersten Stein umschubsen und die Steine müssen nah genug beieinander stehen, sodass jeder Stein durch seinen Vorgänger mit umgerissen wird.

Übertragen auf den Formalismus mit den Aussagen heißt dies:

- *Induktionsanfang*: Wir müssen zeigen, dass  $A(0)$  gilt (der 1. Stein fällt ...)
- *Induktionsschritt*: außerdem, dass für jedes  $n$  die Implikation ( $A(n) \rightarrow A(n+1)$ ) gilt (... und reißt alle weiteren mit sich um).

Im obigen Beispiel hätten wir also mit  $0 \leq 0^2$  den Induktionsanfang gezeigt. Der Induktionsschritt ist schon etwas schwieriger: Wir setzen die Gültigkeit von  $A(n)$ , also von  $n \leq n^2$  für ein nicht näher konkretisiertes  $n$  voraus — das nennen wir *Induktionsvoraussetzung*, in der folgenden Rechnung mit „IV“ abgekürzt — und müssen daraus die Gültigkeit von  $A(n+1)$ , also von  $n+1 \leq (n+1)^2$  folgern:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{\geq} n + 2n + 1 \\ &= (n+1) + 2n \\ &\geq n+1 \end{aligned}$$

Beim mit IV gekennzeichneten Rechenschritt haben wir die Induktionsvoraussetzung eingesetzt.

Der Induktionsanfang muss nicht unbedingt bei  $n = 0$  liegen. Gilt eine Aussage nur für alle  $n \geq n_0$  mit einem festen  $n_0 > 0$ , so können wir auch mit  $A(n_0)$  beginnen und den Induktionsschritt  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  für alle  $n \geq n_0$  zeigen. Obiges Beispiel können wir auch etwas umformulieren zu

$$n < n^2 \text{ für alle } n \geq 2,$$

womit der Induktionsanfang dann bei  $n_0 = 2$  läge.

Nach dem, was wir im Kapitel über Aussagenlogik gelernt haben, können wir die vollständige Induktion folgendermaßen zusammenfassen:

$$(A(n_0) \wedge (A(n) \rightarrow A(n+1)) \text{ für alle } n \geq n_0) \rightarrow (A(n) \text{ für alle } n \geq n_0)$$

### Beispiel

Wir wollen die Formel  $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  beweisen.

Der Induktionsanfang liegt offensichtlich bei  $n_0 = 0$ . Die linke Seite von  $A(0)$  besteht nur aus einem Summanden, nämlich 0. Die rechte Seite ergibt ebenfalls

$$\frac{0 \cdot (0 + 1)}{2} = 0.$$

Führen wir nun den Induktionsschritt durch. Nehmen wir also an,  $A(n)$ , also  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  sei wahr für eine beliebige, aber feste Zahl  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt für die Summe bis  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Das ist aber gerade  $A(n+1)$ . ◆

## 2.5 Mengen

Die von Georg Cantor (1845 – 1918) begründete Mengenlehre bildet einen der Grundpfeiler der modernen Mathematik: Ohne sie geht gar nichts. So wird der Begriff „Menge“ bereits in der Schule behandelt und z. B. mit natürlichen oder reellen Zahlen gearbeitet. Diese sind dann Elemente der Menge der natürlichen bzw. reellen Zahlen.

### Definition (Menge, Element einer Menge)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen

Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge. ◀

Ist ein Objekt  $x$  ein Element einer Menge  $M$ , so wird dafür

$$x \in M$$

geschrieben. Ist  $x$  kein Element von  $M$ , dann

$$x \notin M .$$

Vielleicht kommt Ihnen jetzt die Frage in den Sinn, warum wir hier auf kryptische Art von Objekten reden und nicht einfach von Zahlen? Der Grund ist, dass es wirklich beliebig ist, welche Objekte wir zu Mengen zusammenfassen. Denn es ist durchaus auch möglich, die Menge der Funktionen mit einer Nullstelle zu untersuchen und diese besteht nun gar nicht aus Zahlen. . .

Mengen lassen sich durch explizite Aufzählung definieren, z. B.

$$M := \{1, \pi, 173\} ,$$

aber auch durch das Angeben einer bestimmten Eigenschaft  $E$  für die Elemente der Menge:

$$M := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\} ,$$

was sich folgendermaßen liest: „ $M$  ist die Menge aller  $x$ , für die gilt:  $x$  hat die Eigenschaft  $E$ .“ Ein konkreteres Beispiel für eine Menge ist

$$G := \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl zwischen } -1 \text{ und } 4\} .$$

Das Symbol „:=“ deutet immer an, dass es sich um eine Definition handelt. Die Eigenschaft „ $x$  ist eine ganze Zahl zwischen  $-1$  und  $4$ “ liefert die folgenden Elemente in expliziter Aufzählung:

$$G = \{0, 1, 2, 3\} ;$$

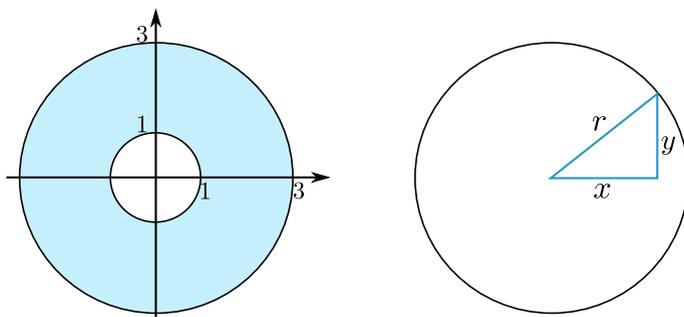
hier ist das reine Gleichheitszeichen gerechtfertigt, denn definiert ist die Menge bereits. Weiterhin ist für die Elemente einer Menge a priori keine Reihenfolge ausgezeichnet. So ist beispielsweise

$$\{2, 10, 16\} = \{10, 16, 2\} .$$

Was bisher gemacht wurde, ist nun wirklich nicht schwer. Dennoch war es gut, einen Blick darauf zu werfen, wie Mengen definiert werden, denn natürlich geht es auch komplizierter. Wir werden davon Gebrauch machen (müssen). So beschreibt beispielsweise die Menge

$$R := \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; x, y \text{ reell}\}$$

den folgenden Kreisring in der Ebene (links):



Wie ist das zu verstehen? Nun,  $(x, y)$  bedeutet, dass es sich um ein Zahlenpaar handelt (also jeweils einen Punkt im Koordinatensystem in der Ebene), das wir dann noch genauer beschreiben. Der Ausdruck  $x^2 + y^2$  ist gleich einer Zahl  $r^2$ , wie wir durch den Satz von Pythagoras wissen (vgl. rechte Skizze). Wenn nun ein  $r$  fest gewählt wurde, z. B.  $r = 2$ , so liefert die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2 = 4$  alle Punkte, die zum Kreis mit dem Radius 2 um den Ursprung gehören. Da nun  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  gelten soll, werden also alle Kreise mit Radien von 1 bis 3 durchlaufen. Das ergibt den skizzierten Kreisring. Dabei ist natürlich bedacht worden, dass  $x$  und  $y$  reelle Zahlen sind, denn nur so können sie „kontinuierlich“ alle Werte annehmen.

### 2.5.1 Ein kleiner Zoo wichtiger Mengen

Welches sind nun die Mengen, die einem bei den Mathematikveranstaltungen ständig begegnen? Hier die wichtigsten:

- $\emptyset$ : *Leere Menge*. Sie enthält keine Elemente, also  $\emptyset = \{\}$ . Auch wenn dies für einige absurd erscheinen mag, gerade in ihrer Leere ist sie besonders wertvoll und wird zur Beschreibung verschiedenster Sachverhalte benötigt.
- $\mathbb{N}$ : *Menge der natürlichen Zahlen*, also  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\mathbb{Z}$ : *Menge der ganzen Zahlen*, also  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\mathbb{Q}$ : *Menge der rationalen Zahlen*, also derjenigen, die sich als Bruch  $\frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  darstellen lassen.
- $\mathbb{R}$ : *Menge der reellen Zahlen*, also der rationalen und irrationalen. Die irrationalen Zahlen sind die Zahlen, die sich nicht als Bruch (wie bei den rationalen Zahlen angegeben) darstellen lassen. Beispiele dafür sind  $\sqrt{2}$  oder  $\pi$ .
- $\mathbb{C}$ : *Menge der komplexen Zahlen*, also aller Zahlen der Form  $x + iy$ . Dabei ist  $i$  die imaginäre Einheit (mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$ ) und  $x$  und  $y$  sind reelle Zahlen.

Zusammenhängende Teilabschnitte der reellen Zahlen sind Intervalle, auf denen sich ein Großteil der in diesem Buch vorgestellten Analysis abspielt. Von ihnen gibt es folgende Typen, wobei hier stets  $a \leq b$  gilt für  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- *offene Intervalle*:  $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ,
- *abgeschlossene Intervalle*:  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ,
- *halboffene Intervalle*:  $]a, b]$  oder  $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ .

Zeigt die eckige Klammer zum Element, also „ $[a$ “ oder „ $b]$ “, so ist dieses in der Menge enthalten, im anderen Fall gerade nicht. Gleichgültig, um welches der drei Intervallarten es sich handelt, nennen wir die Punkte  $a$  und  $b$  *Randpunkte* des Intervalls. Wenn der Randpunkt nicht zum Intervall gehört, kann dieser sogar  $\pm\infty$  (plus oder minus unendlich) sein und wir haben es mit so genannten *uneigentlichen Intervallen* zu tun:

$$\begin{aligned} ]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ ]-\infty, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ [a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty, +\infty[ &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anstelle der vom Element weg zeigenden eckigen Klammern werden in der Literatur teils auch zum Element zeigende runde Klammern verwendet. So ist  $(a, b) = ]a, b[$  und  $[a, b) = [a, b[$ .

Es gibt noch viele weitere interessante Mengen, die allerdings an dieser Stelle zu weit führen würden. Zu den natürlichen Zahlen wollen wir noch bemerken, dass es durchaus Mathematiker gibt, welche die 0 nicht für eine natürliche Zahl halten. Wir sehen das anders und haben dafür auch die Deutsche Industrienorm, DIN 5473, auf unserer Seite!

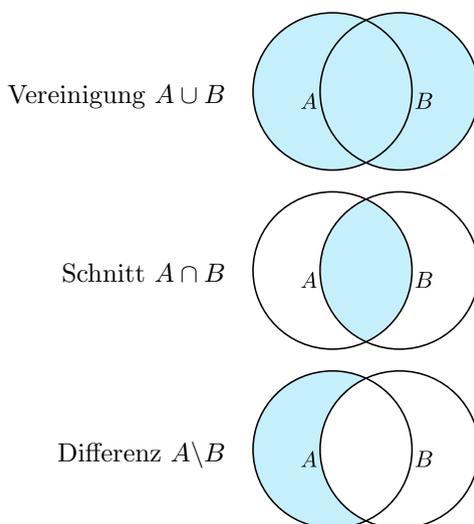
## 2.5.2 Wie aus bekannten Mengen neue entstehen

Aus bekannten Mengen können durch *Vereinigung* ( $\cup$ ), *Schnitt* ( $\cap$ ) und *Differenz* ( $\setminus$ ) neue gebildet werden:

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}, \\ A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}, \\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Das hier verwendete „oder“ (siehe auch den Abschnitt über Aussagenlogik) schließt nicht aus, dass  $x$  ein Element von beiden Mengen  $A$  und  $B$  ist!

Zur Veranschaulichung dieser Mengenoperationen können wir die so genannten *Venn-Diagramme* heranziehen (siehe Abbildung). Diese Diagramme stellen jedoch kein logisches Argument dar und dürfen deshalb nicht verwendet werden, um Aussagen über Mengen oder Mengenverknüpfungen zu beweisen!



Mengen können auch in anderen Mengen enthalten sein:

Es ist  $A \subseteq B$  (gelesen: „ $A$  ist Teilmenge von  $B$ “), wenn aus  $x \in A$  folgt, dass  $x \in B$  ist. Aus dieser Definition können wir sehen, dass jede Menge Teilmenge von sich selbst ist:  $A \subseteq A$ . Wir sprechen von einer *echten* Teilmenge  $A$  einer Menge  $B$ , wenn  $A \subseteq B$  ist und  $A \neq B$  und schreiben dann  $A \subset B$ . Beispielsweise sind alle Intervalle bis auf  $] - \infty, +\infty[$  echte Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .

### Beispiel

Seien  $M_1 := \{2,10,16\}$ ,  $M_2 := \{2,10,15,16,21\}$  und  $M_3 := \{0,2,4,6, \dots\}$ . Dann gilt beispielsweise

$$M_1 \subset M_2, \quad M_1 \subset M_3 \quad \text{und} \quad M_2 \not\subset M_3.$$

Weiterhin ist

$$M_1 \cap M_2 = M_1, \quad M_2 \setminus M_3 = \{15,21\} \quad \text{und} \quad M_1 \cup M_2 = M_2.$$



Die Notation ist in der Literatur nicht einheitlich. Manchmal steht  $\subset$  einfach für Teilmenge (ohne „echt“ sein zu müssen), und das Symbol  $\subsetneq$  bezeichnet echte Teilmengen.

Vereinigen und schneiden lassen sich natürlich auch mehr als zwei Mengen. Wie  $A \cup B \cup C$  gebildet wird, oder gar  $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)$ , sollte allerdings nach den obigen Ausführungen klar sein. Im folgenden Satz formulieren wir einige Rechenregeln für Mengenoperationen:

### Satz

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Dann gilt:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array} \right\} \text{Kommutativität} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array} \right\} \text{Assoziativität} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right\} \text{Distributivität} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array} \right\} \text{Adjunktivität} \\
 \left. \begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array} \right\} \text{Idempotenz} \\
 \left. \begin{array}{l} C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \end{array} \right\} \text{Regeln von } de\ Morgan
 \end{array}$$

■

Wir empfehlen Ihnen, diese Rechenregeln an einigen Beispielen nachzuvollziehen. Beispielhaft werden wir die erste Formel der Adjunktivität genauer betrachten: Die Gleichheit zweier Mengen beweisen wir, indem wir zeigen, dass jedes Element der ersten Menge auch in der zweiten enthalten ist und jedes Element der zweiten in der ersten. Dann gibt es nämlich kein Element, worin sich die beiden Mengen unterscheiden und folglich sind sie gleich. Für ein beliebiges  $x \in A \cap (A \cup B)$  gilt

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (A \cup B) &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B) \\
 &\Rightarrow x \in A,
 \end{aligned}$$

womit die erste Richtung bewiesen wäre. Für ein beliebiges  $x \in A$  gilt anderer-

seits

$$\begin{aligned}
 x \in A &\Rightarrow (x \in A) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B)) \\
 &\Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in A)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \\
 &\Rightarrow (x \in A) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \\
 &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B) \\
 &\Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)
 \end{aligned}$$

Wir führen eine abkürzende (und praktische) Schreibweise für Vereinigungen bzw. Schnitte beliebig vieler Mengen ein:

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i=1}^n A_i &:= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n ; \\
 \bigcap_{i=1}^n A_i &:= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n .
 \end{aligned}$$

Es kommt auch vor, dass wir aus einem Vorrat von bereits durchnummerierten Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  einige auswählen und diese dann vereinen bzw. schneiden wollen, beispielsweise alle  $A_k$ , deren Index  $k$  eine Primzahl ist. Um dies zu notieren, führen wir die so genannte Indexmenge  $I$  ein, welche alle relevanten Indizes enthält — in unserem Beispiel  $I := \{k \mid k \text{ ist eine Primzahl}\}$  — und schreiben

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i \in I} A_i .$$

Wenn Sie misstrauisch sind, ist Ihnen aufgefallen, dass wir im Beispiel mit den Primzahlen sogar unendlich viele Mengen vereint bzw. geschnitten haben, denn es gibt auch unendliche viele Primzahlen. Dies ist nicht nur für Vereinigungen und Schnitte von Mengen möglich, sondern auch für Summen und Produkte von Zahlen. Im Kapitel über Folgen werden wir uns eingehender mit der Unendlichkeit befassen und im Kapitel über Reihen werden wir unseren Blick vor allem auf die unendliche Summe richten.

## 2.6 Aufgaben

1. Beweisen Sie folgende Aussage mithilfe der Wahrheitstabellen:

$$((A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)) \quad \leftrightarrow \quad (A_1 \leftrightarrow A_2) .$$

2. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$a \frac{a^2 \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}}$$

für  $a > 0$ .

3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Summenformel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

4. Schreiben Sie für

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

die Mengen  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  und  $B \setminus A$  in möglichst einfacher Form auf.

5. Welche Mengen werden durch folgende Notationen beschrieben?

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k, k+1[ , \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[0, \frac{1}{k}\right] , \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid xk \in \mathbb{N}\}$$

Bei der zweiten und dritten Aufgabe handelt es sich bei der Angabe, welche Indizes berücksichtigt werden, um alternative Notationen: Die Schreibweisen  $\bigcup_{k=1}^{\infty}$  und  $\bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  bedeuten dasselbe, gleichfalls  $\bigcap_{k=1}^{\infty}$  und  $\bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ .

## 2.7 Lösungen

1. Wir stellen dazu eine Wahrheitstabelle auf, wobei wir Terme der Aussage abkürzen:

$$L_1 := (A_1 \rightarrow A_2)$$

$$L_2 := (A_2 \rightarrow A_1)$$

$$R := (A_1 \leftrightarrow A_2)$$

$A_1$	$A_2$	$L_1$	$L_2$	$L_1 \wedge L_2$	$R$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr

Die letzten beiden Spalten zeigen, dass beide Seite unserer Aussage gleich sind.

2. Zur besseren Übersicht formen wir die Wurzelterme in die Exponentialschreibweise  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  um:

$$a \frac{a^2 \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}} = a \frac{a^2 (a^3)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

und lösen die Nennerterme durch Vorzeichenwechsel der entsprechenden Exponenten  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  auf:

$$= aa^2(a^3)^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}$$

Sodann können wir alle Exponenten in einem zusammenfassen:

$$\begin{aligned} &= a^{1+2+3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{25}{6}} \end{aligned}$$

3.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

Induktionsanfang: Für  $n_0 = 1$  steht auf der linken Seite  $1^2$  und auf der rechten

$$\frac{1}{6}(1+1)(2\cdot 1+1) = 1.$$

Beide Seiten stimmen überein.

Induktionsschritt: Wir nehmen an,  $A(n)$ , also  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$  sei wahr für eine beliebige, aber feste Zahl  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dann müssen wir für die Summe bis  $n+1$  zeigen:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &\stackrel{IV}{=} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &\vdots \\ &= \frac{n+1}{6}((n+1)+1)(2(n+1)+1) \end{aligned}$$

Dies direkt durch Umformen des ersten in den letzten Term zu zeigen, ist nicht einfach. Doch da wir genau wissen, wo wir hin wollen, können wir auch von beiden Seiten zu rechnen beginnen und uns in der Mitte treffen:

$$\begin{aligned} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 &= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) + (n^2 + 2n + 1) \\ &= \frac{2}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{2}{6}n^3 + \frac{9}{6}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \end{aligned}$$

Von der anderen Seite gerechnet, ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{6}((n+1)+1)(2(n+1)+1) &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) \end{aligned}$$

Offensichtlich sind beide Ausdrücke gleich. Damit haben wir aus  $A(n)$  auch  $A(n+1)$  gefolgert.

4.

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ oder } x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ und } x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5\} = ]4,5]$$

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ und } x > 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = ]5, \infty[$$

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \text{ und } x \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\} = ]-\infty, 4]$$

Wir hätten auch gleich  $A = ]4, \infty[$  und  $B = ]-\infty, 5]$  als Intervalle schreiben und damit weiterrechnen können. In obiger Notation können die Zwischenschritte aber besser aufgeschrieben werden.

5. Als Hilfe schreiben wir die Mengen teilweise aus:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k, k+1[ = \dots \cup ]-2, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \dots = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [0, \frac{1}{k}] = [0, \frac{1}{1}] \cap [0, \frac{1}{2}] \cap [0, \frac{1}{3}] \cap [0, \frac{1}{4}] \cap \dots = \{0\}$$

Nur 0 ist Element jeder dieser Mengen. Jede andere positive Zahl wird irgendwann durch eine obere Intervallgrenze unterschritten und ist demnach nicht in diesem Intervall und somit auch nicht im Schnitt.

Bei der letzten Menge sind die einzelnen Teile schon komplizierter. Für  $k = 1$  haben wir noch  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ , für  $k = 2$  aber schon

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots \right\}$$

und für  $k = 3$ :  $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right\}$ . Insgesamt durchlaufen wir damit sämtliche positiven Brüche (und die 0) und erhalten somit als Vereinigung die Menge der nicht negativen rationalen Zahlen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid xk \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}_{\geq 0} .$$

### Fragen

- Was ist der Unterschied zwischen Implikation und Äquivalenz?
- Wie lauten die Wahrheitstabellen für „oder“ und „und“?
- Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und erklären Sie dies an einem Beispiel.
- Definieren Sie den Begriff der Menge.
- Nennen Sie Mengen, die für die Analysis wichtig sind.
- Definieren Sie den Schnitt von zwei Mengen.



# 3 Reelle und komplexe Zahlen

## 3.1 Motivation

Der Bedarf nach reellen — und später komplexen — Zahlen wird in der Analysis oft damit begründet, bestimmte Arten von Gleichungen lösen zu können, die zuvor nicht lösbar waren. So hat die Gleichung

$$x^2 = 2$$

unter den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  keine Lösung, unter den reellen Zahlen aber die Lösungen  $x = \pm\sqrt{2}$ . Die Gleichung

$$x^2 = -2$$

wiederum ist nicht einmal in den reellen Zahlen lösbar. Hierfür brauchen wir die komplexen Zahlen.

Wir werden in diesem Kapitel nur einige ausgesuchte Aspekte der reellen Zahlen vorstellen, da Grundsätzliches bekannt sein sollte.

## 3.2 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  stellen eine Vervollständigung der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  dar. Während wir rationale Zahlen stets als Bruch ganzer Zahlen schreiben können, ist dies bei den nicht rationalen reellen Zahlen, also solche aus  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , den so genannten *irrationalen Zahlen*, nicht mehr möglich.

### Beispiel

$\sqrt{2}$  ist eine irrationale Zahl:

Angenommen,  $\sqrt{2}$  wäre eine rationale Zahl. Dann ist sie als Bruch  $\frac{p}{q}$  teilerfremder, ganzer Zahlen  $p, q \in \mathbb{Z}$  darstellbar. Somit wäre  $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ , bzw.  $2q^2 = p^2$ .

Die letzte Gleichung besagt einerseits, dass  $p^2$  und damit auch  $p$  gerade Zahlen sind. Wenn  $p$  durch 2 teilbar ist, muss  $p^2$  durch 4 teilbar sein. Wiederum nach letzter Gleichung folgt dann, dass auch  $q$  durch 2 teilbar ist. Also sind  $p$  und  $q$  durch 2 teilbar und damit nicht teilerfremd, wie vorausgesetzt. Wir erhalten einen Widerspruch aus unserer Annahme.  $\blacklozenge$

So wie natürliche, ganze und rationale Zahlen, können auch reelle Zahlen durch  $<$  und  $>$  geordnet werden. Zwischen je zwei irrationalen Zahlen lassen sich sowohl rationale als auch weitere irrationale Zahlen finden. Zwischen je zwei rationalen Zahlen ebenfalls.

### 3.2.1 Rechnen mit Ungleichungen

Obwohl den meisten das Umformen von Gleichungen in der Schule bereits ins Blut übergegangen ist, haben nicht wenige unserer Erfahrung nach Schwierigkeiten, wenn es um Ungleichungen geht. Grund genug, hier nochmal auf die wesentlichen Punkte einzugehen. Zunächst einmal ist der Name „Ungleichung“ etwas unglücklich, denn wir werden es selten mit einem  $\neq$  als vielmehr mit  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  und  $\geq$  zu tun bekommen und bei den letzten beiden Symbolen ist sogar die Gleichheit möglich.

Das Umformen von Gleichungen funktioniert bei genauer Betrachtung nach dem Prinzip, dass auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation ausgeführt wird. Wenn es sich vorher auf der linken wie der rechten Seite um die gleiche Zahl gehandelt hat, können sie durch die Umformung nicht verschieden werden. Selbst eine Umformung wie „das  $x$  auf die andere Seite bringen“ bedeutet, dass auf beiden Seiten  $x$  subtrahiert wird oder beide Seiten durch  $x$  geteilt werden.

Die beiden Seiten von Ungleichungen hingegen sind nicht unbedingt gleich, so dass wir bei Anwendung der gleichen Operationen darüber nachdenken müssen, welchen Einfluss dies auf das Ungleichungssymbol hat. In Zweifelsfällen hilft es manchmal, die beiden Seiten durch einfache Zahlen zu ersetzen, die demselben Ungleichungssymbol genügen, und die Operation darauf anzuwenden. Wichtig dabei ist, verschiedene Varianten von Vorzeichen auszuprobieren.

#### Beispiel

Eine der wichtigsten Ungleichungen ist die so genannte *Dreiecksungleichung*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| .$$

Wir werden den linken Teil näher untersuchen, um sie besser zu verstehen:

Zunächst quadrieren wir beide Seiten. Wegen der äußeren Beträge stehen links

und rechts nicht-negative Zahlen. Für solche bleibt das Ungleichungszeichen beim Quadrieren bestehen (Beispiel:  $1 \leq 2$  und  $1^2 \leq 2^2$ ).

$$||a| - |b||^2 \leq |a + b|^2 .$$

Beide Seiten können wir separat vereinfachen:  $||a| - |b||^2 = (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$  bzw.  $|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Demnach bleibt

$$a^2 - 2|ab| + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 .$$

Nun kürzen wir auf beiden Seiten  $a^2$  und  $b^2$ , was nichts anderes bedeutet, als dass wir von beiden Seiten jeweils  $a^2 + b^2$  subtrahieren. Auch diese Umformung verändert das Ungleichungszeichen nicht. Es bleibt

$$-2|ab| \leq 2ab$$

und nach Division durch 2 nur noch

$$-|ab| \leq ab .$$

Die letzte Ungleichung können wir sehr leicht einsehen: Ist  $ab > 0$ , steht links eine negative Zahl und rechts eine positive; ist  $ab = 0$ , so auch  $-|ab|$  und es gilt Gleichheit; für  $ab < 0$  ist schließlich  $-|ab| = ab$ , denn der Betrag ändert das Vorzeichen und das Minuszeichen nochmals.

Haben wir damit den linken Teil der Dreiecksungleichung, also  $||a| - |b|| \leq |a + b|$ , bewiesen? Nein, denn unser Argumentationsweg ging in die entgegengesetzte Richtung! Wir haben gezeigt, dass

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| \leq |a + b| &\Rightarrow ||a| - |b||^2 \leq |a + b|^2 \\ &\Rightarrow a^2 - 2|ab| + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Rightarrow -2|ab| \leq 2ab \\ &\Rightarrow -|ab| \leq ab \end{aligned}$$

ist. Gebraucht hätten wir allerdings die Implikationen in die andere Richtung. Somit müssen wir mit  $-|ab| \leq ab$  starten, denn dies haben wir bereits verifiziert. Glücklicherweise funktionieren unsere Umformungsschritte auch in umgekehrter Richtung, ohne das Ungleichungszeichen zu verändern: Wir multiplizieren beide Seiten mit 2, addieren  $a^2 + b^2$  auf beiden Seiten und ziehen von beiden Seiten — die nicht-negativ sind — die Wurzel:

$$\begin{aligned} -|ab| \leq ab &\Rightarrow -2|ab| \leq 2ab \\ &\Rightarrow a^2 - 2|ab| + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Rightarrow ||a| - |b||^2 \leq |a + b|^2 \\ &\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a + b| . \end{aligned}$$



### 3.3 Summen und Produkte

Da wir es in der Analysis häufig mit Summen aus beliebig vielen Summanden zu tun haben werden, führen wir dafür — analog zur Vereinigung und dem Schnitt von Mengen — die Schreibweise

$$\sum_{k=m}^n x_k := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n$$

ein, wobei  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind. Das Analogon für Produkte ist

$$\prod_{k=m}^n x_k := x_m x_{m+1} \dots x_n .$$

Die Grenzdizes  $m$  und  $n$  sind oft nicht näher konkretisiert, die Schreibweise soll aber in jedem Fall möglich — und sinnvoll — sein. Bei  $m = n$  besteht der Ausdruck nur aus einem einzigen Term:

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m}^m x_k = x_m \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n x_k = \prod_{k=m}^m x_k = x_m .$$

Bei  $m > n$  haben wir es mit einer leeren Summe bzw. einem leeren Produkt zu tun:

$$\sum_{k=m}^n x_k = 0 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n x_k = 1 .$$

Dies ist eine Verabredung für die Benutzung der Schreibweise, deren Motivation bei der Summe von  $0 \cdot x = 0$  (addiere  $x$  null mal) bzw. beim Produkt von  $x^0 = 1$  (multipliziere  $x$  null mal) herrührt.

Wir werden uns in der Analysis eher auf Summen als auf Produkte stürzen, weshalb wir hier noch einige Rechenregeln für Summenzeichen angeben. Wir empfehlen, diese Regeln für Summen mit drei Summanden nachzuvollziehen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k &= \sum_{k=m}^n (x_k + y_k) \\ \sum_{k=m}^n a x_k &= a \sum_{k=m}^n x_k \\ \sum_{i=m}^n x_i \cdot \sum_{j=k}^l y_j &= \sum_{i=m}^n \sum_{j=k}^l x_i y_j = \sum_{j=k}^l \sum_{i=m}^n x_i y_j \\ \sum_{k=m}^n x_k &= \sum_{k=m}^l x_k + \sum_{k=l+1}^n x_k \quad , \text{ für } m \leq l \leq n . \end{aligned}$$

Da es, wie in der dritten Rechenregel aufgeführt, bei der Multiplikation von Summen nicht auf die Reihenfolge ankommt, hat sich in der Literatur auch die folgende Schreibweise eingeschlichen:

$$\sum_{\substack{i = m, \dots, n \\ j = k, \dots, l}} x_i y_j := \sum_{i=m}^n \sum_{j=k}^l x_i y_j = \sum_{j=k}^l \sum_{i=m}^n x_i y_j .$$

### Beispiel

Die *geometrische Summe* ist definiert als

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n .$$

Es ist  $(1-x)S_n(x) = 1 - x^{n+1}$  — was wir gleich mit vollständiger Induktion beweisen wollen — und folglich erhalten wir für  $x \neq 1$  die Summenformel

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Nun zur vollständigen Induktion: Die Aussagen  $A(n)$ :  $(1-x)S_n(x) = 1 - x^{n+1}$  sollen für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden. Zunächst betrachten wir den Induktionsanfang  $A(0)$ :

$$(1-x)S_0(x) = 1 - x^{0+1} .$$

Dieser ist wegen  $S_0(x) = x^0 = 1$  erfüllt. Für den Induktionsschritt sei  $n$  beliebig, aber fest und wir setzen  $A(n)$ , also  $(1-x)S_n(x) = 1 - x^{n+1}$  voraus. Hier kommt die Schlussfolgerung auf  $A(n+1)$ :

$$\begin{aligned} (1-x)S_{n+1}(x) &= (1-x)(S_n(x) + x^{n+1}) \\ &= (1-x)S_n(x) + (1-x)x^{n+1} \\ &= (1-x)S_n(x) + x^{n+1} - x^{n+2} \\ &\stackrel{IV}{=} 1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2} \\ &= 1 - x^{n+2} \\ &= 1 - x^{(n+1)+1} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Formel  $(1-x)S_n(x) = 1 - x^{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt.  $\blacklozenge$

### 3.3.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Ein Produkt, welches uns doch hin und wieder über den Weg laufen wird, ist  $\prod_{k=1}^n k$ , weshalb wir hier noch eine weitere, sehr gebräuchliche Schreibweise einführen: die *Fakultät*.

**Definition** (Fakultät)

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n > 0,$$

$$0! := 1$$



Ein Anwendungsbeispiel der Fakultät ist der *Binomialkoeffizient*.

**Definition** (Binomialkoeffizient)

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}, n \geq k.$$

gelesen: „ $n$  über  $k$ “.



Dieser gibt die Anzahl der Möglichkeiten an,  $k$  Zahlen aus  $n$  auszuwählen. Beispielsweise ergibt  $\binom{49}{6}$  die berüchtigten 13 983 816, die Möglichkeiten, beim Lotto sechs aus 49 auszuwählen.

Das *Pascalsche Dreieck* gibt uns eine Möglichkeit, Binomialkoeffizienten ohne Fakultäten zu berechnen. Jede Zeile beginnt und endet mit 1 und jeder weitere Eintrag ergibt sich als Summe der beiden schräg darüber stehenden Zahlen. Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  ist nun der  $(k+1)$ te Eintrag in der  $(n+1)$ ten Zeile.

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 0 & & & & & & 1 \\
 n = 1 & & & & & 1 & 1 \\
 n = 2 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 n = 3 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 n = 4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & 
 \end{array}$$

**Beispiel**

Die binomische Formel  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  hat nicht nur den Namensanfang mit dem Binomialkoeffizienten gemeinsam. Ein Blick auf das Pascalsche Dreieck verrät, dass dort in Zeile  $n = 2$  die Koeffizienten stehen:

$$n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad , \quad 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 .$$

Und das ist kein Zufall, denn folgende Formel, der *Binomische Satz*, stellt eine

Verallgemeinerung obiger Formel auch für höhere Exponenten dar:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Wir testen die Verallgemeinerung für  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k \\ &= \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 \\ &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= 1 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 . \end{aligned}$$

Für negative  $b$  ergibt sich automatisch die zweite binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$



## 3.4 Komplexe Zahlen

Das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ. Um beispielsweise die Gleichung  $x^2 = -1$  zu lösen, brauchen wir eine Erweiterung der reellen Zahlen: die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ .

Als komplexe Zahlen bezeichnen wir Zahlen der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Größe  $i$  ist dabei durch die Gleichung  $i^2 = -1$  charakterisiert. Wir nennen  $a$  den *Realteil* und  $b$  den *Imaginärteil* von  $z := a + bi$  und schreiben dafür kurz

$$\operatorname{Re} z := a \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z := b .$$

Real- und Imaginärteil sind somit reelle Zahlen, was beim Imaginärteil gerne vergessen wird. Nur durch Hinzunahme von  $i$  überschreiten wir die Grenzen der reellen Zahlen. Ist  $b = 0$ , bleibt nur noch der Realteil übrig:  $a + 0i = a \in \mathbb{R}$ . Die reellen Zahlen sind also in den komplexen enthalten:  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen funktionieren, wie wir es von reellen Zahlen kennen, nur dass wir das Ergebnis wieder in der Form  $a + bi$  schreiben:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i . \end{aligned}$$

Auch die Multiplikation gehorcht analogen Rechengesetzen wie die der reellen Zahlen

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Dies entspricht dem gewöhnlichen Ausmultiplizieren reeller Zahlen, wobei wir lediglich  $i^2 = -1$  eingesetzt haben. Hier sehen wir noch die Vorgehensweise bei der Division:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i .$$

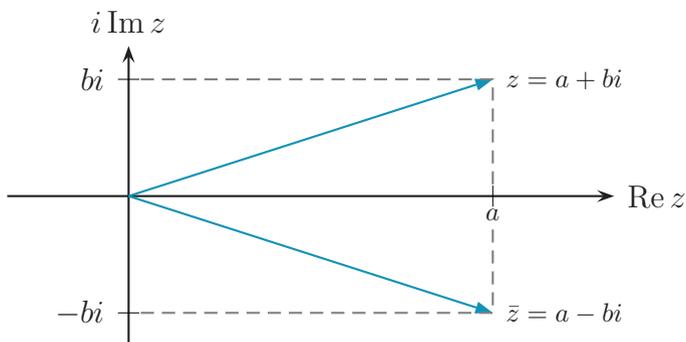
Für den Kehrwert einer komplexen Zahl reduziert sich dies zu

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i .$$

Drehen wir das Vorzeichen des Imaginärteils einer komplexen Zahl  $z$  um, erhalten wir die so genannte *komplex konjugierte* Zahl  $\bar{z}$ .

$$z = a + bi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} := a - bi .$$

Zur Veranschaulichung der komplexen Zahlen stellen wir uns eine Ebene mit zwei sich rechtwinklig schneidenden Koordinatenachsen vor (das Ganze nennen wir *Kartesisches Koordinatensystem*). Auf die Abzisse ( $x$ -Achse) tragen wir die Realteile und auf die Ordinate ( $y$ -Achse) die Imaginärteile von komplexen Zahlen ein. Entsprechend nennen wir die Achsen reelle bzw. imaginäre Achse. Auf diese Weise erhalten wir für jede komplexe Zahl einen Punkt in der Ebene (siehe Bild); der Koordinatenursprung entspricht der Zahl  $0 + 0i$ , auf der reellen Achse befinden sich die reellen Zahlen  $a + 0i$ .



Als *Betrag*  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z$  bezeichnen wir den Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung. Nach dem Satz von Pythagoras ist dies:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Für reelle Zahlen  $a$  gibt uns diese Gleichung auch an, wie der Betrag zu berechnen ist:

$$|a| = \sqrt{a^2} .$$

Zur Addition zweier komplexer Zahlen zeichnen wir einfach die Strecken vom Koordinatenursprung zu beiden Punkten ein und verschieben eine Strecke an das Ende der anderen. Beide Strecken hintereinander führen zum Ergebnispunkt der Addition. Entsprechend ist die Strecke zwischen zwei komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  eine Verschiebung von  $z_2 - z_1$  aus dem Ursprung. Der Betrag  $|z_2 - z_1|$  gibt somit den Abstand von  $z_1$  und  $z_2$  an. Mit dieser Anschauung können wir leicht den zweiten Teil

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

der Dreiecksungleichung — die übrigens auch für komplexe Zahlen gilt — verstehen (siehe Seite 24): Dazu betrachten wir in der komplexen Ebene das Dreieck mit den Eckpunkten  $0$ ,  $a$  und  $-b \in \mathbb{C}$ . Die Strecke von  $-b$  nach  $a$  hat die Länge  $|a - (-b)| = |a + b|$ . Gehen wir einen Umweg von  $-b$  über  $0$  nach  $a$ , legen wir die Länge  $|-b| = |b|$  und danach die Länge  $|a|$  zurück, insgesamt also  $|a| + |b|$ . Als Umweg ist dies also größer als  $|a + b|$ . Dies gilt natürlich auch für reelle Zahlen als Teilmenge der komplexen.

Die komplexe Konjugation, also der Vorzeichenwechsel des Imaginärteils, entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse. Damit ergeben sich bereits anschaulich die ersten beiden der folgenden Rechenregeln für die komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z , \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 , \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 , \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} , \\ z\bar{z} &= |z|^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die restlichen Rechenregeln werden wir im folgenden Abschnitt über Polarkoordinaten verstehen. Stellen wir die zuletzt aufgeführte Formel übrigens nach  $\frac{1}{z}$  um, erhalten wir

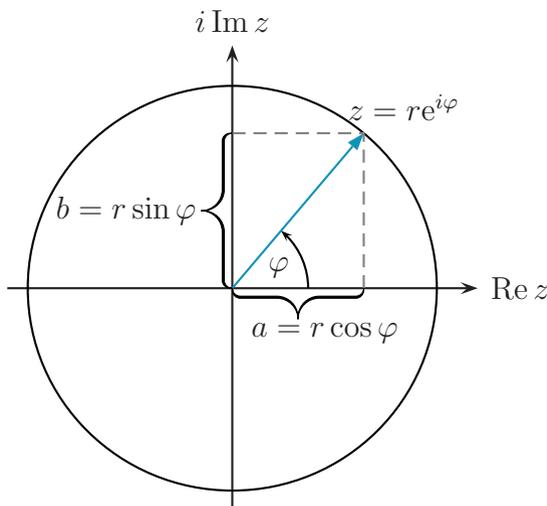
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} ,$$

was der weiter oben stehenden Formel für den Kehrwert entspricht.

Eine Eigenschaft, welche bei der Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen verloren geht, ist die Anordenbarkeit. Bei den reellen Zahlen können wir klar sagen, welche Zahl die größere und welche die kleinere ist, und somit mit Ungleichungen arbeiten. Bei komplexen Zahlen — Punkten in der Ebene — ist dies nicht mehr möglich.

### 3.4.1 Polarkoordinaten

Komplexe Zahlen lassen sich nicht ausschließlich durch Angabe von Real- und Imaginärteil beschreiben. Eine geometrisch interessante Alternative bieten die *Polarkoordinaten*, bei denen wir uns auf den Abstand vom Koordinatenursprung und auf den Winkel von der positiven reellen Achse konzentrieren.



So kann jede komplexe Zahl in der Form

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

dargestellt werden. Diese Darstellung ist für  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi[$  eindeutig und wir können auch jede komplexe Zahl bis auf 0 auf diese Weise angeben. (0 können wir natürlich mit  $r = 0$  realisieren, nur geht uns dabei die Eindeutigkeit der Darstellung verloren.)

Mit der *Eulerformel*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

ist sogar eine kürzere Schreibweise möglich:

$$z = re^{i\varphi} .$$

Im Kapitel über wichtige Funktionen werden wir Sinus, Kosinus und die Exponentialfunktion  $e^x$  näher betrachten.

Nun werden Sie sich vielleicht fragen, wozu man komplexe Zahlen auf unterschiedliche Arten darstellen sollte. Jede Notation hat ihre Vor- und Nachteile und abhängig davon, was gerade betrachtet wird, ist die eine oder die andere Notation hilfreich. Die Multiplikation komplexer Zahlen ist beispielsweise in

Polarkoordinaten einfacher und auch anschaulicher (wobei wir hier auf Ihre Rechenfertigkeiten aus der Schule vertrauen):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) . \end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis können wir sehen, dass sich die Beträge multiplizieren und die Winkel addieren. Mit der Multiplikation geht auch das Potenzieren schnell:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) .$$

Die Addition hingegen ist in Polarkoordinaten ungleich schwieriger, weshalb wir dort, wenn möglich, auf die kartesische Darstellung zurückgreifen.

### Beispiel

Wir bestimmen die  $n$ -ten Einheitswurzeln, also diejenigen komplexen Zahlen  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , welche die Gleichung  $z^n = 1$  erfüllen. Zunächst muss der Betrag von  $z$  eins sein:  $r = 1$ . Potenzieren in Polarkoordinaten ergibt:

$$\begin{aligned} 1 + i \cdot 0 &= z^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \\ \Leftrightarrow \cos(n\varphi) &= 1 \text{ und } \sin(n\varphi) = 0 . \end{aligned}$$

Damit muss  $n\varphi$  ein Vielfaches von  $2\pi$  sein. Es gibt also genau  $n$  verschiedene Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$ , die so genannten  $n$ -ten Einheitswurzeln

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) , \quad k = 1, \dots, n .$$



Wollen wir die Wurzeln aus einer anderen Zahl  $w \in \mathbb{C}$  berechnen, also die Gleichung  $z^n = w$  lösen, so genügt uns in Zukunft eine Wurzel aus  $z$ . Durch Multiplikation mit den Einheitswurzeln erhalten wir alle weiteren Lösungen, denn beim Potenzieren wird der Einheitswurzelterm zu 1.

## 3.5 Aufgaben

1. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{42} \left( \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right) .$$



## 3.6 Lösungen

1. Um einen Überblick zu erhalten, schreiben wir die ersten und letzten Summanden explizit auf:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{42} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) &= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad \dots + (\sqrt{40} - \sqrt{39}) + (\sqrt{41} - \sqrt{40}) + (\sqrt{42} - \sqrt{41}) . \end{aligned}$$

Dabei fällt auf, dass sich jeweils der erste Teil eines Summanden mit dem zweiten Teil des darauf folgenden Summanden aufhebt. Übrig bleiben lediglich der zweite Teil des ersten Summanden ( $-\sqrt{0}$ ) und der erste Teil des letzten Summanden ( $\sqrt{42}$ ):

$$\sum_{k=1}^{42} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = -\sqrt{0} + \sqrt{42} = \sqrt{42} .$$

(Diese Arten von Summen, bei denen sich aufeinander folgende Summanden teilweise oder auch ganz aufheben, werden aus verständlichen Gründen *Teleskopsummen* genannt.)

2. Jede Zeile des Dreiecks (außer der ersten) berechnet sich vollständig aus der vorherigen. Wir betrachten die Berechnung der  $(n+1)$ -ten Zeile mit den Werten  $b_0$  bis  $b_n$  aus der  $n$ -ten Zeile, deren Einträge wir mit  $a_0$  bis  $a_{n-1}$  bezeichnen. Die  $b_k$  ergeben sich im Pascalschen Dreieck aus den  $a_k$  wie folgt:

$$b_0 := a_0 , \quad b_n := a_{n-1} , \quad b_k := a_{k-1} + a_k \text{ für } k = 1, \dots, n-1 .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k &= b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k b_k + (-1)^n b_n \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (a_{k-1} + a_k) + (-1)^n a_{n-1} \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_{k-1} + (-1)^n a_{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} a_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Wir hätten dies auch mit vollständiger Induktion zeigen können. Allerdings ist dies ein wenig komplizierter, weshalb wir die obige Methode gewählt haben.

3.

$$\begin{aligned}
 (a + bi)^2 &= a^2 + b^2 i^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi, \\
 (a - bi)^2 &= a^2 + b^2 i^2 - 2abi = a^2 - b^2 - 2abi, \\
 (a + bi)(a - bi) &= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

4. Als komplexe Zahl kann  $z$  in der Form  $z = a + bi$  und  $\bar{z} = a - bi$  geschrieben werden. Damit gilt dann

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re} z$$

und

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \operatorname{Im} z.$$

5. Für die Polarkoordinatenschreibweise müssen wir Länge und Winkel der Zahl in der komplexen Ebene ermitteln. Die Länge — oder Betrag — einer Zahl  $z := a + bi$  ist durch  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  gegeben (Pythagoras). Die Winkel können wir leicht ermitteln, indem wir uns die Zahlen in der komplexen Ebene eingezeichnet vorstellen.

- $3 + 3i$  hat einen Betrag von  $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$  und einen Winkel von  $45^\circ$ , also  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Damit ist

$$3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

- $1 - i$  hat einen Betrag von  $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  und einen Winkel von  $-45^\circ$ , also  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ . Damit ist

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} .$$

- $-1$  hat einen Betrag von  $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$  und einen Winkel von  $180^\circ$ , also  $\varphi = \pi$ . Damit ist

$$-1 = e^{i\pi} .$$

Der Winkel ist natürlich nicht eindeutig, sondern kann sich um additive Vielfache von  $360^\circ$ , also  $2\pi$  unterscheiden. Je nach persönlicher Vorliebe wird sich  $\varphi$  in der Literatur im Bereich  $[0, 2\pi[$  oder auch  $]-\pi, +\pi]$  aufhalten. Somit könnten wir auch

$$1 - i = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

schreiben.

Die komplexe Zahl  $i$  hat einen Betrag von  $r = 1$  und einen Winkel von  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Multiplizieren wir eine beliebige komplexe Zahl  $z := re^{i\varphi}$  mit  $i$ , so erhalten wir

$$iz = e^{i\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi} = re^{i\frac{\pi}{2} + i\varphi} = re^{i(\frac{\pi}{2} + \varphi)} .$$

Das Ergebnis  $iz$  hat damit den gleichen Betrag  $r$  wie  $z$ , der Winkel ist allerdings um  $\frac{\pi}{2}$ , also  $90^\circ$  größer. Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit  $i$  bewirkt also lediglich eine Drehung um  $90^\circ$  in mathematisch positiver Richtung.

6. • Die Spiegelung an der reellen Achse entspricht einem Vorzeichenwechsel der Imaginärteils, also der komplexen Konjugation:

$$z \mapsto \bar{z} .$$

- Die Spiegelung an der imaginären Achse entspricht einem Vorzeichenwechsel des Realteils:

$$z \mapsto -\bar{z} .$$

- Die Spiegelung am Koordinatenursprung schließlich entspricht einem Vorzeichenwechsel von Real- und Imaginärteil, also von ganz  $z$ :

$$z \mapsto -z .$$

7. Als  $n$ -te Einheitswurzeln haben die  $a_k$  in Polarkoordinaten die Gestalt

$$a_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} .$$

Beim Quadrieren verdoppelt sich lediglich der Winkel, also der Exponent von  $e$ . (Die Länge würde sich quadrieren, allerdings haben die  $a_k$  als Einheitswurzeln ohnehin Länge 1.) Damit ist

$$a_k^2 = e^{i \frac{2 \cdot 2k \cdot \pi}{n}} ,$$

also  $a_1^2 = a_2$ ,  $a_2^2 = a_4$ ,  $a_3^2 = a_6$ , usw., wobei  $a_{n+k} = a_k$  gilt. Das Quadrat einer  $n$ -ten Einheitswurzel ist also wieder eine  $n$ -te Einheitswurzel. (Diese Aussage lässt sich sogar auf beliebige natürliche Exponenten erweitern.)

Bei ungeradem  $n$  erwischen wir beim Quadrieren aller  $a_k$  wiederum alle  $n$  Einheitswurzeln. Beispielsweise ist für  $n = 3$

$$a_1^2 = a_2 , \quad a_2^2 = a_1 , \quad a_3^2 = a_3 .$$

Bei geradem  $n$  erwischen wir nur die  $a_k$  mit geradem  $k$ , diese aber dafür doppelt. Beispiel für  $n = 4$ :

$$a_1^2 = a_2 , \quad a_2^2 = a_4 , \quad a_3^2 = a_2 , \quad a_4^2 = a_4 .$$

Das Produkt der  $a_k$  ist

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n e^{i \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{\sum 2k\pi}{n}} = e^{i \frac{2 \frac{n}{2} (n+1)\pi}{n}} = e^{i(n+1)\pi} = (-1)^{n+1} ,$$

wobei das Summenzeichen ebenso wie das Produktzeichen von 1 bis  $n$  läuft. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die Grenzen dort weggelassen. Die Summenformel kennen wir bereits:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$ .

### Fragen

- Ist jede rationale Zahl eine reelle? Finden Sie eventuell Gegenbeispiele?
- Was besagt die Dreiecksungleichung? Können Sie die Bedeutung skizzieren?
- Definieren Sie das Produkt- und Summenzeichen.
- Was ist die geometrische Summe? Bestimmen Sie ihren Wert für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- Was ist der Binomialkoeffizient und wo kommt er zur Berechnung vor?
- Geben Sie Imaginär- und Realteil einer komplexen Zahl  $z$  an und skizzieren Sie diese.
- Wie lauten die Grundrechenregeln für komplexe Zahlen?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Zahlen?
- Was ist komplexe Konjugation anschaulich?
- Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen an.
- Welche geometrische Bedeutung hat die Multiplikation komplexer Zahlen?



# 4 Abbildungen und Funktionen

## 4.1 Motivation und Definitionen

Häufig wird mit Zuordnungsvorschriften zwischen Mengen gearbeitet. Solche Zuordnungen sind oft von zentraler Bedeutung bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge. So soll beispielsweise von einem fallenden Stein die Zuordnungsvorschrift  $h$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Höhe  $h(t)$  des Steins liefern. In der Mathematik sprechen wir allgemein von *Abbildungen*:

### **Definition** (Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich)

Eine Abbildung  $f$  von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  — wir schreiben  $f: A \rightarrow B$  — ordnet jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y \in B$  zu. Wir schreiben hierfür  $f(x) = y$  oder  $f: x \mapsto y$ .

$A$  heißt Definitionsbereich,  $B$  heißt Wertebereich der Abbildung. ◀

Besteht der Wertebereich aus reellen oder komplexen Zahlen, also  $B \subseteq \mathbb{R}$  oder  $B \subseteq \mathbb{C}$ , so sprechen wir auch von einer *Funktion* (auf  $A$ ). Beispiele aus der Schule sind  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x$ ,  $f(x) := 3x + x^2$  oder  $f(x) := \sin(\pi x)$ .

### **Definition** (Bildmenge, Urbildmenge)

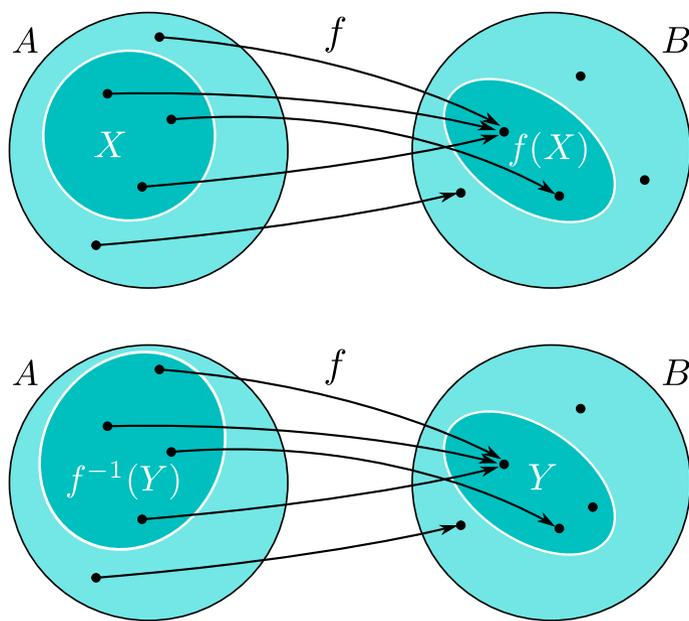
Seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung. Für Teilmengen  $X \subseteq A$  und  $Y \subseteq B$  definieren wir:

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B ,$$
$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A .$$

$f(X)$  heißt Bildmenge oder Bild von  $X$  und  $f^{-1}(Y)$  heißt Urbildmenge oder Urbild von  $Y$  bezüglich  $f$ . ◀

In folgender Abbildung sind die Begriffe schematisch veranschaulicht. Für ein

gegebenes  $y \in B$  nennen wir jedes  $x \in A$  mit  $x \in f^{-1}(\{y\})$  einen *Urbildpunkt* von  $y$ .



Bildmenge und Urbildmenge

## 4.2 Einige Eigenschaften von Abbildungen

Es ist nicht immer so, dass jedes Element des Wertebereichs  $B$  einer Abbildung von dieser „getroffen“ wird. So kann es durchaus auch Elemente  $y \in B$  geben, die keine Urbildpunkte haben, d. h.  $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ . Gehört jedoch zu jedem  $y \in B$  wenigstens ein Urbild, wird der Definitionsbereich auf den gesamten Wertebereich abgebildet und  $f(A) = B$ . In diesem Fall sprechen wir von einer *surjektiven* Abbildung.

Eine andere wichtige Eigenschaft, die eine Abbildung haben kann, betrifft ebenfalls die Anzahl der Urbilder. Gibt es für jedes  $y \in f(A)$  nur eines, enthält also  $f^{-1}(\{y\})$  genau ein Element, so sprechen wir von einer *injektiven* Abbildung. Diesen Sachverhalt können wir auch dadurch ausdrücken, dass keine zwei verschiedenen Elemente des Definitionsbereichs von  $f$  auf ein und dasselbe Element abgebildet werden.

Gibt es zu jedem Element des Wertebereiches genau einen Urbildpunkt, so ist die Abbildung surjektiv und injektiv. In diesem Fall sprechen wir von einer *bijektiven* Abbildung.

Wir stellen uns vor, dass  $f$  der Vermittler ist, der jeweils durch ein Element  $x$  aus  $A$  den Auftrag bekommt, einem Element aus  $B$  einen Eimer Wasser über den Kopf zu gießen. Surjektiv bedeutet dann, dass alle Elemente von  $B$  nass sind. Es kann dabei beispielsweise sein, dass ein (armes)  $b \in B$  drei Eimer über den Kopf bekommt. Wichtig ist nur: Alle  $b$  sind nass. Injektivität garantiert, dass jedes  $b$  aus  $B$  höchstens einen Eimer „zugewiesen“ bekommt. Es kann aber am Ende noch trockene Elemente von  $B$  geben, aber keines wurde mehrmals begossen. Bijektiv heißt nun also: Jedes  $b$  bekommt genau aus einem Eimer Wasser ab.

Wir fassen zusammen:

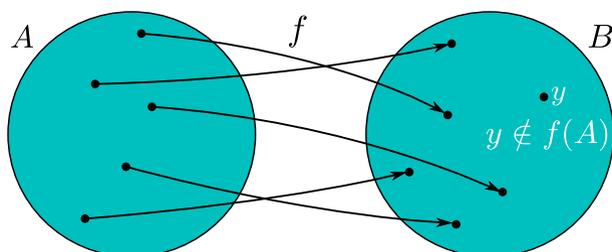
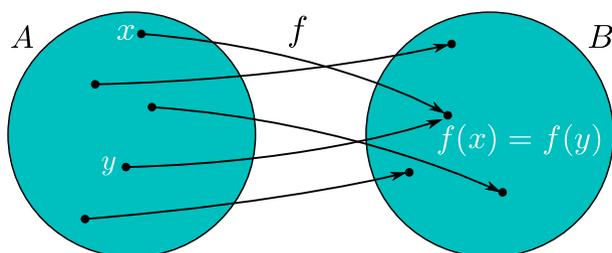
**Definition** (surjektiv, injektiv, bijektiv)

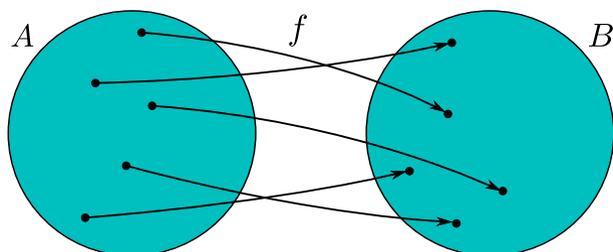
Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung.  $f$  heißt

- surjektiv, wenn  $f(A) = B$ ,
- injektiv, wenn für alle  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$  gilt:  $f(x) \neq f(y)$ ,
- bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.



Die Bedingung der Injektivität kann auch so formuliert werden: Für alle  $x, y \in A$  mit  $f(x) = f(y)$  muss  $x = y$  gelten. In der folgenden Abbildung werden die Begriffe veranschaulicht.





Der Reihenfolge nach: surjektiv, aber nicht injektiv; injektiv, aber nicht surjektiv;  
bijektiv

Für die Eigenschaft einer Abbildung, injektiv oder surjektiv zu sein, ist nicht nur die formale Zuordnungsvorschrift  $x \mapsto f(x)$  wichtig — Definitions- und Wertebereich sind ebenfalls von entscheidender Bedeutung! Dies wird auch an den folgenden Beispielen deutlich:

### Beispiel

- Die Funktion

$$f_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

ist injektiv, denn für alle  $x, y \in [0,1]$  mit  $x \neq y$  gilt hier offensichtlich  $f_1(x) = x \neq y = f_1(y)$  ist. Es ist allerdings  $f_1([0,1]) = [0,1] \neq \mathbb{R}$ , also ist  $f_1$  nicht surjektiv (und damit auch nicht bijektiv).

- Die Funktion

$$f_2: [0,1] \rightarrow [0,1], \quad x \mapsto x$$

ist jedoch surjektiv und damit bijektiv.

- Die Funktion

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

ist nicht injektiv, da beispielsweise  $f_3(2) = 4 = f_3(-2)$  ist. Sie ist auch nicht surjektiv, da beispielsweise  $-1$  keinen Urbildpunkt hat. Die Abbildung

$$f_4: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto x^2$$

ist jedoch bijektiv.



Eine wichtige Eigenschaft bijektiver Abbildungen ist, dass zu jedem Element des Wertebereichs ein eindeutig bestimmtes Urbild gehört. Diese Zuordnungsvorschrift definiert also eine neue Abbildung, die so genannte *Umkehrabbildung*

oder *Inverse*. Wie an den vorigen Beispielen ersichtlich wird, können wir jede Abbildung

$$f: A \rightarrow B$$

durch Einschränken des Wertebereiches auf die Bildmenge des Definitionsbereichs „surjektiv machen“:

$$\tilde{f}: A \rightarrow f(A), \quad x \mapsto f(x),$$

sodass wir die Inverse auch für injektive Abbildungen sinnvoll konstruieren können.

### **Definition** (Umkehrabbildung, Inverse)

Sei  $f: A \rightarrow B$  eine injektive Abbildung. Die Abbildung

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

mit

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

für alle  $y \in f(A)$  und  $x \in A$  heißt Umkehrabbildung oder Inverse von  $f$ . ◀

Die Umkehrabbildung ist nicht zu verwechseln mit der Urbildmenge, obwohl dasselbe Formelzeichen verwendet wird! Allerdings gilt natürlich für bijektive Abbildungen

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

(Das  $f^{-1}$  auf der linken Seite gehört zur Urbildmenge, das auf der rechten Seite ist die Umkehrfunktion.)

### **Beispiel**

Die Umkehrfunktion (wie Umkehrabbildungen von Funktionen auch genannt werden) von

$$f_4: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto x^2$$

ist die Quadratwurzel

$$f_4^{-1}: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$



Wir wollen noch auf einige Eigenschaften von Funktionen eingehen, auf die wir in den weiteren Kapiteln Bezug nehmen werden.

**Definition** (beschränkt, unbeschränkt, untere Schranke, obere Schranke)

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn es Zahlen  $M, N \in \mathbb{R}$  gibt, sodass für alle  $x \in D$

$$M \leq |f(x)| \leq N$$

gilt. In diesem Fall heißen  $M$  untere Schranke und  $N$  obere Schranke von  $f$ . Gibt es solch ein  $M$  oder  $N$  nicht, nennen wir  $f$  unbeschränkt. ◀

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x$  ist unbeschränkt. Auf dem Definitionsbereich  $D := [-3, 5]$  ist  $f$  beschränkt mit der unteren Schranke  $M = -3$  und der oberen Schranke  $N = 5$ .

**Definition** ((streng) monoton wachsend / fallend)

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt monoton wachsend, wenn für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 < x_2$  gilt

$$f(x_1) \leq f(x_2) .$$

$f$  heißt monoton fallend, wenn für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 < x_2$  gilt

$$f(x_1) \geq f(x_2) .$$

$f$  heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn statt  $\leq$  bzw.  $\geq$  sogar  $<$  bzw.  $>$  gilt. ◀

Die Funktion  $f(x) := x^2$  ist auf  $D_1 := ] - \infty, 0]$  streng monoton fallend und auf  $D_2 := [0, \infty[$  streng monoton wachsend.

**Definition** (gerade, ungerade)

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gerade, wenn für alle  $x \in D$  auch  $-x \in D$  ist und gilt

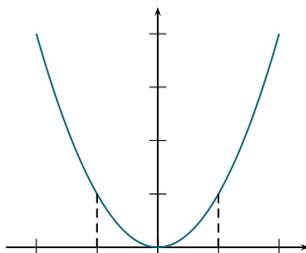
$$f(-x) = f(x) .$$

$f$  heißt ungerade, wenn für alle  $x \in D$  auch  $-x \in D$  ist und gilt

$$f(-x) = -f(x) .$$

Die beiden Eigenschaften bedeuten anschaulich, dass der Funktionsgraph einer geraden Funktionen spiegelsymmetrisch bzgl. der Ordinate (also der  $y$ -Achse) ist, und der Funktionsgraph einer ungeraden Funktion punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs ist.

Für den ersten Fall können wir einfach an eine Parabel denken, also den Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x^2$ :



Für den ungeraden Fall stellen Sie sich beispielsweise eine Gerade durch den Ursprung vor, exemplarisch wählen wir den Graphen der durch  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) := x$  gegebenen Winkelhalbierenden.

### Definition (periodisch, Periodenlänge)

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch, wenn es eine Zahl  $p \in \mathbb{R}$  gibt, sodass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(x + p) = f(x) .$$

Die kleinste dieser Zahlen  $p$  heißt Periodenlänge oder einfach Periode von  $f$ . ◀

Die bereits aus der Schule bekannten Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sin x$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \cos x$  sind beide periodisch mit der Periode  $2\pi$ , kurz  $2\pi$ -periodisch.

## 4.3 Komposition von Abbildungen

Manche Abbildungen sind über einen „Umweg“ erklärt, d. h. wir haben zwei Abbildungen  $f: A \rightarrow X$  und  $g: X \rightarrow B$ , und suchen die Abbildung  $h$ , bei der wir auf ein  $x \in A$  zunächst  $f$  und anschließend  $g$  „loslassen“, sodass  $h(x) = g(f(x))$ . Das Ergebnis ist die *Komposition*  $h = g \circ f$ , eine Abbildung, die von  $A$  nach  $B$  abbildet:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow h=g \circ f & \downarrow g \\ & & B \end{array}$$

Umgangssprachlich formuliert:  $f$  frisst zuerst  $x$  und was  $f$  dann ausspuckt, wird wiederum von  $g$  gefressen. Klingt unschön, ist aber prägnant.

Der Wertebereich von  $f$  muss allerdings nicht unbedingt mit dem Definitionsbereich von  $g$  übereinstimmen, damit die Komposition wohldefiniert ist. Es

genügt, wenn  $f(A)$  im Definitionsbereich von  $g$  enthalten ist, damit der Ausdruck  $g(f(x))$  für alle  $x \in A$  sinnvoll ist.

**Definition** (Komposition, Hintereinanderausführung, Verkettung)

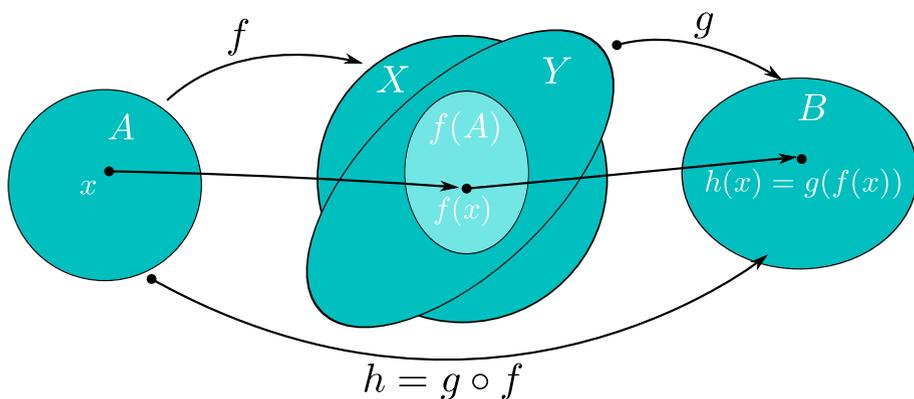
Seien  $f: A \rightarrow X$  und  $g: Y \rightarrow B$  Abbildungen mit  $f(A) \subseteq Y$ . Wir definieren die Komposition (auch Hintereinanderausführung oder Verkettung genannt) von  $f$  und  $g$  als die Abbildung

$$(g \circ f): A \rightarrow B$$

(lies: „ $g$  Kringel  $f$ “ oder „ $g$  nach  $f$ “) mit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

für alle  $x \in A$ . ◀



Die Komposition von Abbildungen

Was geschieht, wenn wir eine Abbildung mit ihrer Umkehrabbildung verketten? Jene war definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Es kommt bei der Komposition also wieder der Startpunkt heraus:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

bzw.

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Die Umkehrabbildung macht sozusagen den „Schaden“, den  $f$  angestellt hat, wieder rückgängig.

**Beispiel**

Seien die Abbildungen

$$f_1: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - x^2$$

und

$$g_1: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

gegeben. Es gilt  $f_1([-1,1]) = [0,1] \subseteq [0, \infty[$ , sodass die Hintereinanderausführung von  $g_1$  nach  $f_1$  erklärt ist:

$$g_1 \circ f_1: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}.$$

Für die Abbildungen

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^x$$

und

$$g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x - 1$$

ist die Hintereinanderausführung in beiden Reihenfolgen möglich; das Ergebnis ist jedoch verschieden:

$$g_2 \circ f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3 \cdot 2^x - 1$$

bzw.

$$f_2 \circ g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^{3x-1}.$$



Wie wir am letzten Beispiel gesehen haben, ist die Komposition von Abbildungen im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. es gilt nicht  $f \circ g = g \circ f$  für alle Abbildungen. Einige erfüllen die Kommutativität wie beispielsweise  $f$  mit  $f^{-1}$ , aber halt nicht alle. Die Komposition ist jedoch assoziativ, es gilt also  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , sodass wir einfach  $h \circ g \circ f$  schreiben können. Gehen wir also den Umweg über mehrere Mengen,

$$A \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} B,$$

schreiben wir für die Komposition

$$f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1.$$

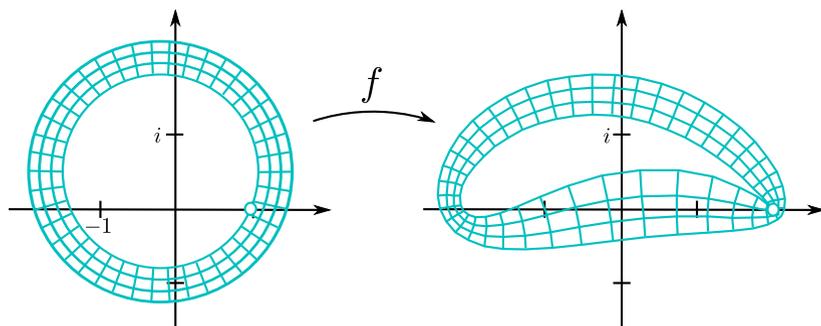
## 4.4 Darstellung von Funktionen

Die graphische Darstellung von Funktionen soll die Beziehungen zwischen dem Definitions- und dem Wertebereich aufzeigen. Sind Definitions- und Wertebereich Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , stellen wir üblicherweise den *Funktionsgraph* dar,

indem wir in ein kartesisches Koordinatensystem über jeden Punkt des Definitionsbereiches den Bildpunkt eintragen. Da eine Funktion jedem Urbildpunkt genau einen Bildpunkt zuordnet, verläuft der Funktionsgraph von links nach rechts, ohne umzukehren. Er kann unterbrochen sein (in Bereichen, die nicht zum Definitionsbereich gehören), plötzliche Sprünge und Ecken aufweisen oder stark ansteigen und jäh wieder abfallen, aber nie darf es mehrere Punkte direkt übereinander geben.

Bei Graphen injektiver Funktionen dürfen keine zwei Urbildpunkte den gleichen Bildpunkt haben. Eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten bzw. dritten Quadranten vertauscht die beiden Achsen und liefert uns den Funktionsgraphen der Umkehrabbildung der Funktion.

Wollen wir Funktionen mit Definitions- und Wertebereich in  $\mathbb{C}$  darstellen, ist das oben beschriebene Verfahren über den Funktionsgraphen nicht mehr angebracht. Wir bräuchten eine komplexe Ebene über jedem Punkt des Definitionsbereiches und würden insgesamt den Funktionsgraphen in einem vierdimensionalen Raum zeichnen müssen! Eine Alternativmethode besteht darin, ein Gitter im Definitionsbereich zu betrachten und in einer zweiten Graphik das Bild des Gitters einzuzichnen. Die Verzerrung des Bildgitters im Vergleich zum Originalgitter vermittelt einen gewissen, wenn auch nicht umfassenden Eindruck der Funktion.



Darstellung der komplexen Funktion  $f(z) := z - \frac{1}{z}$

## 4.5 Aufgaben

1. Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := -x^2 + 2,$$

deren Funktionsgraph eine nach unten offene Parabel zeigt. Bestimmen Sie  $f([0,3])$ ,  $f(]-\infty,0])$  und  $f^{-1}(\{1\})$ .

2. Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktionen von

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &:= 3x - 2 \\ f_2: [1,3] &\rightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &:= 3x - 2 \\ g_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g_1(x) &:= 2x^2 + 1 \\ g_2: [0, \infty[ &\rightarrow \mathbb{R}, & g_2(x) &:= 2x^2 + 1 . \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie für die Funktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty[ , & f(x) &:= x^2 \\ g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= x - 3 \\ h: [0, \infty[ &\rightarrow [0, \infty[ , & h(x) &:= \sqrt{x} \end{aligned}$$

folgende Hintereinanderausführungen samt Definitionsbereich und Wertebereich auf:

$$f \circ g , \quad g \circ f , \quad h \circ f , \quad f \circ h , \quad h \circ g , \quad g \circ g \circ h , \quad f \circ g \circ h .$$

Der Definitionsbereich soll dabei der maximal mögliche in  $\mathbb{R}$  sein und der Wertebereich soll so gewählt werden, dass die Hintereinanderausführung surjektiv ist. Welche Hintereinanderausführung ist zudem noch injektiv?

4. Stellen Sie die Funktion  $f(x) := \frac{x}{x+1}$  als Hintereinanderausführung folgender Funktionen für  $x > 0$  dar:

$$g(x) := \frac{1}{x} , \quad h(x) := x + 1 .$$

5. Seien  $f_1, f_2$  gerade und  $g_1, g_2$  ungerade Funktionen. Leiten Sie die entsprechenden Symmetrieeigenschaften (gerade bzw. ungerade) folgender Hintereinanderausführungen her:

$$f_1 \circ f_2 , \quad g_1 \circ g_2 , \quad f_1 \circ g_2 , \quad g_1 \circ f_2 .$$

## 4.6 Lösungen

- 1.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 + 2 .$$

Als Parabel weist der Graph von  $f$  keine Sprünge auf. Im Intervall  $[0,3]$  ist  $f$  (streng) monoton fallend und daher ist

$$f([0,3]) = [f(3), f(0)] = [-7, 2] .$$

Im Intervall  $] - \infty, 0[$  ist  $f$  streng monoton wachsend, also

$$f(] - \infty, 0[) = ] - \infty, 2[ .$$

Als Parabel kann  $f$  zu jedem Punkt maximal zwei Urbildpunkte haben. Die Gleichung  $-x^2 + 2 = 1$  liefert

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, +1\} .$$

2. Eine einfache Methode, die Umkehrfunktion zu bestimmen, besteht darin  $f(x)$  durch  $y$  zu ersetzen und dann die Funktionsgleichung nach  $x$  aufzulösen. Falls die Ausgangsfunktion nur injektiv und nicht bijektiv ist, müssen wir zudem noch den Definitionsbereich der Umkehrfunktion bestimmen.

$f_1$  ist eine bijektive Funktion, womit wir uns lediglich auf die Funktionsgleichung konzentrieren können:

$$\begin{aligned} f_1(x) = y = 3x - 2 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y + 2) \\ f_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1^{-1}(y) &:= \frac{1}{3}(y + 2) \end{aligned}$$

$f_2$  ist zwar injektiv, aber zur Surjektivität müssen wir den Wertebereich auf  $W := f_2([1,3])$  einschränken. Da  $f_2$  eine monoton wachsende Funktion ist und auch zwischendurch keine Funktionswerte auslässt, ergibt sich der Wertebereich zu:

$$W = [f_2(1), f_2(3)] = [3 \cdot 1 - 2, 3 \cdot 3 - 2] = [1, 7] .$$

Somit ist

$$f_2^{-1}: [1, 7] \rightarrow [1, 3], f_2^{-1}(y) := \frac{1}{3}(y + 2) .$$

$g_1$  ist nicht injektiv, denn beispielsweise ist  $g_1(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = g_1(+1)$ . Es gibt hierzu also keine Umkehrfunktion. Eingeschränkt auf den Definitionsbereich  $[0, \infty[$  wird  $g_1$  allerdings injektiv.

Für  $g_2$  ergibt sich

$$g_2(x) = y = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}(y - 1)} ,$$

sodass die Umkehrfunktion

$$g_2^{-1}: [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, g_2^{-1}(y) := \sqrt{\frac{1}{2}(y - 1)}$$

lautet.

- 3.

$$\begin{aligned} f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, & (f \circ g)(x) = f(x - 3) = (x - 3)^2 \\ g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [-3, \infty[, & (g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 - 3 \\ h \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, & (h \circ f)(x) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \\ f \circ h: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, & (f \circ h)(x) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x^2} = x \end{aligned}$$

(Obwohl das Ergebnis von  $f \circ h$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert wäre, wird der Definitionsbereich durch den von  $h$  eingeschränkt.)

$$h \circ g: [3, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ , \quad (h \circ g)(x) = h(x - 3) = \sqrt{x - 3}$$

(Bei  $h \circ g$  mussten wir den Definitionsbereich von  $g$  weiter einschränken, denn für  $x < 3$  ist das Ergebnis nicht definiert.)

$$g \circ g \circ h: [0, \infty[ \rightarrow [-6, \infty[ ,$$

$$(g \circ g \circ h)(x) = g(g(\sqrt{x})) = g(\sqrt{x} - 3) = \sqrt{x} - 3 - 3 = \sqrt{x} - 6$$

$$f \circ g \circ h: [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ ,$$

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(\sqrt{x})) = f(\sqrt{x} - 3) = (\sqrt{x} - 3)^2 .$$

Injektiv sind  $f \circ h$ ,  $h \circ g$  und  $g \circ g \circ h$ . Bei den anderen Hintereinanderausführungen sorgt das Quadrat dafür, dass Funktionswerte doppelt angenommen werden wie beispielsweise  $(f \circ g \circ h)(4) = 1 = (f \circ g \circ h)(16)$ .

4.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = g\left(\frac{x+1}{x}\right) = g\left(1 + \frac{1}{x}\right) = g\left(h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g(h(g(x)))$$

Demnach ist  $f = g \circ h \circ g$ .

5. Die Eigenschaften der  $f_i$  und  $g_i$  lauten ausgeschrieben:

$$f_i(-x) = f_i(x) , \quad g_i(-x) = -g_i(x) .$$

Damit folgt für die Hintereinanderausführungen:

$$(f_1 \circ f_2)(-x) = f_1(f_2(-x)) = f_1(f_2(x)) = (f_1 \circ f_2)(x)$$

$$(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(-g_2(x)) = -g_1(g_2(x)) = -(g_1 \circ g_2)(x)$$

$$(f_1 \circ g_2)(-x) = f_1(g_2(-x)) = f_1(-g_2(x)) = f_1(g_2(x)) = (f_1 \circ g_2)(x)$$

$$(g_1 \circ f_2)(-x) = g_1(f_2(-x)) = g_1(f_2(x)) = (g_1 \circ f_2)(x) .$$

Somit ist  $g_1 \circ g_2$  ungerade und alle anderen Hintereinanderausführungen gerade.

### Fragen

- Was sind Definitions- und Wertebereich?
- Was ist die Urbildmenge? Fertigen Sie zur Erklärung eine Skizze an.
- Finden Sie drei Beispiele für surjektive Abbildungen, die nicht injektiv sind und umgekehrt.
- Was ist die Inverse einer Funktion und wann ist diese überhaupt definiert?
- Nennen Sie je zwei Beispiele für beschränkte und unbeschränkte Funktionen.
- Was sind monoton wachsende Funktionen? Gibt es Funktionen, die wachsend und fallend zugleich sind?
- Zeichnen Sie ein Diagramm, durch das die Komposition von Abbildungen gegeben wird.



# 5 Wichtige Funktionen im Überblick

## 5.1 Motivation

Wir werden nun einen Blick auf diverse Funktionen werfen, die in den Ingenieur- und Naturwissenschaften immer wieder vorkommen. Wichtige ihrer Eigenschaften werden wir kennen lernen bzw. aus der Schule rekapitulieren, die später teils noch genauer beleuchtet werden. Dieses Kapitel hat einen Übersichtscharakter (angereichert mit einigen Beispielen). Wir verzichten daher auf die strenge Form einer Aneinanderreihung von Definitionen und begleiten Sie auf eine Art Besichtigungstour; es ist die Ruhe vor dem Sturm.

## 5.2 Polynome und rationale Funktionen

### 5.2.1 Polynome

Polynome sind als Funktionen der Form

$$p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

bekannt. Dabei können die *Koeffizienten*  $a_k$  reelle oder komplexe Werte annehmen. Als Bausteine von Polynomen können wir die so genannten *Monome*  $x^k$  betrachten. Der höchste auftretende Koeffizient (hier  $n$ , falls  $a_n \neq 0$ ) wird als der *Grad* von  $p$  bezeichnet. Einen wichtigen Satz wollen wir hier benennen, dessen Beweis wesentlich dem allseits bekannten Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) zugeschrieben wird; er liefert interessante — und oft verwendete — Aussagen über die Nullstellen von Polynomen.

**Satz**

Für jedes komplexe Polynom  $p(x) := a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  vom Grad  $n$  gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = a_n \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

in  $n$  Linearfaktoren  $(x - x_k)$ . Die  $x_k$  müssen dabei nicht notwendigerweise verschieden sein. Insbesondere hat jedes Polynom vom Grad  $n$  genau  $n$  komplexe Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt). (Fundamentalsatz der Algebra) ■

Lassen wir für ein Polynom  $p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit ausschließlich reellen Koeffizienten  $a_k$  für  $x$  auch komplexe Zahlen zu, so ist mit jeder Nullstelle  $x_0$  auch deren konjugiert komplexe Zahl  $\overline{x_0}$  eine Nullstelle:

$$p(\overline{x_0}) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{x_0}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k x_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k x_0^k} = \overline{0} = 0 .$$

Anders ausgedrückt treten die Nullstellen von Polynomen mit rein reellen Koeffizienten stets in komplex konjugierten Paaren auf. Bei reellen Nullstellen ergibt die komplexe Konjugation natürlich nichts Neues. Das hier gewonnene Wissen erspart uns in vielen Fällen unnötige Rechenarbeit.

Bei komplexen Nullstellen zerfällt nun das Polynom u. a. in die Faktoren  $(x - x_0)$  und  $(x - \overline{x_0})$ . Multiplizieren wir diese wieder miteinander, ergeben sich rein reelle, quadratische Terme:

$$(x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0 \overline{x_0} = x^2 - 2 \operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2 .$$

Verbinden wir diese Erkenntnis mit dem Fundamentalsatz der Algebra, so kann jedes reelle Polynom in reelle lineare und reelle quadratische Faktoren zerlegt werden:

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^m (x - x_j)^{k_j} \prod_{j=m+1}^{\tilde{m}} (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j} .$$

Diesmal haben wir mit den  $k_j$  und  $l_j$  die Vielfachheiten der einzelnen Faktoren ausgeschrieben.

## 5.2.2 Rationale Funktionen

Den Bruch zweier Polynome  $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$  nennen wir *rationale Funktion*. Die Nullstellen von  $f$  sind identisch mit denen des Zählerpolynoms  $p$ . An den Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  hingegen ist  $f$  nicht definiert. Solche Punkte nennen wir *Pole*.

## Polynomdivision

In vielen Fällen ist die Darstellung einer rationalen Funktion unnötig kompliziert, denn ähnlich wie zwei reelle Zahlen können wir auch Polynome dividieren. Nur hören wir erst einmal auf, wenn der Rest (das Restpolynom) nach einem Divisionsschritt einen kleineren Grad als das Nennerpolynom hat. Was hier passiert, sehen wir bereits erschöpfend an folgendem Beispiel. Wir möchten zuvor allerdings noch bemerken, dass Leonhard Euler (1707 – 1783), der großartige Mathematiker aus der Schweiz, die Polynomdivision auf wunderbare Weise in seinem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erläutert.

### Beispiel

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 2x^2 + 3x + 4) : (x - 1) = x^2 + 3x + 6 + \frac{10}{x - 1} \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 3x^2 + 3x + 4 \\
 \underline{-(3x^2 - 3x)} \\
 6x + 4 \\
 \underline{-(6x - 6)} \\
 10
 \end{array}$$



## Partialbruchzerlegung

Nun wollen wir uns auf die Zerlegung des Restterms konzentrieren. Auf den ersten Blick mag die Mühe groß und das Ergebnis nicht wirklich einfacher erscheinen, aber dies wird uns später die Möglichkeit geben, beliebige rationale Funktionen zu integrieren.

Der Rest einer Polynomdivision ist eine rationale Funktion  $r(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ , deren Zählerpolynom  $p$  einen niedrigeren Grad aufweist als das Nennerpolynom  $q$ . Wir zerlegen  $q$  in seine Faktoren

$$q(x) = a \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{k_j} \prod_{j=m+1}^n (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j},$$

indem wir dessen Nullstellen bestimmen. Ziel der Partialbruchzerlegung ist es, den Restterm in eine Summe mehrerer Brüche zu zerlegen, deren Zähler und Nenner dafür möglichst geringe Grade haben. Wenige Kriterien, die wir bald

kennen lernen werden, geben uns die Möglichkeit, die Zerlegung zu „erraten“, wobei nur noch einige unbekannte Koeffizienten berechnet werden müssen. Wir zeigen dies zunächst an einigen einfachen Beispielen:

### Beispiel

- Für  $r(x) := \frac{x+3}{(x-2)^2}$  wählen (raten) wir den Ansatz  $r(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$ . Die beiden Darstellungen für  $r$  setzen wir gleich und machen einen so genannten Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-2)^2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} = \frac{A_1(x-2) + A_2}{(x-2)^2} \\ \Rightarrow x+3 &= A_1(x-2) + A_2 = A_1x + (A_2 - 2A_1) \\ \Rightarrow 1 &= A_1 \quad \text{und} \quad 3 = A_2 - 2A_1 \\ \Rightarrow A_1 &= 1 \quad \text{und} \quad A_2 = 5 \end{aligned}$$

Somit ist  $r(x) := \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$ .

Die Durchführung eines Koeffizientenvergleichs bedeutet also, dass die Koeffizienten verglichen werden, die vor  $x^0 (= 1)$ ,  $x^1$ ,  $x^2$ , ... auf der jeweiligen Seite vom Gleichheitszeichen stehen.

- Für  $r(x) := \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2}$  wählen wir den Ansatz  $r(x) = \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2}$ . Es folgt mit Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2} &= \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2} \\ &= \frac{(B_1x+C_1)(x^2+x+2) + B_2x+C_2}{(x^2+x+2)^2} \\ \Rightarrow x^2+3 &= (B_1x+C_1)(x^2+x+2) + B_2x+C_2 \\ &= B_1x^3 + (B_1+C_1)x^2 + (2B_1+C_1+B_2)x + (2C_1+C_2) \\ \Rightarrow 0 &= B_1, \quad 1 = B_1+C_1, \quad 0 = 2B_1+C_1+B_2 \quad \text{und} \quad 3 = 2C_1+C_2 \\ \Rightarrow B_1 &= 0, \quad C_1 = 1, \quad B_2 = -1 \quad \text{und} \quad C_2 = 1 \end{aligned}$$

Somit ist  $r(x) := \frac{x^2+3}{(x^2+x+2)^2} = \frac{1}{x^2+x+2} + \frac{-x+1}{(x^2+x+2)^2}$ .



Wir stellen also stets einen Ansatz in der Form, die wir uns als Ziel wünschen, auf. Für jeden Faktor  $(x-a)^k$  des Nennerpolynoms  $q$  enthält der Ansatz die Terme

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

und für jeden Faktor  $(x^2 + bx + c)^k$  des Nennerpolynoms  $q$  enthält der Ansatz die Terme

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_kx + C_k}{(x^2 + bx + c)^k}.$$

Nach dieser Vorschrift fügen wir für jeden Faktor von  $q$  dem Ansatz weitere Summanden hinzu. Aber Vorsicht: Die unterschiedlichen Summanden müssen auch unterschiedliche Unbekannte im Zähler enthalten. Dann bringen wir sämtliche Summanden des Ansatzes auf den gleichen Nenner, also auf  $q$ . Schließlich setzen wir den Restterm  $r$  und den Ansatz gleich und berechnen mittels Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome die Unbekannten.

Das war eventuell etwas schwer zu durchschauen, aber keine Sorge, die nächste Berechnung bringt es nochmals in praktischer Form auf den Punkt:

### Beispiel

Wir wollen den Prozess an einem etwas komplexeren Beispiel veranschaulichen, indem wir die rationale Funktion

$$f(x) := \frac{x^4}{(x^2 - 1)^2}$$

zerlegen. Da der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner als der des Nennerpolynoms ist (beide Grade sind 4), brauchen wir zunächst eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^4 \quad \quad \quad) : (x^4 - 2x^2 + 1) = 1 + \frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1} \\ \underline{-(x^4 - 2x^2 + 1)} \\ 2x^2 - 1 \end{array}$$

Nun zur Partialbruchzerlegung des Restterms  $r(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$ . Die Faktorisierung des Nenners sehen wir bereits teilweise in der Ausgangsfunktion:  $q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$ . Demnach wird der Ansatz für die Partialbruchzerlegung die Form

$$r(x) = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{B_1}{x - 1} + \frac{B_2}{(x - 1)^2}$$

haben. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 - 1}{(x+1)^2(x-1)^2} &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{A_1(x+1)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x+1)^2(x-1) + B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \\
 \Rightarrow 2x^2 - 1 &= A_1(x+1)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 \\
 &\quad + B_1(x+1)^2(x-1) + B_2(x+1)^2 \\
 &= A_1(x^3 - x^2 - x + 1) + A_2(x^2 - 2x + 1) \\
 &\quad + B_1(x^3 + x^2 - x - 1) + B_2(x^2 + 2x + 1) \\
 &= (A_1 + B_1)x^3 + (-A_1 + A_2 + B_1 + B_2)x^2 \\
 &\quad + (-A_1 - 2A_2 - B_1 + 2B_2)x + (A_1 + A_2 - B_1 + B_2) \\
 \Rightarrow 0 &= A_1 + B_1, \quad 2 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2, \\
 0 &= -A_1 - 2A_2 - B_1 + 2B_2 \quad \text{und} \quad -1 = A_1 + A_2 - B_1 + B_2 \\
 \Rightarrow A_1 &= -\frac{3}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{4}, \quad B_1 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

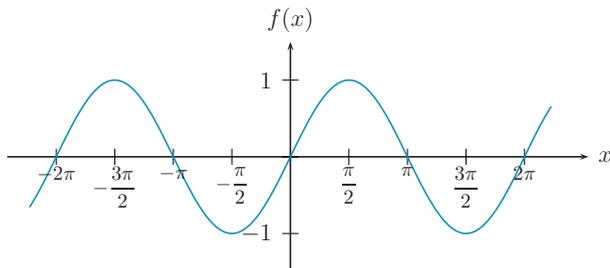
Somit ist

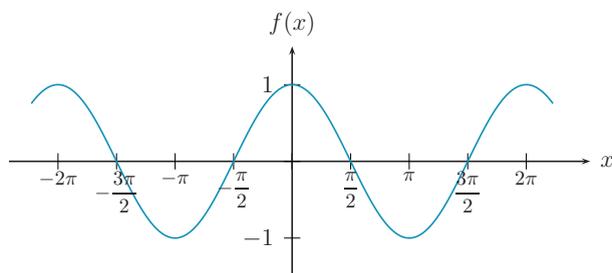
$$f(x) = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right).$$



### 5.3 Sinus, Kosinus und Tangens

Schwingungsprozesse tauchen besonders in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften sehr häufig auf. Grund genug, die sie beschreibenden Funktionen mit eigenen Namen — Sinus und Kosinus (sin und cos) — zu versehen und näher zu untersuchen. Die Funktionsgraphen sehen wir in den folgenden Bildern.





Oben der Sinus, unten der Kosinus

Weiterhin stellen wir fest, dass beide Funktionen durch Verschieben (um  $\frac{\pi}{2}$ ) ineinander übergehen,  $2\pi$ -periodisch sind und folgende Nullstellen haben:

- $\sin t = 0$  für  $t = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\cos t = 0$  für  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Manchmal schreiben wir auch  $\sin(t)$  bzw.  $\cos(t)$ , um das Argument  $t$  noch deutlicher zu machen, was aber zumeist nur sinnvoll ist, wenn das Argument etwas länger ist, z. B. bei  $\sin(4\pi t - 2)$ .

Es gilt die Gleichung

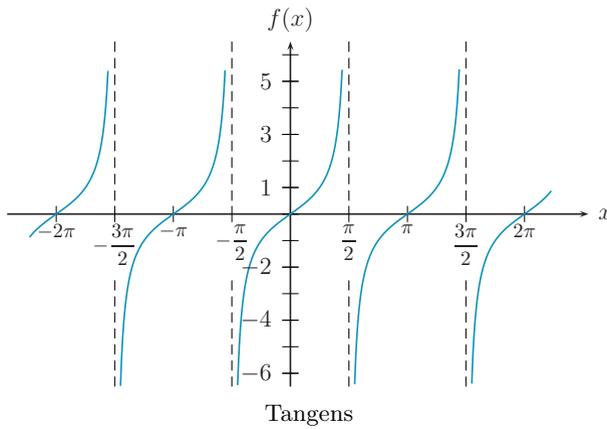
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 ,$$

die auch als *Eulergleichung* (nach Euler wurde vieles, teils nicht immer eindeutig, benannt) bekannt ist.

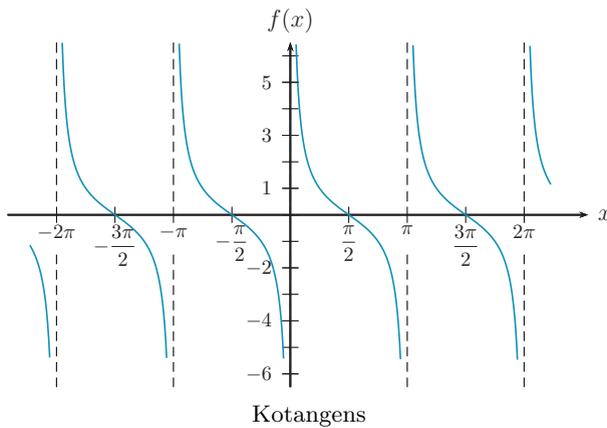
Aus den behandelten Funktionen können wir eine neue konstruieren, den Tangens:

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Dieser hat die gleichen Nullstellen wie der Sinus und sein „gestückeltes“ Bild ergibt sich daraus, dass der Kosinus natürlich die bereits erwähnten Nullstellen hat.



Ferner die Kehrwertfunktion des Tangens, der Kotangens  $\cot t := \frac{1}{\tan t}$ :



Für die hier eingeführten Funktionen gelten die so genannten Additionstheoreme, die oft nützlich sind.

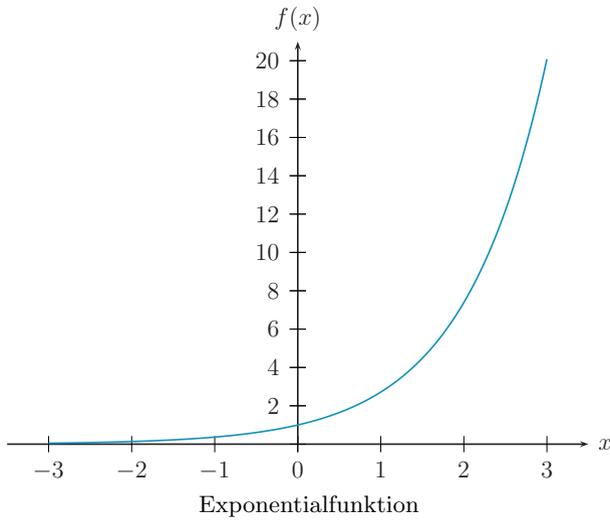
### 5.3.1 Einige Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} \\ \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)}\end{aligned}$$

Von diesen finden wir in diversen Formelsammlungen noch deutlich mehr. Aber bitte beachten Sie, dass sich viele dieser Gleichungen durch das herleiten lassen, was wir noch über die dortigen Darstellungen des Sinus und Kosinus lernen.

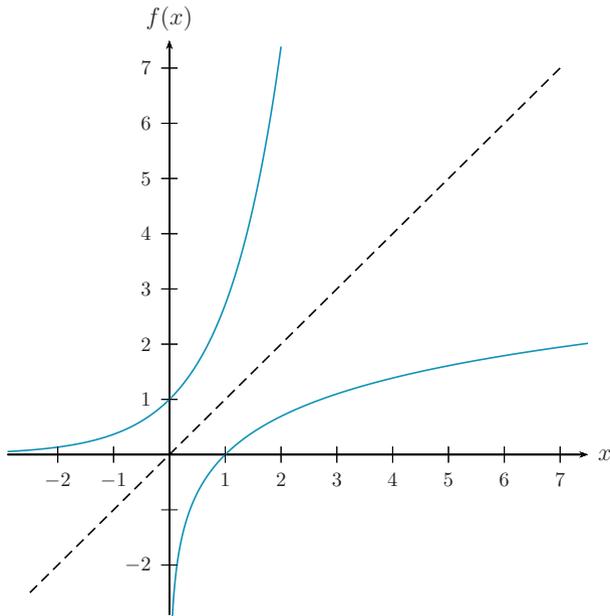
## 5.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Mit der *Exponentialfunktion* haben Sie bereits mehrfach im Mathematikunterricht gerechnet, und damit war dort  $e^x$  mit einem reellen Exponenten  $x$  gemeint und  $e = 2,71828\dots$  ist die Eulersche Zahl. Damit haben Sie nicht die ganze Wahrheit erfahren, wie wir später genauer sehen werden, denn es gibt noch Verborgenes, was von Bedeutung ist. So wird die allgemeine Potenz  $a^x$  für eine reelle Zahl  $a$  gerade über die Exponentialfunktion definiert, womit sich dann für  $a = e$  der Kreis unangenehm schließt, ohne dass wirklich etwas beantwortet wurde. Dafür ist aber hier nicht der richtige Ort, wir hatten ja einen Überblick angekündigt und keine tiefen Überlegungen. Daher pochen wir auf die Anwendung der intuitiven Verwendung der Dinge und begnügen uns mit der Erinnerung an  $e^x$  über den Funktionsgraphen.



Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $f(x) := e^x$  ist der so genannte *natürliche Logarithmus*  $f^{-1}(x) = \ln x$ , es gilt also

$$e^{\ln x} = x \quad \text{und} \quad \ln e^x = x .$$



Hier erkennen wir sehr gut, dass eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden zur Umkehrfunktion auf graphischem Wege führt.

Die allgemeine Potenz  $a^x$  mit  $a > 0$  wird über die Exponentialfunktion definiert:

$$a^x := e^{x \ln a} .$$

Die Umkehrfunktion von  $a^x$  ist der Logarithmus zur Basis  $a$  und wird mit  $\log_a x$  notiert.

Wie bereits angekündigt, ist die Definition der allgemeinen Potenz über die Exponentialfunktion nur sinnvoll, wenn wir die Exponentialfunktion nicht wieder als Spezialfall der allgemeinen Potenz definieren, sondern irgendwo anders herkommen. Eine Möglichkeit werden wir im Kapitel über Potenzreihen kennen lernen.

### 5.4.1 Potenz- und Logarithmusgesetze

In Ihrem bisherigen Leben haben Sie bereits oft damit arbeiten müssen, aber es schadet zur Abrundung dieses Kapitels nicht, einige übliche Regeln in kompakter Form zu listen. Für natürliche Exponenten und beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  kennen wir:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} .$$

Seien  $a, b > 0$  und  $r, s \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \quad (\text{speziell auch } 0^0 = 1), \\ a^{-s} &= \frac{1}{a^s} , \\ a^{r+s} &= a^r a^s , \\ a^{r-s} &= \frac{a^r}{a^s} , \\ (a^r)^s &= a^{rs} , \\ (ab)^r &= a^r b^r , \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} . \end{aligned}$$

Seien  $a, x, y > 0$ :

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y , \\ \log_a x^y &= y \log_a x , \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y . \end{aligned}$$

Diese Rechenregeln gelten speziell für die Exponentialfunktion bzw. den natürlichen Logarithmus.

## 5.5 Weitere wichtige Funktionen

Über die Exponentialfunktion lassen sich durch Umstellen der Eulerformel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  Sinus und Kosinus konstruieren:

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) .$$

Das ist sehr nützlich, denn rechnen wir mit den komplexen Exponenten  $ix$  wie gewohnt, dann ergeben sich z. B. die Additionstheoreme sehr leicht.

### Beispiel

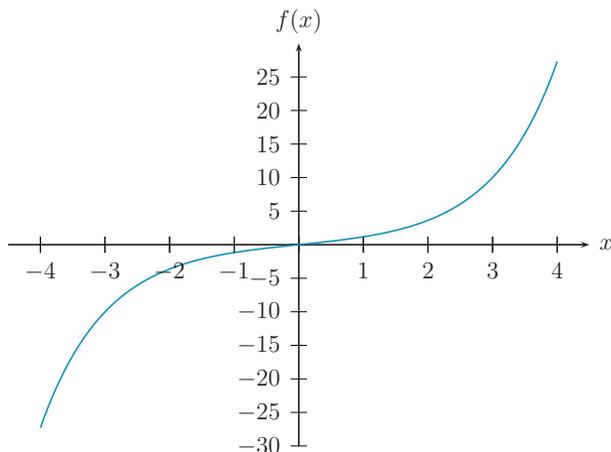
Wir zeigen  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$  unter Verwendung bekannter Potenzregeln, dabei nennen wir die rechte Seite  $R$ , die linke  $L$ :

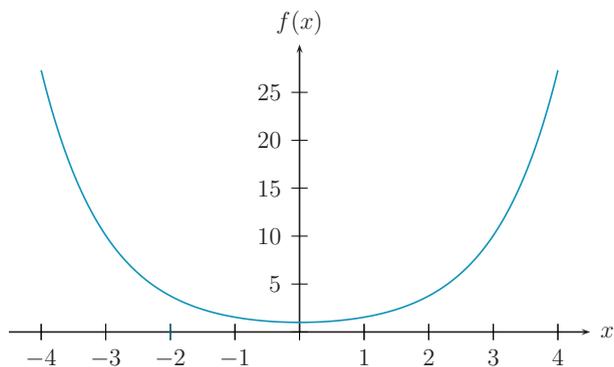
$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{4} (e^{ix} - e^{-ix}) (e^{iy} - e^{-iy}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}) \\ &\quad + \frac{1}{4} (e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) \\ &= L \end{aligned}$$



Ähnlich definieren wir die Funktionen *Sinus Hyperbolicus*  $\sinh$  und *Kosinus Hyperbolicus*  $\cosh$  über

$$\sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) .$$





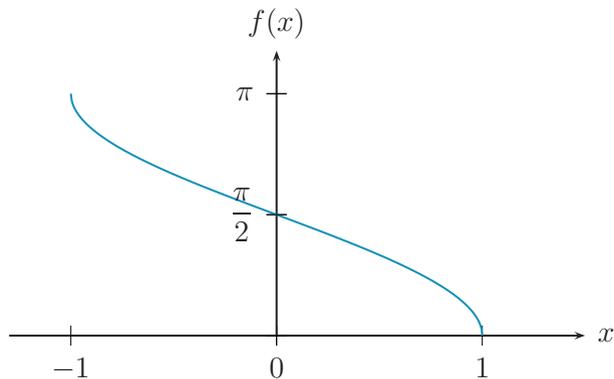
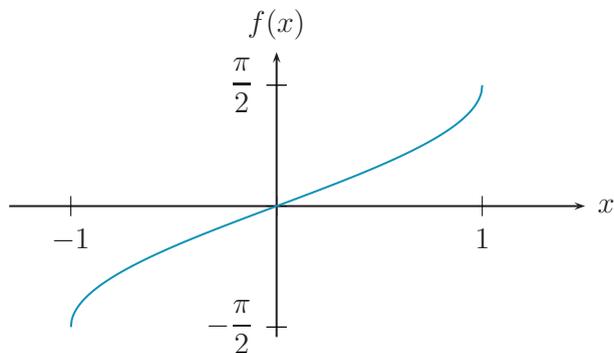
Oben der Sinushyperbolicus, unten der Kosinushyperbolicus

Durch Umformen erhalten wir ein Analogon zur Eulerformel:

$$e^x = \cosh x + \sinh x .$$

Für die Umkehrfunktionen Arcussinus und Arcuskosinus haben wir:

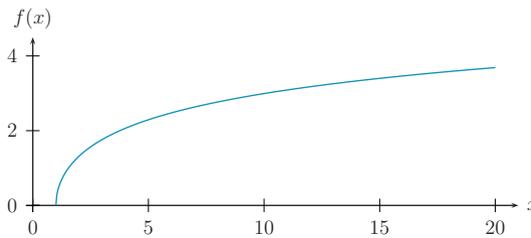
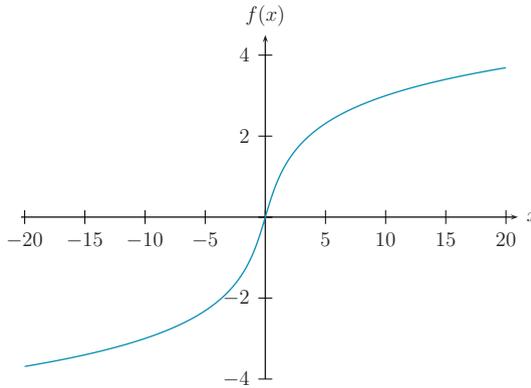
$$\arcsin := \sin^{-1} \quad \text{und} \quad \arccos := \cos^{-1}$$



Oben der Arcussinus, unten der Arcuskosinus

bzw. Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus:

$$\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1} \quad \text{und} \quad \operatorname{arcosh} := \cosh^{-1}.$$



Oben der Areasinus Hyperbolicus, unten der Areakosinus Hyperbolicus

## 5.6 Aufgaben

1. Berechnen Sie alle (reellen und komplexen) Nullstellen von

$$P(x) := x^3 - (1 + 2i)x^2 - (1 - 2i)x + 1.$$

2. Zerlegen Sie folgendes Polynom in seine Linearfaktoren:

$$P(x) := x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x.$$

*Hinweis:* Das Polynom hat eine Nullstelle bei  $x_0 = i$ .

3. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung des folgenden Bruches durch:

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 11x - 4}{x^2 - x - 6}.$$



Damit sind  $1$ ,  $i$  und nochmals  $i$  die Nullstellen von  $P$ . Das Polynom können wir somit folgendermaßen zerlegen:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 2ix - 1) = (x - 1)(x - i)(x - i) .$$

2.

$$P(x) := x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x .$$

Von der Vorgehensweise her ist es egal, ob wir die Nullstellen oder die Linearfaktoren eines Polynoms bestimmen, denn jede Nullstelle  $\lambda$  entspricht im Komplexen einem Linearfaktor  $(x - \lambda)$ . Der Hinweis, dass  $i$  eine Nullstelle ist, gibt uns also schon den ersten der fünf Linearfaktoren:  $(x - i)$ . Weiterhin hat das Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten, sodass mit  $i$  auch  $\bar{i} = -i$  Nullstelle und somit  $(x + i)$  Linearfaktor ist. Ein Blick auf das Polynom liefert uns als dritten Linearfaktor  $x$ , denn  $x$  kann einfach ausgeklammert werden:

$$P(x) := x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) .$$

Teilen wir den letzten Faktor durch  $(x - i)$  und  $(x + i)$ , bleibt noch ein quadratisches Polynom, welches wir mit Hilfe der  $p$ - $q$ -Formel zerlegen können. Doch anstatt die beiden Polynomdivisionen hintereinander durchzuführen, ist es einfacher, gleich durch  $(x - i)(x + i) = (x^2 + 1)$  zu teilen:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 + 1) = x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-(x^4 \phantom{- 3x^3} + x^2)} \\ \phantom{(x^4 - } -3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-(-3x^3 \phantom{+ 2x^2} - 3x)} \\ \phantom{(x^4 - } \phantom{-3x^3 + } 2x^2 \phantom{- 3x} + 2 \\ \underline{-(2x^2 \phantom{+ 2})} \\ \phantom{(x^4 - } \phantom{-3x^3 + } \phantom{2x^2 - } 0 \end{array}$$

Schließlich sind die beiden restlichen Nullstellen  $1$  und  $2$ :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad p=-3, q=2 \quad x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} ,$$

sodass die Zerlegung von  $P$  in Linearfaktoren so aussieht:

$$P(x) := x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - i)(x + i)(x - 1)(x - 2) .$$

Wäre die Aufgabe gewesen  $P$  im Reellen so weit wie möglich zu zerlegen, müssten wir nur noch die komplexen Linearfaktoren  $(x - i)$  und  $(x + i)$  miteinander multiplizieren:

$$P(x) := x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 + 1)(x - 1)(x - 2) .$$

3. Bei diesem Bruch müssen wir zunächst eine Polynomdivision durchführen, da das Zählerpolynom einen höheren Grad hat als das Nennerpolynom:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 3x^3 - x^2 + 11x - 4) : (x^2 - x - 6) = x^2 - 2x + 3 + \frac{2x + 14}{x^2 - x - 6} \\
 \underline{-(x^4 - x^3 - 6x^2)} \\
 -2x^3 + 5x^2 + 11x - 4 \\
 \underline{-(-2x^3 + 2x^2 + 12x)} \\
 3x^2 - x - 4 \\
 \underline{-(3x^2 - 3x - 18)} \\
 2x + 14
 \end{array}$$

Das Nennerpolynom faktorisieren wir zu

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) .$$

Den Restterm zerlegen wir mit dem Ansatz

$$\frac{2x + 14}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$$

und rechnen weiter

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)} + \frac{B(x + 2)}{(x - 3)(x + 2)} \\
 &= \frac{Ax - 3A + Bx + 2B}{x^2 - x - 6} \\
 &= \frac{(A + B)x + (2B - 3A)}{x^2 - x - 6}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
 A + B &= 2 , & 2B - 3A &= 14 \\
 \Rightarrow A &= -2 , & B &= 4
 \end{aligned}$$

womit wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x + 14}{x^2 - x - 6} = -\frac{2}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$$

erhalten und die Zerlegung der anfänglichen rationalen Funktion lautet

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 11x - 4}{x^2 - x - 6} = x^2 - 2x + 3 + \frac{4}{x - 3} - \frac{2}{x + 2} .$$

4. Wir bedienen uns hierzu der Logarithmusregel  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ . Dazu fassen wir das Argument des Logarithmus zu einem Bruch zusammen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{k+1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \end{aligned}$$

Ausgeschrieben sieht diese Summe so aus:

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n)$$

und es fällt auf, dass sich jeweils der erste Term eines Summanden mit dem zweiten Term des nachfolgenden Summanden aufhebt. Es handelt sich also um eine *Teleskopsumme*. Von der gesamten Summe bleiben also nur  $-\ln 1$  des ersten Summanden sowie  $\ln(n+1)$  des letzten Summanden übrig, wobei der erstgenannte sogar 0 ist. Somit ist

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(n+1).$$

5. Wir setzen die Formeln

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

links und rechts in die Additionstheoreme ein:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2i} (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \\ \Leftrightarrow e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} &= \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} - e^{i(-x-y)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} - e^{i(-x-y)}) \\ \Leftrightarrow e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} &= \frac{1}{2} (2e^{i(x+y)} - 2e^{i(-x-y)}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \\ &\quad - \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \\ \Leftrightarrow e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} &= \frac{1}{2} \left( e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} + e^{i(-x-y)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2i^2} \left( e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} + e^{i(-x-y)} \right) \\ \Leftrightarrow e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} &= \frac{1}{2} \left( 2e^{i(x+y)} + 2e^{i(-x-y)} \right)\end{aligned}$$

### Fragen

- Was ist ein Polynom?
- Lässt sich jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen?
- Was lässt sich allgemein über den Definitionsbereich rationaler Funktionen sagen?
- Erklären Sie an einem Beispiel Polynomdivision und Partialbruchzerlegung.
- Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens. Fertigen Sie Skizzen an und benennen Sie die Nullstellen.
- Woraus lassen sich die Additionstheoreme zumeist einfach herleiten?
- Wie lautet der Zusammenhang zwischen Logarithmus und Exponentialfunktion?
- Kennen Sie weitere wichtige Funktionen?



# 6 Folgen

## 6.1 Motivation

Welche Zahl kommt nach 1, 2, 4, 8, 16, 32? Wer kennt nicht die Zahlenspiele, bei denen eine Zahlenfolge (hier vorerst naiv betrachtet), von der nur die ersten paar Glieder gegeben sind, nach einem bestimmten Rechenschema weitergeführt werden soll?

In der Mathematik setzen wir nicht zwingend eine kluge Formel voraus, aus der die einzelnen Folgenglieder berechnet werden. Es sind auch völlig beliebige Folgen erlaubt, weshalb das nächste Folgenglied unseres Beispiels auch 42, anstatt der zu vermutenden 64, lauten kann. Andererseits müssen wir im weiteren Verlauf Folgen mathematisch korrekt aufschreiben, mit ihnen rechnen und ihre Eigenschaften bestimmen, weshalb wir es hauptsächlich mit expliziten Berechnungsvorschriften zu tun haben werden.

Aber wofür werden diese Folgen verwendet? Wir werden Folgen wesentlich dafür verwenden, um uns über die Begriffe Konvergenz und Divergenz zu kümmern und Konsequenzen daraus abzuleiten. Wächst also z. B. eine Folge gegen einen Wert, der nicht überschritten wird? Kommt Sie einem Wert beliebig nahe? Ist sie eventuell immer gleich einem festen Wert? Was heißt es eigentlich, dass eine Folge von Zahlen einem Wert beliebig nahe kommt? Später werden unsere Ergebnisse Hilfsmittel sein, um sich gewissermaßen mit Folgen an bestimmte Werte „anzuschleichen“. Folgen werden wir als Grundlage erkennen, die wir z. B. für Begriffe wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit benötigen.

## 6.2 Grundlagen

### **Definition** (Folge)

Eine reelle bzw. komplexe Folge  $(x_n)$  ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .

Jedem Index  $n \in \mathbb{N}$  wird dabei eine reelle bzw. komplexe Zahl  $x_n$  zugeordnet. 

Hier klingt es eventuell überraschend, dass eine Folge eine Abbildung sein soll, wo wir doch eigentlich vermutet haben, dass die einzelnen Glieder einer Folge wirklich in der in der Motivation gegebenen Form aufgelistet werden können; jedenfalls endlich viele der Folgenglieder. Wir schreiben eine Folge aber auch nicht in der für Funktionen typischen Schreibweise  $f(n) := 1 - \frac{1}{n}$  auf, sondern in der Form  $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ . Der Zahl  $n = 1$  wird hier  $x_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$  zugeordnet, der Zahl 2 der Wert  $x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  usw. Das ergibt dann in einer Auflistung wie oben gerade  $0, \frac{1}{2}, \dots$

Wir müssen noch beachten, dass die Folge an sich in Klammern geschrieben wird, also wie in der Definition, beispielsweise  $(1 - \frac{1}{n})$ . Schreiben wir diese ohne Klammern, meinen wir gewöhnlich die einzelnen Folgenglieder, also die  $x_n$  selbst, wie gerade verwendet. Einige Autoren schreiben statt  $(x_n)$  auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Das ist sehr korrekt, aber für den Alltag auch etwas lang. Ohne den Zusatz müssen wir allerdings beachten, dass für  $n = 0$  in unserer Folge  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  das Folgenglied  $x_0$  gar nicht definiert ist! In solchen Fällen dürfen wir die Folge auch später, etwa bei  $n = 1$  beginnen lassen, ohne dies explizit zu erwähnen. Dabei ist es unserer Wahl überlassen, ob wir als Index  $n, k$  oder z. B. auch  $i$  verwenden (also  $(x_n), (x_k), \dots$ ).

Es gibt auch so genannte *Teilfolgen*. So lassen sich aus der Folge  $(x_n)$  mit  $x_n := \frac{1}{n}$  beispielsweise die Folgenglieder mit geradem Index aussortieren, was dann durch  $x_{2n} = \frac{1}{2n}$  geschieht.

Wenn wir offen lassen wollen, ob die Folgenglieder in  $\mathbb{R}$  oder in  $\mathbb{C}$  liegen, schreiben wir abkürzend  $\mathbb{K}$  anstelle der beiden Mengen.

## 6.3 Konvergenz und Divergenz

### Definition (Konvergenz, Grenzwert, Nullfolge)

Eine Folge  $(x_n)$  heißt konvergent gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{K}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle Indizes  $n \geq N$  die Ungleichung  $|x_n - a| < \varepsilon$  gilt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(gelesen: „Limes von  $x_n$  für  $n$  gegen unendlich.“) oder auch

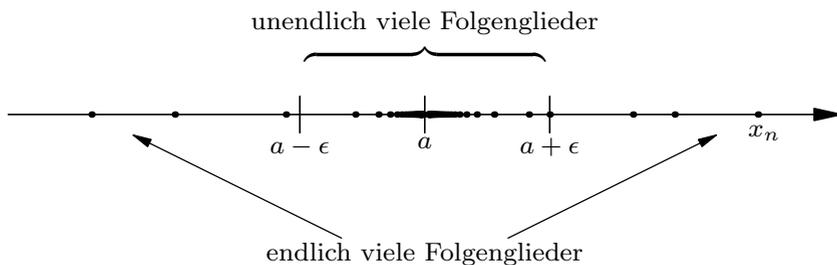
$$x_n \rightarrow a .$$

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge. 

Die Ungleichung  $|x_n - a| < \varepsilon$  können wir im Reellen, also für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , auch umformulieren zu

$$x_n \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ ,$$

denn der Betrag gibt ja den Abstand zwischen  $x_n$  und  $a$  an. Eine Folge ist demnach konvergent gegen  $a$ , wenn sich in jedem noch so kleinen Intervall um  $a$  fast alle Folgenglieder befinden. Die Phrase „fast alle“ wollen wir im Folgenden immer wieder gebrauchen und meinen stets das Gleiche wie in der Definition, nämlich dass es anfangs durchaus Ausreißer geben kann, später — mit Index oberhalb eines  $N \in \mathbb{N}$  — aber nicht mehr. Dies ist natürlich nur für unendlich viele Teilnehmer (die  $x_n$ ) sinnvoll. Man sagt dafür auch, dass sich in jeder noch so kleinen Umgebung von  $a$  alle bis auf endlich viele Folgenglieder befinden. Die Bedeutung dieser Beschreibung ist in der folgenden Skizze gut zu erkennen:



Wir müssen uns darüber im Klaren sein, dass diese Definition sowohl für reelle, als auch für komplexe Folgen berechtigt ist. Bei der Untersuchung auf einen Grenzwert kommt nämlich der Betrag vor, es kommt also nicht zu sonderbaren Dingen wie einem komplexwertigen Epsilon. Alles wird durch den Betrag am Ende wieder auf reelle Zahlen reduziert und die Berechnungen und Überlegungen zu Grenzwerten bleiben gleich. Wie würde die Skizze im Komplexen aussehen?

Es folgen einige nützliche Bemerkungen, die wir uns merken müssen.

- Den Begriff der Umgebung fasst der Mathematiker häufig noch genauer und spricht dann bei  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  von einer  $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes  $a$ . Dabei ist stets  $\varepsilon > 0$ .
- Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig.

Es erscheint sinnvoll, neben dem Begriff der Konvergenz einen weiteren anzugeben, nämlich den des *Häufungspunktes*. Betrachten wir hierzu die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n := (-1)^n$ , welche zwischen den Werten  $-1$  und  $+1$  hin und her springt. Sie nimmt die beiden Werte „gehäuft“, also unendlich oft, an, was uns zur Motivation des Begriffs dienen soll. Allerdings handelt es sich bei keinem

der beiden Werte um einen Grenzwert, sondern eben nur um Häufungspunkte: Ein Häufungspunkt  $a$  einer Folge  $(x_n)$  liegt vor, wenn in jeder Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder liegen. Das ist äquivalent dazu, dass  $a$  der Grenzwert einer Teilfolge  $(x_{n_k})$  ist. Bitte überlegen Sie genau, was der Unterschied zu einem Grenzwert ist. Davon gibt es nämlich genau einen! Bei Häufungspunkten muss das nicht so sein. Das fällt aber nur auf, wenn man die Definitionen unter der Lupe des Verstandes fixiert betrachtet und wirklich alle Worte auf die Goldwaage legt. So ist das in der Mathematik.

Bei der Folge  $x_n := (-1)^n$  hatten wir gesehen, dass diese zwei Häufungspunkte hat:  $-1$  und  $+1$ . Den größten und kleinsten Häufungspunkt einer Folge manifestieren wir ab jetzt durch den *Limes superior* ( $\overline{\lim}$ ) und den *Limes inferior* ( $\underline{\lim}$ ). Also:

$$\overline{\lim}((-1)^n) = +1 \quad \text{und} \quad \underline{\lim}((-1)^n) = -1 .$$

### Beispiel

Standardbeispiel:  $x_n := \frac{1}{n}$  ist eine Nullfolge. Es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Zum Beweis sei ein beliebig kleines  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir wählen für  $N \in \mathbb{N}$  aus der Definition eine natürliche Zahl größer als  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Dann gilt für alle  $n \geq N$

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

Somit ist 0 der Grenzwert von  $\frac{1}{n}$ .

Das  $N$  können wir auch direkt berechnen:

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

woraus folgt

$$n > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Nun müssen wir  $N$  nur noch dazwischen setzen:  $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Ein weiteres Beispiel bietet die Folge  $x_n := \sqrt[n]{a}$  mit einem festen  $a > 1$ . Wir wollen zeigen, dass diese Folge, unabhängig von  $a$ , den Grenzwert 1 hat. Sei dazu wiederum ein beliebig kleines  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir suchen ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle Indizes  $n \geq N$  die Ungleichung

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

gilt. Die Betragstriche konnten wir weglassen, weil für  $a > 1$  auch die Wurzel  $\sqrt[n]{a} > 1$  ist. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir  $y_n := \sqrt[n]{a} - 1$  und formen um:

$$\begin{aligned} y_n &= \sqrt[n]{a} - 1 \\ \Rightarrow \sqrt[n]{a} &= 1 + y_n \\ \Rightarrow a &= (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \binom{n}{2}y_n^2 + \dots + y_n^n \geq ny_n \\ \Rightarrow y_n &\leq \frac{a}{n} \\ \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 &\leq \frac{a}{n} \end{aligned}$$

Somit können wir  $\frac{a}{N} < \varepsilon$ , also  $N > \frac{a}{\varepsilon}$  wählen und für alle  $n \geq N$  folgt

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a}{n} \leq \frac{a}{N} < \varepsilon .$$



Natürlich sind nicht alle Folgen konvergent. Beispielsweise wächst die Folge  $x_n := n$  immer weiter an, sodass es keinen Grenzwert geben kann, in dessen Umgebung sich fast alle Folgenglieder versammeln. Nicht konvergente Folgen heißen auch *divergent*.

### Beispiel

Die Folge  $x_n := (-1)^n$  ist divergent. Die Folgenglieder springen zwischen  $-1$  und  $+1$  hin und her (andere Werte werden gar nicht angenommen), sodass es zwar in jeder noch so kleinen Umgebung von  $+1$  unendlich viele Folgenglieder (alle mit geradem  $n$ ) gibt, aber außerhalb kann es immer noch unendlich viele Folgenglieder (die bei  $-1$ ) geben, sodass die Definition der Konvergenz nicht erfüllt ist.



Unter den divergenten Folgen gibt es solche wie die durch  $x_n := n^2$  definierte, welche betragslich über jede noch so hohe Grenze wachsen. Dann wird gerne die Notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty \quad \text{oder} \quad |x_n| \rightarrow \infty$$

verwendet, bei reellen Folgen ggf. auch ohne Betrag und mit Vorzeichen vor dem  $\infty$ :  $x_n := -n \rightarrow -\infty$ . Wir müssen noch bemerken, dass es in der Benennung von Divergenz Unterschiede gibt. So spricht man bei der Folge im obigen Beispiel,  $x_n := (-1)^n$ , von Divergenz, bezeichnet aber im Falle des Strebens einer Folge gegen  $\pm\infty$  von *bestimmter Divergenz* oder auch *uneigentlicher Konvergenz*. Mathematiker bringen dadurch zum Ausdruck, dass die Folge zwar keinesfalls konvergiert, ihr Verhalten dem der Konvergenz aber

doch sehr ähnlich ist. Das klingt erstmal befremdlich, aber tatsächlich macht es einen Unterschied, ob eine Folge z. B. im Wechsel zwei verschiedene Werte annimmt oder aber über alle Grenzen wächst.

## 6.4 Rechenregeln für Folgen

Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  konvergente Folgen mit den Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  und sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) &= ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n &= ca \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \frac{a}{b}, \quad \text{falls } b \neq 0\end{aligned}$$

Weiterhin ist  $a \leq b$ , falls für fast alle Folgenglieder ebenfalls  $x_n \leq y_n$  gilt. Diese Aussage gilt jedoch nicht ohne Weiteres mit  $<$  anstelle von  $\leq$ . So ist  $-\frac{1}{n} < +\frac{1}{n}$ , die Grenzwerte beider Folgen sind jedoch identisch.

Auch hier ist die Gültigkeit gleichfalls wieder für komplexe Folgen gegeben.

Mit Hilfe dieser Rechenregeln können wir auch Grenzwerte komplizierter Folgen bestimmen, indem wir die Folgen aus einfachen zusammensetzen. Die Folge

$$\left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

beispielsweise können wir uns aus der konstanten Folge (1) und der Nullfolge  $(\frac{1}{n})$  zusammensetzen. Deren Grenzwerte kennen wir (1 und 0) und somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Bei der Folge

$$\left( \frac{n}{n+1} \right)$$

müssen wir schon etwas vorsichtiger sein, denn  $(n)$  ist keine konvergente Folge. Wir behelfen uns, indem wir  $n$  im Bruch kürzen:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

und schon haben wir die gleiche Folge, deren Grenzwert wir bereits berechnet haben. Dieser Trick hilft uns auch bei komplizierteren Brüchen:

### Beispiel

- Wir wollen den Grenzwert der Folge  $\left(\frac{3n^2+13n}{n^2-1}\right)$  bestimmen und kürzen  $n$  im höchsten auftretenden Exponenten:

$$\frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 1} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{13}{n}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3 + 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3.$$

- Natürlich lassen sich auch komplexe Folgen betrachten. Man beachte dabei, dass bei der Untersuchung dort die imaginäre Einheit  $i$  einfach als eine Konstante zu betrachten ist. Solche haben bei der Untersuchung von Folgen im Reellen keine Probleme gemacht, also macht die imaginäre Einheit auch hier keine Schwierigkeiten. Wir betrachten zur Übung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 7in |\sin(5n^{14})|}{3n^4} \right)$$

Hier könnte eine erste Vermutung sein, dass der Term mit dem Sinus dafür sorgt, dass der Zähler viel schneller wächst (aufgrund von  $n^{14}$ ) und die Folge daher divergiert. Aber Achtung, der Sinus nimmt stets nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  an, der Betrag garantiert dann also für den genannten Term, dass nur Werte zwischen  $0$  und  $+1$  angenommen werden. Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 7in |\sin(5n^{14})|}{3n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{7i |\sin(5n^{14})|}{n^3}}{3} \right) = 0$$



## 6.5 Das Monotoniekriterium

### Definition (beschränkt)

Eine reelle Folge  $(x_n)$  heißt beschränkt, wenn es  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt, sodass stets

$$a \leq x_n \leq b$$

gilt, was äquivalent dazu ist, dass ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert, für das gilt

$$|x_n| \leq c.$$



Konvergente Folgen sind immer beschränkt, das Gegenteil gilt jedoch nicht. So ist  $x_n := (-1)^n$  sicher beschränkt, aber wie bereits im Beispiel gesehen, divergent.

**Definition** ((streng) monoton wachsend / fallend)

Eine Folge  $(x_n)$  heißt monoton wachsend, wenn für alle ihre Folgenglieder  $x_n \leq x_{n+1}$  gilt. Sie heißt monoton fallend, wenn für alle Folgenglieder  $x_n \geq x_{n+1}$  gilt. Ist Gleichheit ausgeschlossen, so sprechen wir von streng monoton wachsenden bzw. fallenden Folgen. ◀

Beispielsweise ist die Folge  $((-1)^n)$  beschränkt, aber nicht monoton. Die Folge  $(n)$  hingegen ist streng monoton wachsend, aber unbeschränkt.  $(\frac{1}{n})$  ist sowohl beschränkt, als auch streng monoton fallend.

Wichtig für Konvergenzuntersuchungen ist der folgende Satz, dessen Gültigkeit intuitiv zu erfassen ist.

**Satz**

Jede beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge reeller Zahlen ist konvergent. ■

**Beispiel**

Nach dem letzten Satz ist die Folge  $(e^{-n})$  konvergent. Denn einerseits ist die Funktion  $e^x$  streng monoton wachsend, also unsere Folge streng monoton fallend; weiterhin ist die Folge nach oben durch  $e^0 = 1$  und nach unten durch 0 beschränkt. ◆

## 6.6 Was noch über Folgen bekannt sein sollte

Für reelle Folgen lassen sich einige Regeln formulieren, die bei der Untersuchung auf Konvergenz manchmal nützlich sind. (Die Aussagen sind auch mit  $-\infty$  anstelle des  $\infty$  wahr).

- $(x_n)$  beschränkt und  $(y_n)$  beschränkt, dann ist  $(x_n + y_n)$  beschränkt
- $(x_n)$  beschränkt und  $(y_n) \rightarrow \infty$ , dann  $(x_n + y_n) \rightarrow \infty$
- $(x_n) \rightarrow \infty$  und  $(y_n) \rightarrow \infty$ , dann  $(x_n + y_n) \rightarrow \infty$
- $(x_n)$  konvergent und  $(y_n)$  beschränkt, dann ist  $(x_n y_n)$  beschränkt
- $(x_n)$  Nullfolge und  $(y_n)$  beschränkt, dann ist  $(x_n y_n)$  Nullfolge

Was passiert im Komplexen? Hier ist die Lage nicht vergleichbar, denn die Beschränktheit setzt voraus, dass man auch bei zwei komplexen Zahlen unterscheiden kann, welche die größere ist; das ist aber nicht der Fall.

Für einige Überlegungen ist es sinnvoll zu wissen, dass  $\ln n$  langsamer gegen  $\infty$  geht als  $n^a$  für positives  $a$ , dies wiederum langsamer als  $b^n$  für  $b > 1$ , dies allerdings langsamer als  $n!$  und dies wird noch von  $n^n$  übertroffen. Diese Reihenfolge der Konvergenzgeschwindigkeit bedeutet, dass wir beim Teilen einer langsamer gegen  $\infty$  gehenden Folge durch eine in diesem Vergleich schneller gegen  $\infty$  gehende Folge den Grenzwert Null bekommen. Dies ist nicht damit zu verwechseln, dass  $2n+10$  stets größer ist als z. B.  $n$ , und dennoch geht  $\frac{n}{2n+10}$  gegen  $\frac{1}{2}$ .

Diverse Grenzwerte von Folgen sind bekannt und sollten beherrscht werden. Die Beweise sind teils nicht in einer Zeile erledigt, was jedoch die Bedeutung keinesfalls schmälert. Hier also einige Grenzwerte, an die wir uns erinnern sollten:

- Für  $|b| < 1$  gilt  $b^n \rightarrow 0$
- $(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$
- Für positives  $a$  gilt  $a^{1/n} \rightarrow 1$  und  $n^{1/n} \rightarrow 1$

Jedoch gilt  $(n!)^{1/n} \rightarrow \infty$ .

## 6.7 Das Häufungspunktprinzip und mehr

Eng mit diesem Kapitel verbunden ist das so genannte *Häufungspunktprinzip*, das Folgendes besagt:

### Satz

Haben wir im Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  eine Folge  $(x_n)$  gegeben, d. h.  $x_n \in [a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann existiert in diesem Intervall wenigstens ein Häufungspunkt  $\xi \in [a, b]$  von  $(x_n)$ . ■

Wir betrachten für die Erklärung eine Folge im Intervall  $[0,1]$  (alle anderen Intervalle sind auch möglich, aber bereits an diesem einfachen Intervall ist das Verfahren in voller Schönheit zu erkennen). Wir teilen nun dieses Intervall in zehn Teilintervalle gleicher Länge, die dann mit 0,0 bis 0,9 beginnen. In jedem der so entstandenen Intervalle liegen entweder unendlich viele Glieder der betrachteten Folge oder nur endlich viele. Wählen wir nun ein Intervall aus, das unendlich viele Folgenglieder enthält, dann beginnt dieses mit einer der Zahlen in der obigen Aufzählung, also z. B. der Zahl

$$0, a_1.$$

Dieses Prozedere können wir stets wieder fortführen und erhalten eine weitere Dezimalstelle eines Punktes (Dezimalstelle, da wir ja von  $[0,1]$  ausgingen und bei jedem Schritt wieder eine Unterteilung in zehn Teile vornahmen), also insgesamt ein

$$\xi := 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Dieses  $\xi$  ist dann natürlich ein Häufungspunkt, denn in jeder noch so kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung liegen nach Konstruktion unendlich viele Punkte der Folge.

Zugegeben, das müssen wir auf uns wirken lassen. Und eventuell sollten Sie sich ein Bild dazu anfertigen. Aber in diesem hier vorgestellten Prinzip liegen ungeahnte Möglichkeiten, die uns später noch sehr nützlich sein werden.

## 6.8 Aufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition für Konvergenz, dass die Folge

$$\left( \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right)$$

eine Nullfolge ist.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a}$$

für beliebige Werte  $a \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < 1$  gegen den Grenzwert 1 konvergiert. *Hinweis:* Für  $a > 1$  haben wir den gleichen Grenzwert bereits in einem Beispiel erhalten. Für  $a = 1$  ist die Folge  $\sqrt[k]{a}$  konstant 1, hat also ebenfalls diesen Grenzwert. Nach dieser Aufgabe wissen wir, dass der Grenzwert 1 für alle  $a > 0$  ist.

3. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Grenzwerte folgender Folgen:

$$\left( \frac{k^2 - k}{2k^2 + 3} \right), \quad \left( \frac{(k+1)(2k-3)(k+2)}{k^3} \right), \quad \left( \frac{3+2k}{k^2} \right), \quad \left( \frac{k^2 - 1}{k+3} \right).$$

4. Welche der folgenden Folgen sind beschränkt, monoton wachsend bzw. monoton fallend?

$$(\sin k), \quad (e^{-k}), \quad \left( 1 - \frac{1}{k} \right), \quad (k^2 - k).$$

Was ergibt jeweils das Monotoniekriterium?

5. Beschreiben Sie den Verlauf der komplexen Folge  $\left( \frac{1}{k} e^{ik} \right)$ . Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge? Begründen Sie Ihre Wahl.
6. Welches sind die Häufungspunkte der Folge  $\left( \sin \frac{k\pi}{2} \right)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 6.9 Lösungen

1. Der Grenzwert von Nullfolgen ist 0. Demnach müssen wir zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  finden, sodass für alle  $k > N$  die Abschätzung

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 0 \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$$

gilt. Um  $N$  zu finden, formen wir diese Ungleichung nach  $k$  um:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^k &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow 2^{-k} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \log_2 2^{-k} &< \log_2 \varepsilon \\ \Leftrightarrow -k &< \log_2 \varepsilon \\ \Leftrightarrow k &> -\log_2 \varepsilon . \end{aligned}$$

Dabei konnten wir  $\log_2$  auf beiden Seiten einsetzen, ohne das Ungleichungszeichen zu verändern, weil die Logarithmusfunktionen streng monoton wachsend sind. Die rechte Seite der letzten Ungleichung runden wir auf (bezeichnet durch  $\lceil \dots \rceil$ ) und erhalten so  $N$ . Falls  $N$  damit negativ wäre (also für  $\varepsilon > 1$ ), so setzen wir es einfach auf 0, denn es soll ja eine natürliche Zahl sein:

$$N := \begin{cases} \lceil -\log_2 \varepsilon \rceil & , \varepsilon < 1 \\ 0 & , \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

Für  $k > N$  folgt im ersten Fall

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 \varepsilon} = 2^{\log_2 \varepsilon} = \varepsilon .$$

Der zweite Fall, also  $\varepsilon \geq 1$ , ist nicht weiter interessant, da für alle  $k > 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 1$$

ist.

2. Wir führen den Fall  $0 < a < 1$  auf den schon bekannten Fall  $a > 1$  zurück, indem wir den Kehrwert von  $a$  ins Spiel bringen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}} .$$

Aus dem im Hinweis erwähnten Beispiel wissen wir bereits

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{a}} = 1 ,$$

denn mit  $0 < a < 1$  ist  $\frac{1}{a} > 1$ . Schließlich ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3.

$$\left( \frac{k^2 - k}{2k^2 + 3} \right), \quad \left( \frac{(k+1)(2k-3)(k+2)}{k^3} \right), \quad \left( \frac{3+2k}{k^2} \right), \quad \left( \frac{k^2 - 1}{k+3} \right).$$

Wir kürzen die Brüche derart, dass die einzelnen Summanden in Zähler und Nenner konvergieren (bei der ersten Aufgabe kürzen wir also  $k^2$ ):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 - k}{2k^2 + 3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{k}}{2 + \frac{3}{k^2}},$$

denn so können wir die Rechenregeln für konvergente Folgen anwenden:

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}}{\lim_{k \rightarrow \infty} 2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{k^2}} \\ &= \frac{1 - 0}{2 + 0} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Aufgabe kürzen wir  $k^3$ , da 3 der höchste Exponent beim Laufindex  $k$  ist (diese Vorgehensweise funktioniert, solange wir es mit rationalen Funktionen in  $k$  zu tun haben).

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(2k-3)(k+2)}{k^3} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}(k+1)(2k-3)(k+2)}{1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(2 - \frac{3}{k}\right) \left(1 + \frac{2}{k}\right)}{1} \\ &= \left(1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}\right) \left(2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{k}\right) \left(1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k}\right) \\ &= (1+0)(2-0)(1+0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Bei der dritten Aufgabe kürzen wir  $k^2$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3+2k}{k^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{k^2} + \frac{2}{k}}{1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{k^2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bei der vierten Aufgabe kürzen wir ebenfalls  $k^2$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 - 1}{k + 3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k} + \frac{3}{k^2}}.$$

An dieser Stelle sehen wir bereits, dass der Nenner gegen 0 geht, der Zähler aber gegen 1, sodass diese Folge insgesamt divergiert.

4. Die Sinusfunktion ist durch  $-1$  und  $+1$  beschränkt, wodurch selbiges auch für die Folge  $(\sin k)$  gilt. Die Folge ist weder monoton wachsend, noch fallend, was wir bereits an den ersten Folgengliedern sehen:

$$\sin 1 > 0, \quad \sin 4 < 0, \quad \sin 7 > 0.$$

Die Folge  $(e^{-k})$  ist monoton fallend, weil die Funktion  $f(x) := e^{-x}$  monoton fallend ist. Daher ist die Folge nach oben hin durch ihr erstes Folgenglied beschränkt. Nach unten ist die Folge durch Null beschränkt, da die Exponentialfunktion für reelle Argumente stets positive Werte liefert.

Die Folge  $(1 - \frac{1}{k})$  ist nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Sie ist monoton wachsend.

Die ersten Folgenglieder von  $(k^2 - k)$  sind 0, 0, 2, 6,  $\dots$ , wobei der (positive) quadratische Term mit fortschreitendem  $k$  eine immer größere Rolle spielt als der (negative) lineare Term. Daher ist die Folge monoton wachsend und nach unten durch 0 beschränkt. Nach oben ist sie allerdings unbeschränkt.

Nach dem Monotoniekriterium konvergieren die Folgen  $(e^{-k})$  und  $(1 - \frac{1}{k})$ . Über die anderen beiden Folgen sagt das Monotoniekriterium gar nichts.

5. Die komplexe Folge ist bereits in Polarkoordinaten angegeben. Der Term  $\frac{1}{k}$  gibt die Entfernung des Folgenglieds vom Ursprung an, während  $e^{ik}$  die Information über den Winkel — nämlich  $k$  — enthält. Letzterer nimmt von Folgenglied zu Folgenglied stets um  $1$  — das entspricht  $1 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 115^\circ$  — zu. Der Abstand vom Ursprung bildet allerdings eine Nullfolge, sodass sich die Folge insgesamt spiralförmig dem Ursprung entgegenbewegt. Es handelt sich somit um eine Nullfolge.
6. Schauen wir uns die Folge etwas genauer an, indem wir die ersten Folgenglieder aufschreiben:

$$a_0 = \sin 0 = 0$$

$$a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$a_2 = \sin \frac{2\pi}{2} = 0$$

$$a_3 = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

Von da an wiederholen sich die Folgenwerte, da die Folge genau eine Periodenlänge des Sinus durchschritten hat. Somit werden 0, +1 und  $-1$  von jeweils unendlich vielen Folgengliedern angenommen, was diese drei Zahlen zu Häufungspunkten der Folge macht. Genauer ist  $(a_{2k})$  eine Teilfolge (konstant 0) mit Grenzwert 0,  $(a_{4k+1})$  eine Teilfolge (konstant 1) mit Grenzwert 1 und  $(a_{4k+3})$  eine Teilfolge (konstant  $-1$ ) mit Grenzwert  $-1$ .

### Fragen

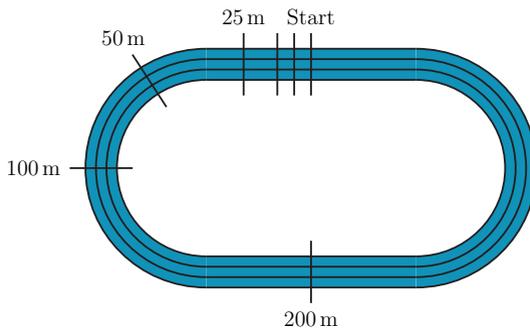
- Was ist eine Folge? Nennen Sie Beispiele.
- Wie ist die Konvergenz einer Folge definiert?
- Was ist eine Nullfolge?
- Was ist eine  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes?
- Definieren Sie den Limes superior.
- Welche Anzahl von Häufungspunkten hat eine konvergente Folge?
- Nennen Sie drei wichtige Rechenregeln für konvergente Folgen.
- Was besagt das Monotoniekriterium?
- Formulieren Sie das Häufungspunktprinzip.

# 7 Reihen

## 7.1 Motivation

Stellen wir uns den Finallauf über 400m bei den olympischen Spielen vor und blicken gedanklich auf den Favoriten: Beim Startschuss wird dieser aus den Blöcken springen und nach etwa 44 Sekunden über die Ziellinie laufen; ähnliches ist regelmäßig bei Sportübertragungen zu sehen und niemand wundert sich darüber, dass ein Läufer das Ziel erreicht. Aber wie könnte das ein mathematisch interessierter Sportler sehen?

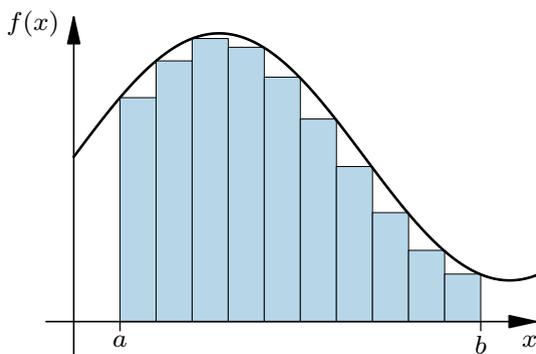
Wir machen als solcher ein Gedankenexperiment, bei dem wir zuerst die Hälfte der Gesamtstrecke, also 200m, laufen. Danach bleibt von den verbleibenden 200m wiederum die Hälfte zu laufen, also 100m, dann die Hälfte dieser Strecke, also 50m. Wenn wir diesen (unendlichen) Teilungsprozess weiter verfolgen, dann dürften wir nie das Ziel erreichen, denn von der jeweiligen Reststrecke verbleibt immer wieder eine Hälfte, die zu laufen ist.



Kann die Mathematik helfen? Nun, eigentlich ist durch die einzelnen Streckenabschnitte eine Folge gegeben (bei der wir auf das Hinzufügen der Meterangabe verzichten), nämlich  $a_0 = 200$ ,  $a_1 = 100$ ,  $a_2 = 50$  usw. Wenn wir die so gefundenen Werte addieren, kommen wir der 400 sehr nahe, aber erreichen wir diese auch wirklich? Die Antwort lautet ja, sonst wäre mit unserer Mathematik si-

cher etwas kaputt, wir kommen auf die Berechnung noch zurück. Wir sehen an diesen Überlegungen aber bereits einige Dinge, die uns in diesem Abschnitt weiter beschäftigen werden, denn behandeln wir Reihen, denken wir an eine unendliche Summation von Folgengliedern, in unserem Fall den  $a_k$ .

Neben der Beantwortung von Fragen mit philosophischem Hintergrund interessieren wir uns aber auch aus rein mathematischen Gründen für solche unendlichen Summationen. Wollen wir z. B. die Fläche unter dem Graphen einer Funktion berechnen, so ergibt sich — unter Verwendung von Rechtecken zur Approximation des wirklichen Flächeninhaltes — folgendes Bild:



Durch das Verkleinern der Grundseiten der Rechtecke machen wir die Annäherung an die Fläche unter  $f$  von  $a$  bis  $b$  immer besser und mit etwas Glück erhalten wir im Grenzwert den wirklichen Flächeninhalt unter  $f$ :

$$\sum_{k=0}^n F_k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} F_k .$$

Grenzwerte dieser Form nennen wir *unendliche Reihen* oder einfach nur *Reihen*.

## 7.2 Grundlegendes zu Reihen

Es stehen nun bereits einige Begriffe im Raum, die exakt gefasst werden müssen.

**Definition** (Partialsomme, Reihe, konvergent, absolut konvergent)

Für eine (reelle oder komplexe) Folge  $(a_k)$  heißt

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$n$ -te Partialsumme. Die Folge der Partialsummen heißt Reihe und wird als

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

notiert. Falls die Folge der Partialsummen  $(S_n)$  konvergiert, wird die Reihe konvergent genannt, und ihr Wert ist gegeben durch:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k.$$

Wenn sogar die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert, so heißt die Reihe absolut konvergent. ◀

Bitte beachten Sie, dass für den Wert und die Reihe selbst die gleiche Schreibweise verwendet wird.

Was eine Partialsumme ist, wirkt auf den ersten Blick oft sonderbar und Sie fragen sich vielleicht, ob dies denn in dieser Form gemacht werden muss. Die Antwort ist: Die Begriffe *Konvergenz* und *Divergenz* für Reihen können wir einfach von Folgen übernehmen. Der *Wert* einer Reihe ist der *Grenzwert* der Folge der Partialsummen.

Tatsächlich haben wir also unsere Überlegungen zu Reihen durch die Einführung von Partialsummen auf die bereits bekannten Folgen zurückgeführt, es ist also keine gänzlich neue Theorie nötig. Wir wollen, trotz einer gewissen Vertrautheit, nochmal einen zweiten Blick auf das werfen, was eine Partialsumme eigentlich ist: Es handelt sich bei  $S_n$  einfach nur um die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder  $a_k$ . Erinnern wir uns an das Beispiel der 400m Runde. Dort ist dann  $S_0 = a_0 = 200$ ,  $S_1 = a_0 + a_1 = 300$ ,  $S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 350$  usf. Auch aus diesem Beispiel ersehen wir sofort, dass die  $S_n$  wirklich eine Folge bilden.

### Beispiel

Wie wir bereits gelernt haben, hat die geometrische Summe den Wert

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Wegen  $x^{n+1} \rightarrow 0$  für  $|x| < 1$  ist die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

für  $x \in ]-1, 1[$  definiert und hat als Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} .$$



Die bisher bei Reihen verwendeten  $a_k$  sind hier also gleich  $x^k$ . Darf dies sein, wo doch die  $a_k$  eine Folge mit bestimmten Zahlen bilden und im  $x^k$  eine Variable  $x$  steckt? Ja, denn das  $x$  kann zwar beliebig gewählt werden, ist dann aber (nach dieser Wahl) für die nachfolgenden Betrachtung fest und damit bilden die  $x^k$  tatsächlich eine Folge wie bisher.

Mit der geometrischen Reihe können wir den Läufer aus der Motivation endlich zum Ziel bringen:  $200 + 100 + 50 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 200 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 200 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 400$ .

### Beispiel

Auch die Dezimalschreibweise reeller Zahlen können wir mit Hilfe der Reihen beschreiben. So kann jede reelle Zahl als Dezimalbruch  $\pm \sum_{k=0}^{\infty} c_k 10^{m-k}$  mit  $c_k \in \{0, \dots, 9\}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  dargestellt werden, was nachstehend exemplarisch demonstriert wird:

$$31,25 = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} .$$



Somit werden reelle Zahlen mit Grenzwerten von Partialsummen identifiziert. Vielleicht ist Ihnen bereits das folgende Phänomen begegnet:

$$9 \cdot 0,\bar{9} = 10 \cdot 0,\bar{9} - 0,\bar{9} = 9,\bar{9} - 0,\bar{9} = 9 ,$$

also ist  $0,\bar{9} = 1$ . Aber wieso sollten nicht zwei Reihen den gleichen Grenzwert haben?

## 7.3 Eigenschaften von Reihen

Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent und  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so sind auch die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und haben die Werte

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

## 7.4 Konvergenzkriterien

Eine *notwendige Bedingung* für die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 .$$

Formal können wir das einsehen, weil  $a_k = S_k - S_{k-1}$  und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1} = 0 ,$$

denn auch durch das Abziehen der 1 beim Index der Folge der Partialsummen geht diese gegen den gleichen Grenzwert wie  $S_k$ .

So ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  mit Sicherheit divergent. Von der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  wissen wir bereits, dass sie für  $|x| < 1$  konvergent ist und daher muss für solche  $x$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0$  sein. Für  $|x| \geq 1$  hingegen ist  $(x^k)$  keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

Doch Vorsicht: Bilden die Summanden der Reihe eine Nullfolge, heißt dies noch nicht, dass die Reihe auch konvergiert!

### Beispiel

Die so genannte *harmonische Reihe* hat die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} .$$

Diese Reihe ist ein Standardbeispiel für eine divergente Reihe, die auf den ersten Blick konvergent erscheint. Wir werden die Divergenz etwas später im Kapitel über Integration zeigen, da sich mit Hilfe der Integration leichter argumentieren lässt. ◆

Wir stellen nun eine Reihe nützlicher hinreichender Kriterien vor. Alle benötigten Voraussetzungen geben wir in möglichst einfacher Form an und verzichten dafür auf die allgemeinsten Fassungen. Sie sollten daher im Hinterkopf behalten, dass die Voraussetzungen der folgenden Sätze auch etwas abgeschwächt

werden können: Überall, wo wir etwas für alle  $k \in \mathbb{N}$  gefordert haben, genügt auch für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq K$ . Der Anfang einer Reihe spielt für deren Konvergenz nicht die geringste Rolle.

Was wir bisher über Reihen gelernt haben, gilt für reelle und komplexe Reihen. Dies trifft auch für die ersten drei der nachstehenden Kriterien zu, denn es geht dort stets um Beträge, die für die Berechnungen verwendet werden (dies allerdings nicht beim Leibniz-Kriterium, was daher für reelle Reihen reserviert bleibt). Und was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Selbstverständlich eine reelle Zahl. Mit entsprechenden Rechenbeispielen werden wir uns daher zurückhalten, denn es gibt dabei nichts, was uns überraschen könnte. Erst bei den so genannten Potenzreihen wird es wieder interessanter, den komplexen Fall eingehender zu begutachten.

Wie wir bereits kurz zuvor gelernt haben, divergiert die harmonische Reihe. Für die Konvergenz von Reihen muss daher etwas gefordert werden, was über das bloße Vorkommen einer Nullfolge hinter dem Summenzeichen hinaus geht. Und genau davon handeln die folgenden Kriterien.

### 7.4.1 Majorantenkriterium

#### Satz

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die zu untersuchende Reihe und sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  eine weitere Reihe, von der wir bereits wissen, dass sie absolut konvergent ist. Gilt dann für alle  $k \in \mathbb{N}$   $|a_k| \leq |c_k|$ , so ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|.$$

■

Die Vergleichsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$  nennen wir in dem Fall *konvergente Majorante*, da sie größere Summanden hat und dennoch konvergiert. Dieses Kriterium spricht für sich selbst; es enthält genau das, was alleine aus seiner Namensgebung zu erwarten war und sich locker so formulieren lässt: Wenn wir nach der Konvergenz einer Reihe fragen und bereits eine Reihe konvergiert, die „größer“ ist, dann konvergiert die fragliche Reihe erst recht.

Mathematisch verhält es sich wie folgt. Die Folge der Partialsummen  $S_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$  der Beträge ist monoton wachsend, außerdem ist sie unter den Voraus-

setzungen des Satzes auch beschränkt durch den Wert der Majorante, denn

$$|a_k| \leq |c_k| \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| .$$

Wir können also erfolgreich unser Wissen über das Monotoniekriterium aus dem Kapitel über Folgen anwenden und die Konvergenz der  $S_n$  folgern. Hier zeigt sich erneut deutlich, welch großen Nutzen wir aus der Einführung der Folge der Partialsummen ziehen; nun sollten diese ihren vermeintlichen Schrecken verloren haben.

### Beispiel

Wir untersuchen die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{2}\right)^k$  mit dem Majorantenkriterium. Es ist also  $a_k = \left(\frac{\sin k}{2}\right)^k$  und wir schätzen folgendermaßen ab:

$$|a_k| = \left| \left(\frac{\sin k}{2}\right)^k \right| = \left(\frac{|\sin k|}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Weiterhin wissen wir, dass die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  für  $|x| < 1$  gegen  $\frac{1}{1-x}$  konvergiert, hier speziell für  $x := \frac{1}{2}$  gegen 2. Somit konvergiert auch die untersuchte Reihe absolut mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\sin k|}{2}\right)^k < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 .$$

In der ersten Auflage des Buches stand in diesem Beispiel noch jeweils  $\leq$  statt  $<$ , was für die absolute Konvergenz auch ausreichend ist. Es ist aber eine interessante Überlegung, warum  $|\sin k| < 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist, die wir Ihnen nicht vorenthalten wollen. Denn der Sinus wird ja hin und wieder 1, nämlich genau bei  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Wir suchen also eine natürliche Zahl  $k$  mit

$$k = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{oder} \quad \frac{2k}{1+2n} = \pi .$$

Da  $\pi$  allerdings irrational, also nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar ist, kann es solch ein  $k$  und  $n$  nicht geben. Aus  $|\sin t| = 1$  folgt daher  $t \notin \mathbb{N}$ .  $\blacklozenge$

## 7.4.2 Wurzelkriterium

### Satz

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die zu untersuchende Reihe. Gibt es eine Zahl  $\theta < 1$ , sodass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta$$

ist oder gilt alternativ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 ,$$

dann konvergiert die Reihe absolut. ■

### Beispiel

Wir untersuchen die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$  mit dem Wurzelkriterium. Es ist also  $a_k = \frac{k}{2^k}$  und wir schätzen folgendermaßen ab:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 .$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent. ◆

## 7.4.3 Quotientenkriterium

### Satz

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die zu untersuchende Reihe ( $a_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ). Gibt es eine Zahl  $\theta < 1$ , sodass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta$$

ist oder gilt alternativ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 ,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

Ist hingegen für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 ,$$

so bilden die Summanden  $a_k$  keine Nullfolge und die Reihe divergiert. ■

### Beispiel

Wir untersuchen die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , mit dem Quotientenkriterium. Es ist also  $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$  und wir schätzen folgendermaßen ab:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \rightarrow 1 .$$

Hier ist die Voraussetzung „ $< 1$ “ des Quotientenkriteriums nicht erfüllt, ganz egal, welchen Wert  $\alpha$  annimmt. In solch einem Moment erliegen viele der Versuchung und behaupten, die Reihe müsse divergieren, weil das Kriterium ja kein positives Ergebnis zeigt. Doch ohne erfüllte Voraussetzungen sagt obiger Satz (und viele andere auch) einfach gar nichts aus. Und in der Tat konvergiert die Reihe, falls  $\alpha > 1$  ist, sie divergiert jedoch für  $\alpha \leq 1$ . Zu diesem Ergebnis werden wir allerdings erst an anderer Stelle mit einer geeigneteren Methode gelangen. Das wird noch eine Weile dauern, denn dazu werden wir Integrale benutzen.  $\blacklozenge$

### 7.4.4 Leibniz-Kriterium

#### Satz

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  die zu untersuchende Reihe mit reellen  $a_k$ . Wenn  $(a_k)$  eine alternierende und vom Betrag her monoton fallende Nullfolge ist, dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent.

(*Alternierend* bedeutet, dass aufeinander folgende  $a_k$  stets unterschiedliche Vorzeichen haben.)  $\blacksquare$

#### Beispiel

Die *alternierende harmonische Reihe*  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  erfüllt die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und ist somit konvergent. Sie ist nicht absolut konvergent, denn  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right|$  ist die harmonische Reihe und, wie wir bereits wissen, divergent.  $\blacklozenge$

Wir wollen nun noch exemplarisch das Wurzelkriterium beweisen. Dadurch haben wir dann noch mehr Vertrauen bei der Anwendung der Kriterien, aber auch die Bedeutung der geometrischen Reihe wird verdeutlicht:

Es sollen die Voraussetzungen des Wurzelkriteriums gelten. Wenn also für fast alle natürlichen Zahlen  $k$  die Ungleichung  $|a_k| \leq \theta^k$  mit  $0 \leq \theta < 1$  gilt, so ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$  eine Majorante für  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

Hier haben wir das  $\theta$  aus dem Wurzelkriterium verwendet, welches hier natürlich für  $x$  geschrieben wurde, das bei der geometrischen Reihe stand. Nach unseren Erfahrungen gibt es immer wieder Probleme, die nur darauf beruhen, dass eine gewisse Fixierung auf die immer gleiche Symbolik besteht. Lösen Sie sich spätestens hier endgültig davon; es kommt auf die Bedeutung an, und die geometrische Reihe bleibt die geometrische Reihe, egal, ob dort ein  $\theta$  für ein  $x$  steht oder nicht!

## 7.5 Aufgaben

1. Welche der folgenden Reihen sind alternierend?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin k$$

2. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2^k} + \frac{2}{3^k} \right).$$

3. Das Majorantenkriterium versichert uns die Konvergenz einer Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

falls wir eine konvergente Majorante finden. Überlegen Sie, was aus der Existenz einer divergenten Minorante, also einer divergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $|a_k| \geq |c_k|$ , gefolgert werden kann. Leiten Sie Ihre Behauptungen aus dem Majorantenkriterium ab.

4. Untersuchen Sie folgende Reihen mit geeigneten Konvergenzkriterien:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{\ln(k+2)} \right)^k.$$

5. Welche Bedingungen muss eine Reihe mit ausschließlich ganzzahligen Summanden erfüllen, um konvergent zu sein?

## 7.6 Lösungen

1. Anschaulich ist eine Reihe alternierend, wenn aufeinander folgende Summanden stets unterschiedliche Vorzeichen haben. Das bedeutet, dass das Produkt aufeinander folgender Summanden  $a_k$  und  $a_{k+1}$  für alle  $k$  negativ ist.

Bei  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{k!}$  wechselt der Zähler der Summanden das Vorzeichen und der Nenner ist stets positiv. Insgesamt ist die Reihe also alternierend:

$$a_k a_{k+1} = \frac{(-2)^{k-1}}{k!} \cdot \frac{(-2)^k}{(k+1)!} = \frac{-2 \cdot ((-2)^{k-1})^2}{k!(k+1)!} < 0.$$

Die zweite Reihe können wir umschreiben, denn es ist  $\cos(k\pi) = (-1)^k$ . Damit vereinfacht sich die Reihe zur einfachsten alternierenden Reihe überhaupt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k .$$

Die Summanden der dritten Reihe enthalten schonmal den Faktor  $(-1)^k$ , was recht vielversprechend ist. Der andere Faktor  $\sin k$  ändert allerdings auch hin und wieder das Vorzeichen. Beispielsweise ist  $\sin 1 > 0$  und  $\sin 2 < 0$  und somit sind die Summanden der Reihe für  $k = 1$  und für  $k = 2$  beide negativ. Diese Reihe ist also nicht alternierend.

2. Den Wert einer Reihe können wir entweder über den Grenzwert ihrer Partialsummen bestimmen, oder aber, indem wir in Ausdrücke bereits bekannter Reihen umformen. Eine der wichtigsten Reihen, deren Wert Sie sich merken und auch wiedererkennen sollten, ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in ]-1, 1[ .$$

Speziell erhalten wir daraus für  $x := \frac{1}{2}$  und  $x := \frac{1}{3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} ,$$

sodass wir daraus das Ergebnis unserer Aufgabe herleiten können:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2^k} + \frac{2}{3^k} \right) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9 .$$

3. Anschaulich sollte mit  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergieren, das wäre das analoge Verhalten zum Majorantenkriterium. Könnte  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nicht aber doch im einen oder anderen Fall konvergieren? Dann wären aber die Voraussetzungen für das Majorantenkriterium erfüllt, allerdings mit vertauschten Rollen: Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  soll konvergieren und die Ungleichung  $|c_k| \leq |a_k|$  erfüllt sein. Damit wäre  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Majorante zu  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ . Letztere müsste also nach dem Majorantenkriterium ebenfalls konvergieren. Wir sind aber ursprünglich davon ausgegangen, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  divergiert. Somit führt die Annahme der Existenz einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  zu einem Widerspruch. Somit muss auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergieren. Wir haben das *Minorantenkriterium* hergeleitet.
4. Bei  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$  verwenden wir das Quotientenkriterium. Die Voraussetzung  $a_k = \frac{k^2}{e^k} \geq 0$  für alle  $k$  ist schonmal erfüllt. Nun zum Quotienten:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^2}{e^{k+1}}}{\frac{k^2}{e^k}} = \frac{(k+1)^2 e^k}{e^{k+1} k^2} = \frac{1}{e} \frac{(k+1)^2}{k^2}$$

konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{1}{e} < 1$ . Nach dem Quotientenkriterium muss dann die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$  absolut konvergieren. (Das Wurzelkriterium hätte uns hier übrigens das gleiche Ergebnis geliefert.)

Bei  $\sum_{k=0}^{\infty} k^{-k}$  versuchen wir es mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^{-k}} = k^{-1} = \frac{1}{k}$$

konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $0 < 1$ . Somit konvergiert auch diese Reihe absolut.

Bei  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\ln(k+2)}\right)^k$  schließlich kommen wir mit dem Leibniz-Kriterium weiter. Dafür müssen wir zunächst die Voraussetzungen prüfen: Durch den Term  $(-1)^k$  wechselt das Vorzeichen der Summanden, die Reihe ist also alternierend. Weiterhin gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(k+2)}\right)^k = 0$$

und die Folge  $(|a_k|)$  ist monoton fallend, da die Funktion  $\ln x$  monoton wachsend ist. Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt und die Reihe konvergent.

5. Zunächst einmal müssen, wie bei jeder konvergenten Reihe, die Summanden eine Nullfolge bilden. Da die Summanden ganze Zahlen sein sollen, heißt dies, dass sämtliche Summanden ab einem bestimmten Index gleich Null sein müssen:

$$\left( \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \wedge \quad a_k \in \mathbb{Z} \right) \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \text{ für alle } k > K .$$

Damit wird aus der Reihe eine endliche Summe und diese konvergiert natürlich immer.

### Fragen

- Was ist der Zusammenhang zwischen Reihen und Folgen?
- Definieren Sie den Begriff der Partialsumme.
- Nennen Sie Beispiele für konvergente und divergente Reihen.
- Wie überprüfen Sie Reihen auf Konvergenz? Nennen Sie explizite Kriterien.
- Was ist eine alternierende Reihe?
- Was ist absolute Konvergenz? Ist jede absolut konvergente Reihe konvergent?



# 8 Stetigkeit

## 8.1 Motivation

Wenn etwas „stetig“ verläuft, so verheißt dies im umgangssprachlichen Gebrauch, dass es keine Brüche, Sprünge oder Risse gibt. Diese Vorstellung finden wir wieder, wenn wir an den Verlauf einer Funktion denken: Der Funktionsgraph soll für ein bestimmtes Intervall, in welchem die Funktion die mathematischen Bedingungen, die an den Begriff der Stetigkeit geknüpft werden, in einem Zug gezeichnet werden können.

Wichtige Funktionen, die wir bereits gesehen haben, wie der Sinus oder der Kosinus, erfüllen diese Forderung augenscheinlich auf den gesamten reellen Zahlen. In diesem Kapitel werden wir sehen, wie wir unsere Vorstellung mit Mitteln der Mathematik fassen können.

Stetigkeit ist auch der erste Schritt zu — nennen wir es poetisch — „schönen“ Funktionen. Damit sind solche gemeint, die keinen zu wilden oder gar zerrissenen Verlauf haben (was noch zu konkretisieren ist). Der nächste Schritt wird dann bei den differenzierbaren Funktionen vollzogen, die sich als automatisch stetig erweisen werden. Diese dürfen dann, im Gegensatz zu stetigen Funktionen, nicht einmal das haben, was wir uns allgemein als Ecken oder Kanten vorstellen, wir kommen darauf auch im Kapitel zur Differenziation zurück.

Stetige Funktionen bieten uns aber auch eine Besonderheit im Hinblick auf Maxima und Minima. Solche werden wir lernen zu identifizieren, denn z. B. für eine die Leistung einer Turbine beschreibende Funktion sind sie von großer Bedeutung.

Denken wir abschließend an etwas Praktisches, an ein Flugzeug und die Funktion, welche die Flughöhe in Abhängigkeit der Flugzeit angibt. Diese Höhenfunktion sollte (unbedingt) stetig sein. Wäre sie es nicht, was würde dann ein Passagier erleben, der in diesem Flugzeug sitzt? Welches Phänomen wäre denkbar, damit die Höhe von einer Sekunde auf die andere um einige hundert Meter springt? Damit scheint der Begriff der Stetigkeit auch das Potential zu haben,

eine Funktion in gewissen Bereichen auf ihre Plausibilität in den Anwendungen zu prüfen.

## 8.2 Grundlagen zur Stetigkeit

Wir wollen die Stetigkeit nun mit mathematischer Strenge einführen. Dazu ist es nötig, die Funktion an den uns interessierenden Stellen genau zu betrachten. Dazu müssen wir diesen Stellen beliebig nahe kommen. Wenn wir uns also einem Punkt  $\tilde{x}$  aus dem Definitionsbereich der Funktion beliebig nähern wollen, machen wir dies nach bereits bekannten Methoden, nämlich über Grenzwerte von Folgen. Diese können im Allgemeinen von der linken oder rechten Seite aus zum interessierenden Punkt kommen. Weiterhin ist es wichtig, dass unsere gefundenen Ergebnisse allgemein gelten und nicht von wenigen konkreten Folgen abhängig sind. Die nachstehende Definition ist der Startpunkt für unsere weiteren Gedanken hierzu.

### Definition (linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $D \subset \mathbb{R}$  der Definitionsbereich und sei  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ .

Wenn für alle in  $D$  verlaufenden Folgen  $(x_k)$  mit  $x_k < \tilde{x}$  und  $x_k \rightarrow \tilde{x}$  die Bildfolgen  $(f(x_k))$  stets gegen den gleichen Wert  $\tilde{y}$  konvergieren (vorausgesetzt, es gibt mindestens eine solche Folge), so heißt  $\tilde{y}$  linksseitiger Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $\tilde{x}$ . Wir schreiben dann

$$\lim_{x \nearrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y} .$$

Wenn für alle in  $D$  verlaufenden Folgen  $(x_k)$  mit  $x_k > \tilde{x}$  und  $x_k \rightarrow \tilde{x}$  die Bildfolgen  $(f(x_k))$  stets gegen den gleichen Wert  $\tilde{z}$  konvergieren (vorausgesetzt, es gibt mindestens eine solche Folge), so heißt  $\tilde{z}$  rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $\tilde{x}$ . Wir schreiben dann

$$\lim_{x \searrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{z} .$$



Der Wert  $\tilde{x}$  muss dabei nicht im Definitionsbereich von  $f$  liegen. Allerdings soll er durch Folgen im Definitionsbereich als Grenzwert erreicht werden können. Dies ist beispielsweise bei Intervallgrenzen der Fall: Für  $D := ]0,1[$  wäre  $\tilde{x} \in [0,1]$  möglich.

Gibt es im Definitionsbereich von  $f$  auch uneigentlich konvergente Folgen, also solche mit  $x_k \rightarrow +\infty$  oder  $x_k \rightarrow -\infty$ , so können wir auch  $\tilde{x} = +\infty$  bzw.

$\tilde{x} = -\infty$  wählen und mit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

das Verhalten von  $f$  im Unendlichen betrachten.

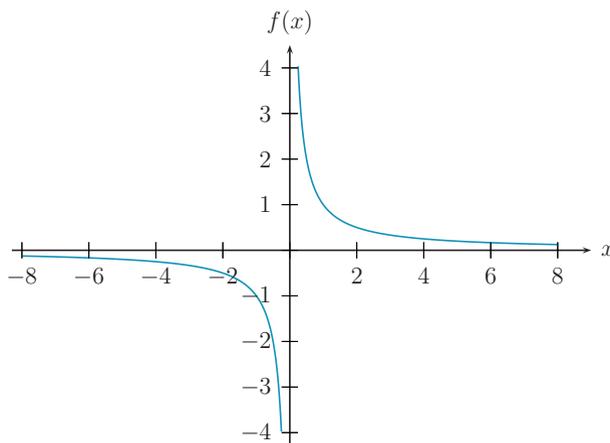
### Beispiel

Die Funktion  $f(x) := \frac{1}{x}$  ist für alle  $x \neq 0$  definiert. Der links- und rechtsseitige Grenzwert gegen  $\tilde{x} := 0$  ist

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty .$$

Im Unendlichen verhält sich  $f$  folgendermaßen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 .$$



Stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert überein, so können wir die Einschränkungen  $x_k < \tilde{x}$  bzw.  $x_k > \tilde{x}$  auch weglassen und alle Folgen mit  $x_k \rightarrow \tilde{x}$  im Definitionsbereich betrachten. Die Bildfolgen konvergieren dann allesamt gegen den gleichen Wert und wir können

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = \tilde{y}$$

schreiben.

**Beispiel**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^2$ . Dann gilt für jede Nullfolge  $(x_k)$  in  $\mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 = 0,$$

also insgesamt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

**Definition** (Stetigkeit)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  der Definitionsbereich und sei  $\tilde{x} \in D$ .  $f$  heißt in  $\tilde{x}$  stetig, falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)$  existiert und

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$$

gilt. Ist  $f$  in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig, so heißt  $f$  stetig auf ganz  $D$ .



Für Folgen mit  $x_k \rightarrow \tilde{x}$  ergibt sich die Schreibweise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right).$$

Wir können uns also merken, dass bei stetigen Funktionen der Limes aus dem Funktionsargument herausgezogen werden darf.

Wir betrachten noch einmal das Bild der Funktion  $f(x) := \frac{1}{x}$  aus obigem Beispiel. Hier stellt sich die Frage nach der Stetigkeit im Nullpunkt nicht! Sie ist hier gar nicht definiert.

Um zu zeigen, dass  $f$  in einem Punkt  $\tilde{x}$  nicht stetig ist, genügt es, zwei gegen  $\tilde{x}$  konvergente Folgen  $x_k \rightarrow \tilde{x}$  und  $y_k \rightarrow \tilde{x}$  zu finden, deren Bildfolgen nicht den gleichen Grenzwert haben:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k).$$

Alternativ genügt auch eine divergente Bildfolge, also  $x_k \rightarrow \tilde{x}$ , aber  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$  existiert nicht.

Diverse wichtige Funktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Dazu gehören Polynome  $f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , die Exponentialfunktion  $f(x) := e^x$  sowie Sinus  $f(x) := \sin x$  und Kosinus  $f(x) := \cos x$ . Der Logarithmus  $f(x) := \ln x$  ist zumindest auf seinem gesamten Definitionsbereich  $\mathbb{R}^+$  stetig. Die Funktion  $f(x) := \frac{1}{x}$  ist in  $x = 0$  nicht definiert, sonst aber überall stetig.

**Beispiel**

Wir untersuchen die Funktion  $f(x) := \frac{x}{|x|}$  im Punkt  $\tilde{x} := 0$ . Der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{-x} = -1 ,$$

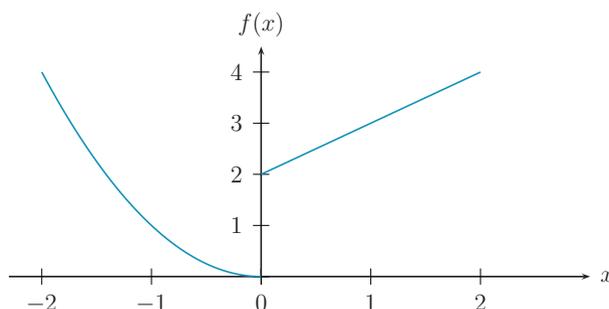
der rechtsseitige ist

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{+x} = +1 .$$



Es ist für viele Überlegungen unproblematisch, wenn eine Funktion nicht auf dem ganzen untersuchten Intervall stetig ist. Dabei kommt ein nützlicher Begriff ins Spiel: Eine Funktion  $f$  heißt auf  $[a, b]$  *stückweise stetig*, wenn  $f$  für alle  $x \in [a, b]$  — mit Ausnahme von endlich vielen Stellen — stetig ist.

Wir möchten am Ende noch einen Funktionsverlauf zum Nachdenken zeigen:



Ist diese Funktion in Null stetig? Sind links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich? Das wohl nicht. Und nach der Anschauung erfüllt die Funktion das, was wir intuitiv unstetig nennen. Aber Achtung: Es könnte sein, dass die Funktion in Null gar nicht definiert ist, dann erübrigt sich die Frage nach Stetigkeit. Sie scheint zumindest stückweise stetig. Es lohnt sich nach diesen Gedanken offensichtlich immer, die Voraussetzungen genau zu beachten und alles weitere mathematisch streng zu prüfen. Durch den Graphen selbst bekommen wir nur Hinweise.

## 8.3 Zusammensetzung stetiger Funktionen

Wenn bereits Funktionen als stetig bekannt sind, lassen sich daraus wieder neue stetige Funktionen konstruieren. Umgekehrt lässt sich mit der Hilfe der folgenden Regeln für die Zusammensetzung von Funktionen sagen, ob diese wieder stetig sind. Dies bringt klare Vorteile, denn wer möchte schon in jedem

(vermeintlich neuen) Fall die allgemeinen Grenzwertuntersuchungen anstellen? Wir bieten nun wichtige Fakten in kompakter Form:

### Satz

Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Kompositionen stetiger Funktionen sind (dort wo definiert) stetig. ■

Da wir den Stetigkeitsbegriff auf den der Konvergenz von Folgen aufgebaut haben, ergeben sich diese Resultate aus dem Gelernten über die Konvergenz von Folgen. Wir wollen daher nur die letzte Aussage klären. Seien dazu  $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf  $D_k \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f_1(D_1) \subseteq D_2$ . Dann gilt für alle Folgen  $(x_k)$  in  $D_1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_2 \circ f_1)(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_2(f_1(x_k)) \\ &= f_2 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} f_1(x_k) \right) && \text{(weil } f_2 \text{ stetig ist)} \\ &= f_2 \left( f_1 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) \right) && \text{(weil } f_1 \text{ stetig ist)} \\ &= f_2 \circ f_1 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) . \end{aligned}$$

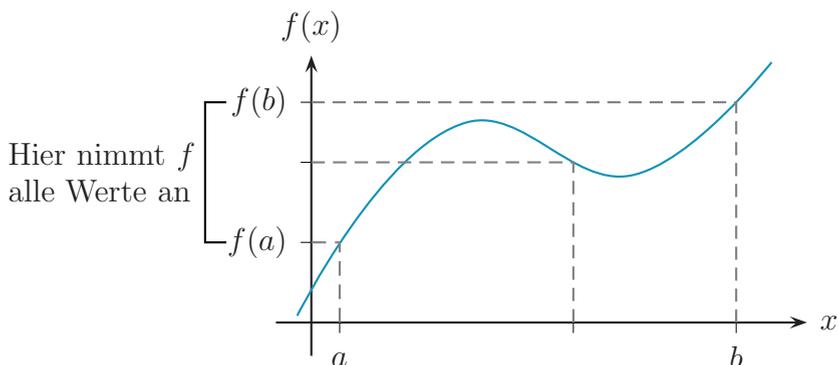
Somit ist die Hintereinanderausführung  $f_2 \circ f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

### Beispiel

Nach dem letzten Satz wird nochmals deutlich, dass Polynome stetig sind. Aber auch für rationale Funktionen gilt das, denn diese sind ja der Quotient von Polynomen. ◆

## 8.4 Der Zwischenwertsatz

Folgendes können wir uns leicht vorstellen: Sind für eine stetige Funktion  $f$  auf ihrem Funktionsgraphen zwei Punkte mit  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  bezeichnet, dann wird die Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  (auf dem sie definiert sein soll) alle Funktionswerte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annehmen. Wäre ein Wert  $y \in [f(a), f(b)]$  nicht dabei, dann müsste es einen Sprung im Funktionsgraphen geben, der dafür verantwortlich ist. Dies wäre dann aber ein Widerspruch zur Stetigkeit von  $f$ .



Das ist sehr plausibel, dennoch wollen wir in diesem Fall auf eine konkrete Herleitung nicht verzichten, weil wir dadurch viele weitere nützliche Dinge lernen können. Wir benötigen dafür das (bereits im Kapitel zum Thema Folgen behandelte) Häufungspunktprinzip: *Für eine Folge reeller Zahlen  $(x_n)$  in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  kann durch fortgesetztes Unterteilen des Intervalls ein Häufungspunkt konstruiert werden, indem in jedem Schritt ein Intervall ausgewählt wird, das unendlich viele Folgenglieder enthält.*

Nun wählen wir stets das am weitesten rechts liegende der infrage kommenden Intervalle. Damit erhalten wir den *oberen Häufungspunkt* oder *Limes superior* der Folge  $\lim x_k$ . Wählen wir hingegen das erste infrage kommende Intervall, dann führt dies zum *unteren Häufungspunkt* bzw. *Limes inferior*  $\underline{\lim} x_k$ .

Diese Konstruktion können wir auch für beliebige Teilmengen eines Intervalls durchführen, und nicht nur wie bisher auf Folgen. Haben wir dann  $M \subseteq [a, b]$  gegeben, teilen wir  $[a, b]$  in z. B. zehn Intervalle und wählen aus diesen Intervallen jenes aus, welches am weitesten rechts auf der Zahlengeraden liegt und noch unendlich viele Punkte aus  $M$  enthält. Durch die Wiederholung dieses Verfahrens, wie beim Häufungspunktprinzip beschrieben, erhalten wir wieder einen Häufungspunkt, diesmal von  $M$ , und zwar durch das hier beschriebene Vorgehen den oberen. Analog können wir den unteren Häufungspunkt von  $M$  erhalten.

Das hier gezeigte Vorgehen wird uns sogleich bei der Erklärung des folgenden Satzes nützlich sein.

### Satz

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann hat  $f$  mindestens eine Nullstelle, d. h. es existiert ein  $\beta \in [a, b]$  mit  $f(\beta) = 0$ . (Nullstellensatz) ■

Wir betrachten dazu

$$M := \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \subseteq [a, b].$$

Dann existiert ein oberer Häufungspunkt  $\beta \in [a, b]$  von  $M$  mit  $f(\beta) \leq 0$ . Wir zeigen, dass  $\beta$  eine Nullstelle von  $f$  ist: Angenommen  $f(\beta) < 0$ , dann wäre  $f$  aufgrund der Stetigkeit auch in einer  $\varepsilon$ -Umgebung um  $\beta$  kleiner als Null, also auch für ein  $\tilde{x} > \beta$ . Dies ist dann aber ein Widerspruch dazu, dass  $\beta$  oberer Häufungspunkt ist.

Dieser Satz ist nützlich, wir können uns aber noch eine Erweiterung überlegen: Sei dafür  $f(b) > f(a)$  und  $c \in [f(a), f(b)]$ . ( $f(b) < f(a)$  geht natürlich auch, alles verläuft dann analog.) Dann hat die auf  $[a, b]$  definierte Hilfsfunktion  $g(x) := f(x) - c$  eine Nullstelle  $\beta$ , weil  $g(a) = f(a) - c < 0$  und  $g(b) = f(b) - c > 0$ . Daraus folgt dann offensichtlich  $f(\beta) = c$  und damit der nachstehend aufgeführte Satz.

### Satz

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an. (Zwischenwertsatz) ■

## 8.5 Supremum, Infimum, Maximum und Minimum

Wir werden hier einige Grundlagen vorstellen, die uns noch einige Male beschäftigen werden, insbesondere auch bei der Differenziation.

### Definition (Maximum, Minimum, Supremum, Infimum)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Wir sagen,  $f$  nimmt in  $\tilde{x} \in D$  das (globale) Maximum an, wenn gilt:

$$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

Schreibweise:  $f(\tilde{x}) = \max_{x \in D} f(x)$ .

Gilt sogar  $>$  anstelle des  $\geq$ , so sprechen wir von einem strengen Maximum.

- Wir sagen,  $f$  nimmt in  $\tilde{x} \in D$  das lokale Maximum an, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass gilt:

$$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - \tilde{x}| < \varepsilon.$$

3.  $\tilde{y} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  heißt Supremum von  $f$ , wenn gilt:

- i)  $\tilde{y} \geq f(x)$  für alle  $x \in D$ ,
- ii) es existiert eine Folge  $(x_n)$  mit Werten in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}$ .

Schreibweise:  $\tilde{y} = \sup_{x \in D} f(x)$ .

Analog dazu werden Minimum (min), lokales Minimum und Infimum (inf) von  $f$  definiert. ◀

- Jede Funktion hat ein Supremum und ein Infimum. (Dies können wir wie im Beweis des Nullstellensatzes mit dem Häufungspunktprinzip für Mengen einsehen. Wie müssten wir dann die Menge  $M$  definieren?)
- Nicht jede Funktion nimmt ein Maximum oder Minimum an, was wir z. B. an der auf den gesamten reellen Zahlen definierten Funktion  $f(x) = x$  sehen.
- Jedes globale Maximum ist auch Supremum und lokales Maximum. Ein lokales Maximum muss allerdings kein globales Maximum sein, denn es können (jenseits der in der Definition beschriebenen  $\varepsilon$ -Umgebung) noch größere Werte vorkommen. Entsprechende Überlegungen gelten natürlich auch für Minima.

## 8.6 Maximum und Minimum für stetige Funktionen

Es gibt im Zusammenhang mit stetigen Funktionen eine Besonderheit, die nicht nur bei theoretischen Überlegungen wichtig ist.

### Satz

Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  nimmt ihr Maximum und Minimum an. ■

Wir werden den Beweis für das Maximum führen (für das Minimum verläuft der Beweis wieder analog), denn hierbei sehen wir sehr gut, wie einige bekannte Begriffe wieder vorkommen und erlernte Methoden wirken. Sei also  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\tilde{y} = \sup_{x \in [a, b]} f$ . Können wir ein  $\tilde{x} \in [a, b]$  mit  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$

konstruieren, dann ist schon alles erledigt, da  $\tilde{y} \geq f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Nach der Definition des Supremums wissen wir von der Existenz einer Folge  $(x_n)$  in  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \tilde{y}$ . Die Folge  $(x_n)$  selbst muss nicht konvergieren, aber sie ist durch die Intervallgrenzen beschränkt und enthält somit

nach dem Häufungspunktprinzip eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit Grenzwert  $\tilde{x} \in [a, b]$ . Da die Bildfolge  $(f(x_k))$  konvergent gegen  $\tilde{y}$  ist, konvergiert auch deren Teilfolge  $(f(x_{n_k}))$  gegen  $\tilde{y}$ . Da  $f$  stetig ist, gilt

$$f(\tilde{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \tilde{y}.$$

Der Beweis ist eventuell nicht so leicht zu verdauen, insbesondere die Sache mit dem Häufungspunktprinzip und der Teilfolge sollten Sie für sich nochmals genau klären und vielleicht auch in den entsprechenden Abschnitten des Buches erneut nachsehen. Wenn Ihnen das momentan zu schwer erscheint, genießen Sie wenigstens das Resultat. Das garantiert uns unter den gegebenen Voraussetzungen also tatsächlich Maximum und Minimum.

## 8.7 Aufgaben

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  der folgenden Funktion sowie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an sämtlichen Randpunkten:

$$f(x) := e^{\frac{1}{\cos x}}.$$

- Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \ln(ax) & , x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & , x < 1 \end{cases}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig?

- Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen im Punkt  $x_0 := 0$  stetig ergänzt werden können:

$$f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) := \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad h(x) := \sinh\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Argumentieren Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass jedes reelle Polynom dritten Grades mindestens eine Nullstelle hat.
- „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph keine Lücken aufweist.“  
Ist das schon die ganze Wahrheit oder gibt es noch weitere Möglichkeiten?

## 8.8 Lösungen

- Definiert ist  $f(x) := e^{\frac{1}{\cos x}}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  bis auf die Punkte, wo im Exponenten durch Null geteilt wird. Die Menge der Nullstellen von  $\cos x$

ist

$$R := \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Somit ist  $\mathbb{R} \setminus R$  der Definitionsbereich von  $f$  und  $R$  ist die Menge der Randpunkte des Definitionsbereiches. Für die Bestimmung der Grenzwerte an diesen Randpunkten zerlegen wir  $R$  in

$$R_1 := \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{und} \quad R_2 := \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die linksseitigen Grenzwerte von  $f$  an Punkten  $x_r \in R_1$  sind  $\infty$ , denn

$$\lim_{x \nearrow x_r} \frac{1}{\cos x} = \infty.$$

Gleiches gilt für die rechtsseitigen Grenzwerte von  $f$  an Punkten aus  $R_2$ .

Die rechtsseitigen Grenzwerte von  $f$  an Punkten  $x_r \in R_1$  sind hingegen 0, denn

$$\lim_{x \searrow x_r} \frac{1}{\cos x} = -\infty.$$

Gleiches gilt für die linksseitigen Grenzwerte von  $f$  an Punkten aus  $R_2$ .

2. Zunächst einmal sind die beiden Teilfunktionen von  $f$ ,  $f_1(x) := \ln(ax) = \ln a + \ln x$  auf dem Intervall  $]1, \infty[$  und  $f_2(x) := \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$  auf dem Intervall  $] -\infty, 1[$  stetig, solange  $\ln a$  definiert ist, also für  $a > 0$ .

Näher müssen wir noch den Punkt  $x_0 = 1$  auf Stetigkeit untersuchen. Hier müssen der links- und rechtsseitige Grenzwert von  $f$  übereinstimmen. Der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} f_2(x) = \lim_{x \nearrow 1} x + 1 = 2$$

und der rechtsseitige

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f_1(x) = \lim_{x \searrow 1} (\ln a + \ln x) = \ln a + \ln 1 = \ln a.$$

Setzen wir diese gleich und lösen nach  $a$  auf, erhalten wir, dass  $f$  lediglich für  $a = e^2$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist.

3. Da  $\frac{1}{x}$  für  $x$  gegen 0 gegen  $\pm\infty$  geht, müssen wir das Grenzverhalten von Sinus, Tangens und Sinus Hyperbolicus im Unendlichen betrachten. Da Sinus und Tangens (nicht konstante) periodische Funktionen sind, können wir verschiedene Nullfolgen  $(x_k)$  und  $(y_k)$  finden, sodass  $(f(x_k))$  und  $(f(y_k))$  wie auch  $(g(x_k))$  und  $(g(y_k))$  gegen unterschiedliche Werte konvergieren, womit wir gezeigt hätten, dass  $f$  und  $g$  in 0 nicht stetig ergänzt werden können. Für Sinus Hyperbolicus gilt bereits  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$ , sodass auch  $h$  nicht stetig ergänzt werden kann.

4. Polynome sind stetig. Für die Existenz einer Nullstelle benötigen wir nach dem Zwischenwertsatz also nur noch, dass das Polynom sowohl negative als auch positive Werte annimmt. In der Notation des Zwischenwertsatzes sieht das so aus: Ist  $f(a) = f_1 < 0$  und  $f(b) = f_2 > 0$ , so existiert für jeden Wert zwischen  $f_1$  und  $f_2$ , also auch für den Wert 0, ein  $x_0$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(x_0) = 0$ , unsere gesuchte Nullstelle. Dass jedes Polynom dritten Grades negative wie auch positive Werte annimmt, sehen wir am besten in der Form

$$f(x) = x^3 \left( a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) .$$

Hier sind nämlich die letzten drei Terme in den Klammern Nullfolgen (für  $x$  gegen  $\infty$  und gegen  $-\infty$ ), sodass der Term  $x^3 a_3$  das Vorzeichen bestimmt, wenn  $|x|$  nur hinreichend groß ist. Und für solch große  $x$  haben  $x^3 a_3$  und  $(-x)^3 a_3$  unterschiedliche Vorzeichen.

5. Natürlich gibt es Gegenbeispiele zu dieser Aussage, obwohl sich die meisten Leute unter Unstetigkeit wahrscheinlich Graphen mit Sprungstellen vorstellen. Ein Gegenbeispiel haben wir bereits kennen gelernt:

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ist unstetig in 0, ihr Graph enthält aber keine Lücken, wie man sie sich gemeinhin vorstellt. Vielmehr oszilliert der Graph in der Nähe von  $x = 0$  so stark zwischen  $-1$  und  $+1$  hin und her, dass er jedem Wert zwischen  $-1$  und  $+1$  auf der  $y$ -Achse beliebig nahe kommt.

### Fragen

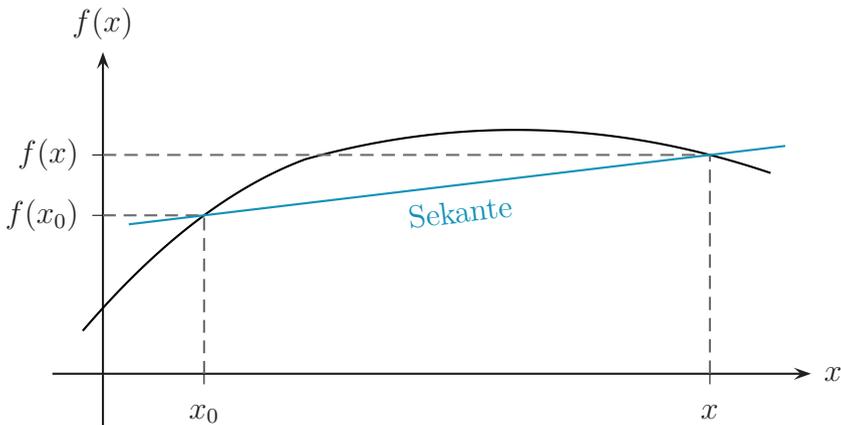
- Was sind links- und rechtsseitige Grenzwerte?
- Definieren Sie Stetigkeit und unterstützen Sie Ihre Erläuterung mit Skizzen.
- Wann sind Kompositionen von Funktionen sicher stetig?
- Was besagt der Zwischenwertsatz? Zeigen Sie Kernpunkte in einer Skizze.
- Definieren Sie die Begriffe Supremum und lokales Minimum.
- Was garantiert, dass eine Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Maximum hat?
- Was ist der Unterschied zwischen Maximum und Supremum?



# 9 Differenziation

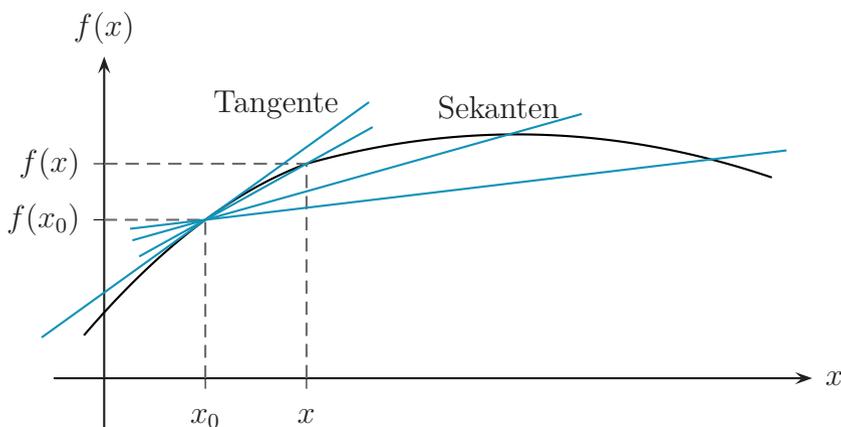
## 9.1 Motivation

Die Variable in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist die Zeit. Beschreibt die Funktion  $f(t)$  einen Prozess in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ , so bleibt der Ablauf des Prozesses nur dann konstant ( $f(t) \equiv \text{const}$ ), wenn keine Veränderungen auftreten. Treten allerdings Änderungen auf (steigt oder fällt die Funktion also), so weiß man durch deren Bestimmung auch, was für zukünftige Zeiten passiert: Die Änderungen sind es ja gerade, die das Geschehen widerspiegeln. In der Mathematik heißt es, dass die momentane Änderung von  $f(t)$ , ausgedrückt über ihre so genannte Steigung, durch die Ableitung — anders gesagt: das Differenzieren — bestimmt wird. Um diese zu verstehen, betrachten wir das folgende Bild, welches die Sekante zwischen zwei Punkten an einem Funktionsgraphen darstellt, deren Steigung wir einfach berechnen können.



Gleichung der Sekante:  $\frac{\Delta f}{\Delta x}x + b$  mit  $\Delta f := f(x) - f(x_0)$  und  $\Delta x := x - x_0$ . Die Steigung  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  der Sekante gibt die Änderung von  $f$  pro  $\Delta x$  an. Möchten wir aber nun nicht die Steigung der Sekante wissen, sondern die Steigung der

Tangente in  $x_0$ , so muss  $\Delta x$  immer kleiner werden. Wir müssen daher den Grenzwert  $x \rightarrow x_0$  betrachten und kommen dadurch zum eigentlichen Kern des Differenzierens, wie es bildlich begreifbar ist:



Was passiert also? Der eine (uns von der Steigung her interessierende) Punkt  $x_0$  wird nicht verändert und wir rücken mit dem anderen Punkt immer näher an  $x_0$  heran. Die auftretenden Sekanten gehen dann — im Laufe des Grenzwertprozesses — in die Tangente über.

Wir sehen, dass sich der Hauptgedanke des Differenzierens, nämlich das Bestimmen der Steigung einer Funktion in einem Punkt, quasi von selbst motiviert. Die Frage nach der Steigung führt nämlich direkt auf die hier gemachten Überlegungen und es ist heute kaum noch zu verstehen, welche grandiose Leistung diese Entdeckungen für Leibniz, Newton und die Mathematisierung der Natur bedeuteten.

## 9.2 Grundlagen zur Differenziation

Die zuvor gegebene Motivation enthält eigentlich alles, was wir zum Verständnis benötigen. Die einzige Aufgabe bleibt, das in den Skizzen dargestellte Vorgehen zu formalisieren, was in der folgenden Definition geschieht. Bitte betrachten Sie zum Verständnis nochmals genau die obige Skizze!

### **Definition** (Differenzierbarkeit, Ableitung)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, definiert auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .  $f$  ist in  $x_0 \in I$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{Differenzialquotient})$$

existiert.  $f'(x_0)$  heißt dann Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

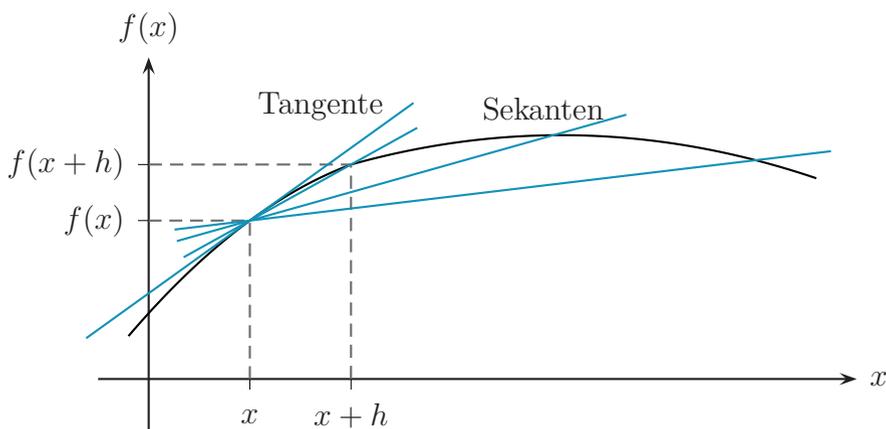
Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar auf  $I$ , wenn  $f$  in allen  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. ◀

Nach unseren Überlegungen gibt die Ableitung also die Steigung von  $f$  im betrachteten Punkt an und beschreibt somit die lokale Änderung von  $f$ .

- Eine alternative Schreibweise — mit der sich zumeist etwas besser rechnen lässt — ist

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Woher dies kommt, sehen wir im folgenden Bild:



Was hat sich zu unserem vorherigen Bild verändert? Nichts (von Substanz). Der betrachtete Punkt heißt diesmal einfach  $x$  anstatt  $x_0$ . Das  $x_0$  konnten wir natürlich vorher auch frei im betrachteten Bereich wählen, aber nun einfach ein  $x$  zu betrachten befreit uns vom Diktat, das ganze immer  $x_0$  zu nennen. Ferner wurde der Abstand von unserem hier untersuchten Punkt  $x$  einfach  $h$  genannt. Alles bleibt also gleich, nur die Bezeichnungen sind etwas bequemer geworden.

- Häufig schreiben wir statt  $f'$  auch  $\frac{df}{dx}$  oder, wenn  $f$  von der Zeit abhängt,  $\dot{f}$  (diese Schreibweise wird von den Physikern sehr gerne verwendet). Dabei haben wir  $f$  bzw.  $f'$  an der Stelle von  $f(x)$  bzw.  $f'(x)$  geschrieben. Dies ist keine Unterlassung, sondern einfach nur eine gebräuchliche Abkürzung.
- In der Definition wird alles auf einem Intervall  $I$  betrachtet. Zumeist wird dies als offen angenommen bzw. gewählt, weil das in der Theorie Vorteile bringt. In den Naturwissenschaften ist dadurch — Ausnahmen bestätigen nur diese Regel — eigentlich kein Ungemach zu erwarten. Es kann allerdings

auch sein, dass wir an der Differenzierbarkeit auf einer Menge interessiert sind, die nicht aus *einem Stück* besteht, wie wir es uns als Intervall vorstellen können. Eine Funktion kann auch auf solchen Mengen differenzierbar sein. Analog zu stückweise stetigen Funktionen sprechen wir auch von stückweise differenzierbaren Funktionen.

### Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^2$ . Es gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

und somit ist

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x .$$

Die Funktion  $f(x) := |x|$  ist in  $x_0 := 0$  nicht differenzierbar, denn

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

ist für  $h \rightarrow 0$  nicht konvergent. ◆

Manchmal wollen wir noch etwas mehr als nur Differenzierbarkeit. Aus theoretischen Gründen ist es nämlich teils notwendig, dass die Ableitung einer Funktion auch wieder angenehme Eigenschaften hat. Den Fall mehrfach differenzierbarer Funktionen werden wir noch behandeln. Oft genügt es aber, wenn die Ableitung einer Funktion wenigstens stetig ist:

### Definition (stetig differenzierbar)

Eine Funktion  $f$  heißt stetig differenzierbar, wenn  $f'$  existiert und  $f'$  selbst wieder eine stetige Funktion ist. ◀

Die von uns wesentlich behandelten Funktionen (wie Exponentialfunktion, Polynome, Sinus, ...) sind stetig differenzierbar, Ausnahmen sind tatsächlich selten. Dennoch ist es beim Beweis von Sätzen wirklich vielfach nötig, diese Eigenschaft zu fordern, damit alles klappt.

## 9.3 Rechenregeln für Ableitungen

Wollen wir mit differenzierbaren Funktionen arbeiten, sind häufig einige Regeln von Vorteil, durch welche das Rechnen erleichtert wird. Diese stellen wir hier, wesentlich ohne Beweis, zusammen.

Wenn  $f$  und  $g$  differenzierbar sind, so sind auch die folgenden Funktionen — wo die Ausdrücke definiert sind — differenzierbar und deren Ableitungen sehen folgendermaßen aus:

$$\left. \begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (c \cdot f)'(x) &= c \cdot f'(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{(Linearität)}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{(Produktregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{(Ableitung der Umkehrfunktion)}$$

Hierbei ist  $c$  eine konstante reelle Zahl.

Die Regeln haben also Namen, die Sie sich dringend merken sollten, denn sie tauchen immer wieder auf. Die ersten beiden Eigenschaften sind Hauptthema der Linearen Algebra und besagen, dass es sich beim Differenzieren um eine lineare Abbildung (auf der Menge der differenzierbaren Funktionen) handelt.

Die letzte Gleichung, welche uns oft eine immense Rechensparnis bietet, wollen wir herleiten. Dazu differenzieren wir beide Seiten der Gleichung  $f(f^{-1}(x)) = x$ , die ja die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  einer Funktion  $f$  charakterisiert ( $f^{-1}$  nimmt dabei die Rolle von  $g$  in oben aufgeführter Kettenregel ein) und wir starten mit

$$(f(f^{-1}(x)))' = (x)'$$

Nach der Kettenregel ist

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

und es folgt durch Umstellen

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Wir wollen dies gleich an einem Beispiel üben.

### Beispiel

Wir berechnen die Ableitung der Wurzelfunktion, indem wir sie als Umkehr-

funktion von  $f(x) := x^2$  wahrnehmen:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \\ f'(x) &= 2x \\ \Rightarrow (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$



In Klausuren soll es vorkommen, dass Sie bestimmte Ableitungen im Kopf (oder in Ihren Unterlagen — wenn zur Klausur erlaubt) haben sollten. Daher geben wir Ihnen einige weitere Ableitungen an:

### Beispiel

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ (\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$



Bitte versuchen Sie, diese Ableitungen zu verstehen. An dieser Stelle wird es auch spätestens Zeit daran zu erinnern, dass die Aufgaben integraler Bestandteil dieses Buches sind. Dort finden Sie weitere Übungen zum Ableiten, die vollständig gelöst sind und einfach nicht umgangen werden sollten. Es geht nämlich noch immer um den Unterschied zwischen dem Kennen und dem Beherrschen des Stoffes.

Wir möchten abschließend noch eine wichtige Bemerkung machen, deren Kenntnis Sie vor vielen Problemen bewahren kann.

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $D \subset \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle  $y \in D$  die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dies besagt aber gerade, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt und wir erhalten als wichtiges Resultat: *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.* Ferner können wir uns nun gut vorstellen, dass differenzierbare Funktionen keine, nennen wir es z. B. bei der Betragsfunktion so, Ecken oder Kanten haben dürfen, um die Kriterien für Differenzierbarkeit anschaulich zu erfüllen.

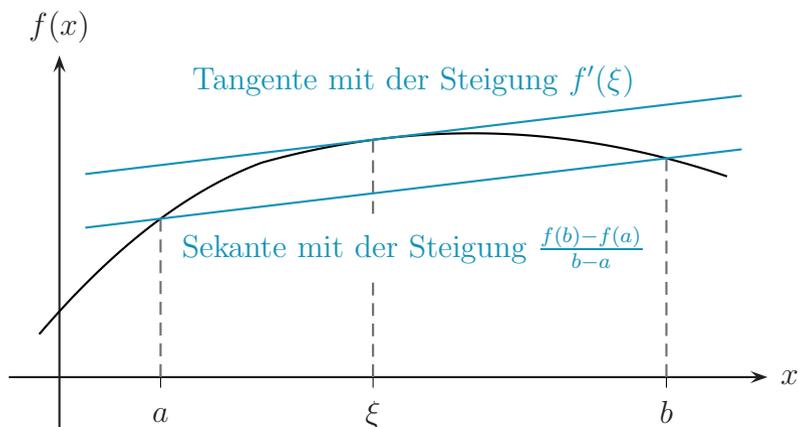
Leider wird dieser Zusammenhang oft nicht gekannt oder vergessen. Das darf nicht passieren; insbesondere sollten Sie sich merken, dass die Umkehrung nicht gilt. Es gibt also durchaus überall stetige Funktionen, die nicht überall differenzierbar sind. Wir werden nachfolgend ein Beispiel behandeln, zu dem wir beabsichtigt keine Skizze zeigen. Manchmal ist es nämlich hilfreich, sich ein eigenes Bild im Kopf zu machen, das wir allerdings textlich unterstützen.

### Beispiel

Denken Sie an die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ . Diese besteht nur aus den Teilen der beiden Winkelhalbierenden in der oberen Halbebene des Koordinatensystems und ist stetig in allen Punkten von  $\mathbb{R}$ , was inzwischen klar sein sollte. Aber was passiert zum Nullpunkt hin, wenn wir die Tangentensteigungen für den linken Ast betrachten? Die Tangenten verlaufen parallel zu diesem Ast, haben also die Steigung  $-1$ , für den anderen Ast haben wir hingegen die Steigung  $+1$ . Offensichtlich ist also der linksseitige Grenzwert des Differenzialquotienten ungleich dem rechtsseitigen, egal, wie nahe wir dem Ursprung kommen. Folglich liegt für  $x = 0$  keine Differenzierbarkeit vor.  $\blacklozenge$

## 9.4 Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus

Wir betrachten folgendes Bild:



Für Intervalle  $[a, b]$  im Definitionsbereich einer Funktion scheint es immer einen Punkt  $\xi \in ]a, b[$  zu geben, für den die Tangente an den Funktionsgraphen parallel zur Sekante durch die zu den Intervallrändern gehörenden Punkte ist. Natürlich ist dies kein Beweis! Dennoch können wir uns den Spaß machen und beliebige andere (differenzierbare) Funktionen zeichnen, die gefundene Aussage bleibt gleich.

### Satz

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $I$ . Sind  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , beliebig, so existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) ■

Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

### Satz

Sei  $M \geq 0$ . Ist  $|f'(x)| < M$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$|f(b) - f(a)| < M(b - a).$$

(Schränkensatz) ■

Dies ist sehr einfach einzusehen, wenn man den Mittelwertsatz akzeptiert und die Voraussetzung  $|f'(x)| < M$  beachtet. Dann gilt

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\xi)| < M.$$

Mit dem Mittelwertsatz lässt sich noch ein weiterer Satz leicht zeigen, der vielfach verwendet werden kann, da er die Monotonie einer Funktion einfach aus dem Bilden der Ableitung erkennbar macht. Und der Wissenschaftler interessiert sich nun mal häufig dafür, ob eine Funktion monoton wächst (z. B. die Brottosozialprodukts-Funktion) oder monoton fällt (z. B. die Kerntemperatur-Funktion eines überhitzten Reaktor-Brennstabes).

### Satz

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf dem Intervall  $I$  und sei  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$ . Dann gilt für  $a, b \in I$

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) .$$

Ist  $f'$  auf ganz  $I$  positiv, so ist  $f$  streng monoton wachsend. Ist hingegen  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in I$ , so gilt

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b) .$$

Ist  $f'$  auf ganz  $I$  negativ, so ist  $f$  streng monoton fallend.  
(Monotoniekriterium) ■

Ist  $f'$  auf ganz  $I$  positiv, so ist nach dem Mittelwertsatz auch  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  positiv. Ist  $b - a > 0$ , so muss also auch  $f(b) - f(a) > 0$  gelten. Ist  $f'$  negativ, so auch  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Aus  $b - a > 0$  folgt damit  $f(b) - f(a) < 0$ , was den Beweis des Monotoniekriteriums beschließt.

Gilt lediglich  $f'(x) \leq 0$  bzw.  $f'(x) \geq 0$ , so können wir mit der gleichen Argumentation  $f(a) \leq f(b)$  bzw.  $f(a) \geq f(b)$  folgern. Ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I$ , so folgt damit, dass  $f$  auf  $I$  konstant ist. Das ist das so genannte *Konstanzkriterium*. Dieses findet besonders in der Physik häufig Anwendung, weil hier alleine über die Kenntnis der Ableitung nahezu alles über die Funktion gesagt wird und in der Physik oft Aussagen über die Ableitung bekannt sind, nicht aber über die Funktion selbst. Denken wir z. B. daran, dass die Geschwindigkeit (Ableitung der Funktion des Ortes) eines Teilchens gleich Null ist, dann erkennen wir jetzt sofort, dass der Ort selbst sich nicht ändert; die ihn beschreibende Funktion bleibt nämlich nach dem Konstanzkriterium konstant.

## 9.5 Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion  $f$  differenzierbar, und ist ihre Ableitung  $f'$  wiederum differenzierbar, so erhält man durch erneutes Differenzieren die so genannte *zweite Ableitung*:

$$f'' := (f')' = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2} .$$

Ist die zweite Ableitung wieder differenzierbar, so können wir die dritte Ableitung bilden und so fort. Falls die Funktion insgesamt  $k$ -mal differenzierbar ist, erhalten wir die  $k$ -te Ableitung

$$f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Es kommt häufig vor, dass  $f^k$  anstatt  $f^{(k)}$  geschrieben wird (zumeist in Prüfungen). Das ist aber grob verwirrend, denn die Klammern um das  $k$  herum sind gerade deshalb da, um Verwechslungen mit der Potenz zu vermeiden.

Es bleibt die Frage, was die 0-te Ableitung ist? Sie wird als

$$f^{(0)} := f$$

definiert, also als die Funktion selbst.

### Beispiel

Hat man in einer physikalischen Anwendung eine zweimal differenzierbare Funktion für die Position eines Teilchens  $x(t)$  von der Zeit  $t$  gegeben — auch als Ortsfunktion bezeichnet — so nennen wir die erste Ableitung die *Geschwindigkeit* des Teilchens

$$v(t) = \dot{x}(t).$$

Die zweite Ableitung heißt *Beschleunigung*:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t).$$

Die üblichen Formelzeichen ergeben sich durch *velocity* und *acceleration*. ◆

Wir kommen später, insbesondere bei den Taylorpolynomen und Extremwerten, noch auf höhere Ableitungen zurück. Dort werden wir dann auch noch diverse Beispiele zur Berechnung sehen.

## 9.6 Ausflug: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion

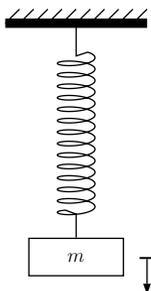
Wir hatten bereits bemerkt, dass es bei der Untersuchung des Geschehens in Natur und Technik oft vorkommt, dass uns dessen Beschreibung nur über eine Funktion und ihre Ableitung(en) gelingt. So interessieren uns bei einem Teilchen (wie oben bereits behandelt) zumeist die Position (die Ortsfunktion), die Geschwindigkeit (Ableitung der Ortsfunktion) und die Beschleunigung, die dieses erfährt (Ableitung der Ableitung der Ortsfunktion). Suchen wir nun die Ortsfunktion selbst, sind uns aber über eine Gleichung (oder eine Messung)

nur die Ableitungen der gesuchten Ortsfunktion zugänglich, müssen wir genau diese Gleichung verwenden, um unser Ziel zu erreichen. Bei der mathematischen Beschreibung natürlicher Prozesse treten sehr häufig solche so genannten Differenzialgleichungen auf. Dies sind also — wir fassen zusammen — Gleichungen, in denen eine zu bestimmende Funktion zusammen mit ihren Ableitungen vorkommt oder gar nur Ableitungen der Funktion selbst. Dies zeigen wir im Folgenden exemplarisch und stellen damit den Sinus und Kosinus auf eine feste mathematische Grundlage. Für weitere Überlegungen verweisen wir auf die Kapitel zum Thema Differenzialgleichungen im Teil zur Linearen Algebra.

Bitte beachten Sie, dass unsere Ausführungen im hier gesetzten Rahmen lückenhaft bleiben müssen. So machen wir u. a. in heimlicher Stille vom Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differenzialgleichungen Gebrauch, der hier eigentlich nicht Thema ist. Dennoch halten wir unseren Ansatz für voll vertretbar, denn durch das Akzeptieren einiger mathematischer Tatsachen wird klar, was sonst nur mit einem deutlich größeren Apparat erreichbar gewesen wäre, der an dieser Stelle wohl mehr verschleiert als enthüllt. Es handelt sich aber an dieser Stelle wirklich nur um einen Ausflug, der uns neue Einsichten bietet, ohne dass wir am Ausflugsort verweilen möchten.

### 9.6.1 Schwingung eines Pendels

Wir betrachten ein Federpendel idealisiert, d. h. ohne Störungen wie Reibung, mit der Masse  $m$  und der Federkonstanten  $k$ .



Die Kraft  $F$  bei der Auslenkung  $y(t)$  des Pendels ist proportional zu  $y(t)$  und zu  $k$ , also  $F(t) = -ky(t)$  (das Vorzeichen entspringt wesentlich einer Konvention). Durch das zweite Newtonsche Gesetz folgt  $F = m\ddot{y}$  und damit

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Dies ist eine so genannte Differenzialgleichung (homogen, linear, zweiter Ordnung; mehr dazu im entsprechenden Kapitel). Da hier ein Pendel beschrieben wird ist klar, dass eine periodische Lösungsfunktion  $y(t)$  zu erwarten ist.

Wir behandeln ab jetzt den einfachen Fall  $m = k = 1$ , also

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Wichtig für die Bewegung des Pendels sind

- die Anfangsauslenkung  $y(0)$  und
- die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{y}(0)$

Sind die Anfangswerte vorgegeben, so hat das so genannte Anfangswertproblem — also die Differenzialgleichung zusammen mit den Anfangswerten — genau eine Lösung, wie aus der Theorie der Differenzialgleichungen gelernt werden kann. Wir wählen besonders einfache Anfangswerte

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1 \quad \text{einerseits und andererseits} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Die Lösungsfunktionen nennen wir

$$y(t) = \sin t \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \cos t.$$

## 9.6.2 Eigenschaften von Sinus und Kosinus

Bitte beachten Sie, dass unsere Aussagen erneut wesentlichen Gebrauch von der Theorie der Differenzialgleichungen machen. Erschrecken Sie also nicht, wenn Ihnen einige — als Fakten präsentierte — Aussagen neu erscheinen.

Nach der Differenzialgleichung, die Sinus und Kosinus erfüllen, gilt (Punkte an den Funktionen bedeuten Ableitungen)

$$(\sin)^{\bullet\bullet}(t) = -\sin t \quad \text{und} \quad (\cos)^{\bullet\bullet}(t) = -\cos t \quad (9.1)$$

und nach den Anfangswerten

$$\sin 0 = 0, \quad (\sin)^{\bullet}(0) = 1 \quad \text{und} \quad \cos 0 = 1, \quad (\cos)^{\bullet}(0) = 0.$$

Leiten wir jeweils beide Seiten von (9.1) ab, sehen wir, dass die Ableitung  $g(t) := (\sin)^{\bullet}(t)$  von Sinus und die Ableitung  $h(t) := (\cos)^{\bullet}(t)$  von Kosinus die gleiche Differenzialgleichung erfüllen wie Sinus und Kosinus auch. Ihre Anfangswerte sind

$$g(0) = (\sin)^{\bullet}(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{g}(0) = (\sin)^{\bullet\bullet}(0) = -\sin 0 = 0 \quad \text{sowie}$$

$$h(0) = (\cos)^{\bullet}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{h}(0) = (\cos)^{\bullet\bullet}(0) = -\cos 0 = -1.$$

$g(t)$  erfüllt also das gleiche Anfangswertproblem wie  $\cos t$  und muss mit diesem identisch sein. Ähnlich erfüllt  $h(t)$  das gleiche Anfangswertproblem wie  $-\sin t$  und muss damit identisch sein. Wir haben somit herausgefunden, dass

$$(\sin)'(t) = \cos t \quad \text{und} \quad (\cos)'(t) = -\sin t .$$

Ebenso erfüllt  $-\sin(-t)$  das gleiche Anfangswertproblem wie  $\sin t$  und  $\cos(-t)$  erfüllt das gleiche wie  $\cos t$ . Somit gilt auch

$$\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t & (\text{Sinus ist ungerade}), \\ \cos(-t) &= \cos t & (\text{Kosinus ist gerade}). \end{aligned}$$

Die Ableitung von  $\sin^2 t + \cos^2 t$  ist (nach der Kettenregel oder Produktregel, ganz wie Sie wollen)  $2 \sin t \cos t + 2 \cos t(-\sin t) = 0$ . Somit ist  $\sin^2 t + \cos^2 t$  konstant und diese Konstante können wir bei  $t = 0$  bestimmen, denn dafür kennen wir bereits die Werte:  $\sin^2 0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$ . Also gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 .$$

Wir wollen unsere Untersuchungen nicht zu weit führen und gehen nun zurück zum Anfang unserer Betrachtungen zu Sinus und Kosinus, nach denen diese Funktionen als Lösungen einer Schwingungsgleichung periodisch sein müssen; die Periode ist hier jeweils  $2\pi$ . Auch dies lässt sich natürlich beweisen. Für die Funktionsgraphen und einige andere Informationen der genannten Funktionen verweisen wir Sie zurück auf das Kapitel über wichtige Funktionen.

### 9.6.3 Exponentialfunktion

Noch eine weitere Funktion lässt sich in diesem Ausflug genauer behandeln: Die Exponentialfunktion ist die Funktion, welche sich beim Ableiten selbst reproduziert, also die Differenzialgleichung

$$y - y' = 0$$

erfüllt. Diese ist die Funktion im Bereich der Ingenieur- und Naturwissenschaften, welche bei Wachstums- und Zerfallsprozessen die Hauptrolle spielt. Wiederum erhalten wir durch Vorgabe von Anfangswerten, diesmal  $y(0) = 1$ , eine eindeutige Lösungsfunktion des Anfangswertproblems, nämlich

$$y(x) = \exp x = e^x .$$

## 9.7 Die Regel von l'Hospital

Inzwischen haben wir nun gute Kenntnisse im Bereich des Ableitens und wissen bereits einiges über die Anwendungsmöglichkeiten der erworbenen Fähigkeiten. Es gibt aber noch ein wenig mehr, das wir wissen sollten, nämlich eine einfache Regel zum Berechnen von Grenzwerten von Verhältnissen. Wenn wir nämlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnen möchten, aber sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion gegen 0 gehen, was erwarten wir dann? Existiert dennoch ein Grenzwert? Wie untersuchen wir dies? Nun, wir machen von dem Erlernten über die Bedeutung der Ableitung Gebrauch: Nahe bei  $x_0$  werden  $f$  und  $g$  durch ihre Tangenten mit Steigungen  $f'(x_0)$  bzw.  $g'(x_0)$  approximiert. Je näher wir also an diesen Punkt  $x_0$  kommen, desto weniger Unterschied gibt es zwischen den Funktionen und der Approximation. Demnach können wir einsehen, dass auch das Verhältnis der Funktionen im Grenzwert dem Verhältnis ihrer Tangenten an  $x_0$  entspricht. Und letzteres ist sehr einfach zu bestimmen: Die Tangentengleichungen sind

$$t_f(x) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{und} \quad t_g(x) = g'(x_0)(x - x_0) ,$$

denn die Ableitungen geben ja gerade die Steigungen der Funktionen in  $x_0$  an und nach unserer Voraussetzung haben beide Funktionen bei  $x_0$  eine Nullstelle. Für das Verhältnis der Tangenten folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{t_f(x)}{t_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

Wir können also in solch einem Fall die Funktionen durch ihre Ableitungen ersetzen. Diesen Sachverhalt hat Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital (1661 – 1704) herausgefunden und exakt bewiesen, dessen Satz nun folgt, natürlich in einer präziseren und allgemeineren Variante als wir ihn gerade erdacht haben.

### Satz

Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $I$  differenzierbar, und für  $x_0 \in \mathbb{R}$  gelte entweder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Ferner sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

(Regel von l'Hospital) ■

Den Fall, in dem  $f$  und  $g$  gegen unendlich gehen, haben wir oben indirekt behandelt, denn er ergibt sich, wenn wir die Kehrwerte der Funktionen betrachten:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Mit  $f(x), g(x) \rightarrow \infty$  gehen nun sowohl der Zähler  $\frac{1}{g(x)}$  wie der Nenner  $\frac{1}{f(x)}$  gegen 0 und das kennen wir bereits.

In der Formulierung des Satzes sehen wir weiterhin, dass wir  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  nicht direkt durch  $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$  ersetzen dürfen, sondern durch  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , und das auch nur, wenn jener Term definiert ist. Dennoch kommt diese Regel tatsächlich oft auch bei Berechnungen in der Praxis vor. Viele Grenzwerte bekommt man ohne ihre Verwendung gar nicht heraus; also dringend merken.

### Beispiel

- Wir starten mit einem Standardbeispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

- Das Prinzip ist schon aus dem Satz selbst klar. Wir wollen daher noch etwas (nicht offensichtliches) untersuchen, was uns auch neue Einblicke beim Bilden einer speziellen Ableitung liefert. Wir betrachten

$$\lim_{x \searrow 0} x^x$$

und machen zuerst folgende Umformung  $x^x = e^{x \cdot \ln x}$ . Da die Exponentialfunktion stetig ist, können wir den Limes in den Exponenten ziehen und uns auf diesen konzentrieren:

$$x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Zähler und Nenner divergieren hier für den betrachteten Grenzwert und nach l'Hospital folgt:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0.$$

Insgesamt ist  $\lim_{x \searrow 0} x^x = e^0 = 1$ .



## 9.8 Aufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitung des natürlichen Logarithmus  $g(x) := \ln x$ , indem Sie die Funktion als Umkehrabbildung der Exponentialfunktion  $f(x) := e^x$  auffassen.
2. Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist und dass die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist.
3. Differenzieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) := \sqrt{1 - \cos x}, \quad f_2(x) := \ln \sqrt{x}, \quad f_3(x) := e^{(e^x)}, \quad f_4(x) := \arccos x.$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$e^x \geq 1 + x.$$

5. Die Exponentialfunktion  $y(x) := e^x$  genügt dem Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Leiten Sie daraus die Eigenschaften  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  sowie  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  her.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Hilfsfunktion  $f(x) := y(x)y(-x)$ .

6. Überprüfen Sie jeweils, ob die Voraussetzungen für den Satz von l'Hospital erfüllt sind und berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sinh x} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k}, \quad k > 0. \end{aligned}$$

## 9.9 Lösungen

1. Es ist  $g = f^{-1}$  und damit

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

2. Gerade Funktionen  $f$  sind durch die Gleichung  $f(-x) = f(x)$  charakterisiert. Leiten wir diese Gleichung ab:

$$-f'(-x) = f'(x),$$

so erhalten wir die charakterisierende Gleichung für ungerade Funktionen.  $f'$  ist also ungerade.

Differenzieren wir andererseits die Gleichung  $g(-x) = -g(x)$ , welche ungerade Funktionen beschreibt, so erhalten wir

$$-g'(-x) = -g'(x) ,$$

was uns nach Kürzen des Vorzeichens  $g'$  als gerade Funktion überführt.

3. Vorweg zur Erinnerung die Ableitung der Wurzelfunktion:  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

$$f'_1(x) = (\sqrt{1 - \cos x})' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \cos x}} \cdot (1 - \cos x)' = \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$f'_2(x) = (\ln \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$f'_3(x) = (e^{(e^x)})' = e^{(e^x)} \cdot (e^x)' = e^{(e^x)} \cdot e^x = e^{(e^x+x)}$$

$$\begin{aligned} f'_4(x) &= (\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

4. Für  $x < 0$  wählen wir die Intervallgrenzen beim Mittelwertsatz zu  $a := x$  und  $b := 0$ :

$$\begin{aligned} e^\xi &= \frac{e^0 - e^x}{0 - x} = \frac{1 - e^x}{-x} \\ \Rightarrow -xe^\xi &= 1 - e^x \\ \Rightarrow e^x &= 1 + xe^\xi \end{aligned}$$

Schließlich ist für negative  $x$   $xe^\xi > x$ .

Für  $x > 0$  wählen wir die Intervallgrenzen beim Mittelwertsatz zu  $a := 0$  und  $b := x$ :

$$\begin{aligned} e^\xi &= \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} \\ \Rightarrow xe^\xi &= e^x - 1 \\ \Rightarrow e^x &= 1 + xe^\xi \end{aligned}$$

Schließlich ist wiederum für positive  $x$ :  $xe^\xi > x$ .

Fehlt noch der Fall  $x = 0$ , wo Gleichheit herrscht:

$$e^0 = 1 + 0 .$$

5. Wir leiten zunächst einmal die Hilfsfunktion ab:

$$f'(x) = y'(x)y(-x) + y(x)(-y'(-x)) = y(x)y(-x) - y(x)y(-x) = 0 .$$

Somit ist  $f$  konstant und mit dem Anfangswert erhalten wir die Konstante  $f(0) = y(0)y(-0) = 1$ . Wir haben also den ersten Teil der Aufgabe gezeigt, denn

$$e^{-x} = y(-x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{e^x}.$$

Angenommen, es gäbe ein  $x_0 > 0$  mit  $y(x_0) \leq 0$ . Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es dann eine Nullstelle  $b$  mit  $0 < b \leq x_0$ . Falls es mehrere solcher Nullstellen gibt, nehmen wir die kleinste, sodass  $y$  auf dem Intervall  $[0, b[$  positiv ist. (Beachten Sie, dass  $y$  differenzierbar und damit auch stetig ist.) Der Mittelwert sagt nun aber ein  $\xi \in ]0, b[$  mit

$$y'(\xi) = \frac{y(b) - y(0)}{b - 0} = \frac{-1}{b} < 0$$

voraus, womit nach der Differenzialgleichung auch  $y'(\xi) = y(\xi) < 0$  wäre. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $y$  auf ganz  $[0, b[$  positiv ist. Somit ist  $y(x) > 0$  für alle  $x > 0$ .

Für  $x < 0$  ergibt sich die Behauptung dann einfach daraus, dass wir bereits wissen:  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Der Fall  $x = 0$  ist schließlich durch den Anfangswert direkt geregelt.

6. Um die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital zu prüfen, vergleichen wir jeweils die Grenzwerte von Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty$$

Demnach sind überall die Voraussetzungen erfüllt und wir dürfen versuchen, die Grenzwerte über die Ableitungen von Zähler und Nenner zu

bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x^2} = ? \quad (\text{siehe unten})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = ? \quad (\text{siehe unten})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sinh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cosh x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^k} = 0$$

Beim zweiten Bruch haben wir nach der Anwendung des Satzes von l'Hospital ähnliche Schwierigkeiten wie zuvor, denn die Ableitungen von Zähler und Nenner konvergieren beide gegen 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos x^2 = 0 .$$

Somit erfüllt der Bruch der Ableitungen erneut die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital und wir können einfach den Satz noch einmal anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2} = \frac{1}{2} .$$

Beim dritten Bruch bringt uns selbst nochmaliges Anwenden des Satzes von l'Hospital nicht weiter. Wir erhalten lediglich, womit wir begonnen haben. Vielleicht hilft uns die Darstellung der Hyperbolicusfunktionen mit der Exponentialfunktion weiter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})} = 1 .$$

### Fragen

- Was ist eine Sekante, was eine Tangente?
- Wie ist der Differenzialquotient einer Funktion definiert?
- Wann existiert für eine Funktion keine Ableitung?
- Kennen Sie stetig differenzierbare Funktionen?
- Was besagt die Kettenregel?
- Skizzieren Sie die Aussagen des Mittelwertsatzes und nennen Sie seine Voraussetzungen.
- Beweisen Sie den Schrankensatz.
- Wie ist die dritte Ableitung einer entsprechend oft differenzierbaren Funktion definiert?
- Was wissen Sie über Differenzialgleichungen und ihre Anwendung bei Schwingungsphänomenen?
- Was steckt als Idee hinter der Regel von l'Hospital?



# 10 Potenzreihen

## 10.1 Motivation

Durch Potenzreihen stellen wir hier eine natürliche Verallgemeinerung der zuvor bereits betrachteten Reihen vor. Es handelt sich dabei allerdings nicht um die Befriedigung eines puren Abstraktionswunsches, sondern um etwas wirklich Nützliches. Der Mathematiker empfindet alleine bei der Betrachtung solcher Objekte Freude, als Anwender ist aber noch mehr interessiert. So wird sich zeigen, dass die Potenzreihen den Schlüssel zur Approximation von Funktionen darstellen. So lassen sich zahlreiche unhandliche Funktionen durch Potenzreihen darstellen, was dann viele Überlegungen vereinfacht. Dies wird bei den danach behandelten Taylorreihen besonders deutlich, die ein höchst wichtiger Spezialfall von Potenzreihen sind.

## 10.2 Grundlegendes zu Potenzreihen

### Definition (Potenzreihe)

Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  mit  $a_k, x, x_0 \in \mathbb{K}$  heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$ . ◀

### Beispiel

Die einfachste und zugleich eine der wichtigsten Potenzreihen kennen wir bereits mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

Hier ist der Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , das  $x$  ist wirklich eine reelle Variable

und alle Koeffizienten sind  $a_k = 1$ . ◆

Eine Potenzreihe definiert uns eine Funktion in  $x$ , die überall dort definiert ist, wo die Potenzreihe konvergiert. Letzteres ist zumindest immer im Entwicklungspunkt der Fall, denn hier ist

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_0 - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 0^0 = a_0 .$$

Wir wollen mit Hilfe des Quotientenkriteriums versuchen, weitere Konvergenzpunkte zu finden. Das klingt auf den ersten Blick vielleicht überraschend, denn bisher hatten wir bei den Konvergenzuntersuchung mittels der Konvergenzkriterien für Reihen keine Variablen im Spiel. Wir vertrauen aber darauf, dass die Kriterien gut funktionieren und wir die Variable bei einer Untersuchung nicht verlieren. Durch Umsetzung dieser Idee kommen wir auf die folgenden Koeffizienten, welche wir beim Quotientenkriterium untersuchen müssen:  $b_k := a_k (x - x_0)^k$ . Damit gilt

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \left| \frac{a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}}{a_k (x - x_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x - x_0| .$$

Somit sind die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums für alle  $x$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x - x_0| < 1,$$

also mit

$$|x - x_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| =: R$$

erfüllt. Ist hingegen  $|x - x_0| > R$ , so ist  $\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| > 1$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit können die  $b_k$  nicht einmal mehr eine Nullfolge bilden und die Reihe muss divergieren. Zusammenfassend haben wir Folgendes gezeigt:

### Satz

Sei  $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Potenzreihe und

$$R := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| .$$

Dann konvergiert die Potenzreihe für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < R$  und divergiert für alle  $x$  mit  $|x - x_0| > R$ . ■

Da die obigen Untersuchungen auch für komplexe Potenzreihen gelten, also für  $x \in \mathbb{C}$ , konvergiert eine Potenzreihe innerhalb eines Kreises mit Radius  $R$  um  $x_0$  in der komplexen Ebene und divergiert außerhalb des Kreises. Aus diesem Grund wird  $R$  *Konvergenzradius* genannt.

Für  $|x - x_0| = R$  können wir keine allgemeinen Aussagen treffen. Dies muss von Fall zu Fall separat untersucht werden.

Wir wollen uns nun noch zwei Beispiele ansehen, wobei das erste besonders ausführlich nochmals auf die Erläuterung eingeht, die zu obigem Satz geführt hat.

### Beispiel

Wir untersuchen die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$  als reelle Potenzreihe. Hier ist  $x_0 = 0$  und  $a_k = \frac{1}{k2^k}$ . Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  stellt dies eine gewöhnliche Reihe mit den Reihengliedern  $b_k := a_k(x - x_0)^k = \frac{x^k}{k2^k}$  dar. Anwenden des Quotientenkriteriums liefert:

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| &= \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}}}{\frac{|x|^k}{k2^k}} \\ &= \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} \\ &= \frac{|x|}{2} \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{2} \end{aligned}$$

Das Quotientenkriterium ist also erfüllt — und damit die Potenzreihe konvergent — falls  $|x| < 2$  gilt. Nun sind für die Randpunkte des Konvergenzintervalls, also für  $|x| = 2$ , zwei Fälle zu unterscheiden:

- $x = 2$ : Die Potenzreihe ist an dieser Stelle die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ , also divergent.
- $x = -2$ : Die Potenzreihe ist an dieser Stelle die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ , welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

Für  $|x| > 2$  stellen wir fest, dass die Reihenglieder keine Nullfolge bilden und die Potenzreihe deshalb divergiert.  $\blacklozenge$

### Beispiel

Die reelle Potenzreihe  $P(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$  hat den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und den Konvergenzradius

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1 .$$

Die Randpunkte des Konvergenzkreises (bzw. des Konvergenzintervalls) sind  $-1$  und  $+1$ . Bei  $x := -1$  wird die Potenzreihe zur alternierenden harmonischen Reihe, welche konvergent ist. Bei  $x := +1$  wird sie zur divergenten harmonischen Reihe. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau auf dem Intervall  $[-1, 1[$ . ♦

Wir müssen beachten, dass nach unseren Überlegungen auch  $R = \infty$  zulässig ist. Dies ist ein besonders wichtiger Fall, denn damit haben wir durch diverse Potenzreihen auf ganz  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  definierte Funktionen gegeben. Ferner ist von größter Bedeutung, dass zahlreiche Funktionen durch Potenzreihen gegeben sind, wie nachstehend angegeben.

Die gerade erwähnten (sehr wichtigen) Funktionen sind jeweils für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegeben und werden im Beispiel präsentiert. Z. B. für die Exponentialreihe ist sehr leicht zu berechnen, dass der Konvergenzradius  $R = \infty$  ist. Beachten Sie bitte ferner, dass die folgenden Gleichungen tatsächlich auch als *Definitionen* für die genannten Funktionen zu sehen sind. Auch auf andere Art und Weise wie über die Differenzialgleichungen, erhalten wir diese Funktionen. Aber am Ende handelt es sich bei allen Darstellungen wirklich immer um die gleichen Funktionen mit den gleichen Eigenschaften, z. B. denen der Periodizität für Sinus und Kosinus. Nun aber endlich zu den Darstellungen der Funktionen als Potenzreihe:

### Beispiel

1. Die Exponentialreihe:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

2. Die Sinusreihe:

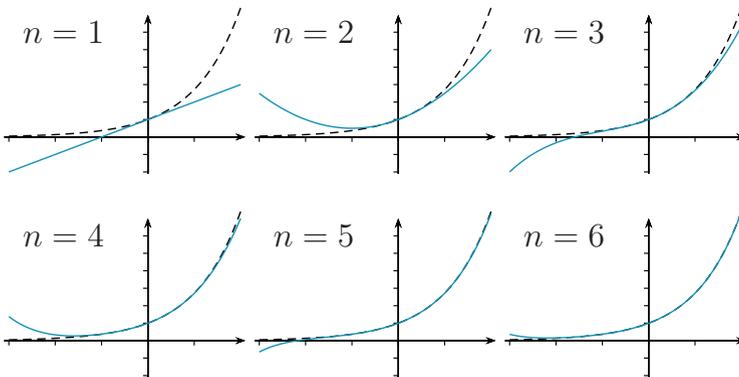
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

3. Die Kosinusreihe:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$



Welchen Entwicklungspunkt  $x_0$  haben wir hier verwendet? Richtig,  $x_0 = 0$ .



Exponentialfunktion und die Annäherung ihrer Potenzreihe für verschiedene Summanden ( $x_0 = 0$ )

Wir werden bei den Taylorreihen, also schon im folgenden Kapitel, sehen, wie wir die obigen Darstellungen schon ganz alleine dadurch erhalten, dass wir unser Wissen aus der Schule über die Exponentialfunktion, den Sinus und Kosinus anwenden; der Kreis wird sich dann also in gewisser Weise schließen.

## 10.3 Aufgaben

- Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

- Von einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 2$  sei bekannt, dass sie bei  $x = -1$  absolut konvergiere und bei  $x = -3$  divergiere. Folgern Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe an den Punkten  $-2$ ,  $2$ ,  $5$  und  $8$ .

3. Untersuchen Sie die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

auf Konvergenz. Gehen Sie besonders auf die Randpunkte des Konvergenzkreises ein.

4. Den Konvergenzradius haben wir über das Quotientenkriterium definiert. Leiten Sie analog dazu eine Formel für den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums her.
5. Für zwei Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - \tilde{x}_0)^k$  mit beliebigen Entwicklungspunkten gelte  $a_k \leq b_k$  für alle  $k > K$ . Was bedeutet das für die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 10.4 Lösungen

1. Bei der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k}$  ist der Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ . Weiterhin ist  $a_k = \frac{1}{k}$  und damit der Konvergenzradius

$$R := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1 .$$

Die zweite Reihe schreiben wir erst einmal in die Standardform um:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^k .$$

Nun können wir leicht erkennen, dass der Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und  $a_k = (-2)^k$  sind. Daraus folgt für den Konvergenzradius

$$R := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} .$$

Bei der dritten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist ebenfalls der Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .  $a_k = \frac{1}{k!}$ , sodass

$$R := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty .$$

2. Da die Potenzreihe bei  $x = -1$  konvergiert, muss dieser Punkt innerhalb oder am Rand des Konvergenzintervalls liegen. Der Abstand des Punktes vom Entwicklungspunkt ist 3, also ist der Konvergenzradius  $R \geq 3$ . Die

Divergenz der Reihe bei  $x = -3$  gibt uns eine obere Schranke für den Konvergenzradius:  $R \leq 5$ . Somit konvergiert die Reihe im Intervall  $] -1, 5[$ , speziell bei 2, absolut. Außerhalb des Intervalls  $[-3, 7]$ , beispielsweise bei 8, divergiert die Reihe hingegen. Ungewiss bleiben die Bereiche  $[-3, -1]$  und  $[5, 7]$ , da wir nicht wissen, wie viel davon zum Konvergenzintervall gehört. Wir können somit keine Aussage über das Konvergenzverhalten in den Punkten  $-2$  und  $5$  machen. Von  $x = 5$  wissen wir zwar, dass er, wenn nicht innerhalb des Konvergenzintervalls, dann zumindest an dessen Rand liegt. Doch können wir andererseits das Konvergenzverhalten an den Randpunkten nicht pauschal vorhersagen.

3. Entwicklungspunkt und Konvergenzradius von komplexen Potenzreihen ergeben sich genauso wie bei reellen Potenzreihen. Der Entwicklungspunkt von  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist  $x_0 = 0$  und  $a_k = 1$ , sodass sich ein Konvergenzradius von  $R = 1$  ergibt. Die Potenzreihe konvergiert also schonmal innerhalb des Einheitskreises  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$  absolut und divergiert außerhalb auf  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > 1\}$ . Die Menge der Randpunkte  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$  müssen wir extra untersuchen. Solch ein  $x$  in die Potenzreihe eingesetzt führt dazu, dass die Summanden  $x^k$  der Reihe sämtlich auf dem Einheitskreis liegen. Insbesondere bilden die Summanden keine Nullfolge, was eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist. Somit divergiert die Potenzreihe auch auf dem Kreisrand, also auf ganz  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \geq 1\}$ .
4. Die Koeffizienten für die Betrachtungen bezüglich des Wurzelkriteriums sind wiederum  $b_k := a_k(x - x_0)^k$ . Es ist

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{|a_k(x - x_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} |x - x_0|.$$

Die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums sind für alle  $x$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |x - x_0| < 1,$$

also mit

$$|x - x_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} =: R$$

erfüllt. Ist hingegen  $|x - x_0| > R$ , so ist  $\sqrt[k]{|b_k|} > 1$  und damit auch  $|b_k| > 1$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit können die  $b_k$  keine Nullfolge bilden und die Reihe muss divergieren. Der Konvergenzradius kann somit auch über die Formel

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

berechnet werden.

5. Wir verwenden das Majorantenkriterium für Reihen. Dieses haben wir zwar nicht explizit für Potenzreihen formuliert, aber Potenzreihen stellen lediglich eine spezielle Form von Reihen dar, welche noch von einer Variablen  $x$  abhängt. Setzen wir für  $x$  bestimmte Werte ein, so erhalten wir „normale“ Reihen, auf die wir das Majorantenkriterium anwenden können:

Seien  $R$  der Konvergenzradius von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  und  $\tilde{R}$  derjenige von  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-\tilde{x}_0)^k$ . Wir wählen beliebig  $x_1$  und  $\tilde{x}_1$  mit

$$|x_1 - x_0| = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0| .$$

$x_1$  soll also den gleichen Abstand vom Entwicklungspunkt  $x_0$  der ersten Reihe haben wie  $\tilde{x}_1$  vom Entwicklungspunkt  $\tilde{x}_0$  der zweiten Reihe. An diesen beiden Stellen vergleichen wir die beiden Reihen, also  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1 - x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)^k$ , mit dem Majorantenkriterium: Für die Summanden gilt

$$|a_k(x_1 - x_0)^k| = |a_k||x_1 - x_0|^k \leq |b_k||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0|^k = |b_k(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)^k| .$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  im Punkt  $x = x_1$  absolut, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - \tilde{x}_0)^k$  im Punkt  $x = \tilde{x}_1$  absolut konvergiert.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  kann aber durchaus noch in weiter vom Entwicklungspunkt entfernten Punkten konvergieren. Insgesamt haben wir damit  $R \geq \tilde{R}$  gezeigt.

### Fragen

- Definieren Sie eine allgemeine komplexe Potenzreihe.
- Nennen Sie Standardbeispiele.
- Was lässt sich an den Rändern des Konvergenzintervalles über die Konvergenz der Potenzreihe aussagen?
- Erklären Sie die Berechnung des Konvergenzradius über das Quotientenkriterium.
- Wie lautet die Kosinusreihe?



# 11 Taylorpolynome, Taylorreihen und Extremwerte

## 11.1 Motivation

Der Begriff der Taylorreihe begegnete uns bereits kurz in der Motivation zum letzten Kapitel. Die tiefe Bedeutung der nach Brook Taylor (1685 – 1731) benannten Reihen zeigte sich erst Jahre nach seinem Tod. Ihr Wert liegt wesentlich darin begründet, dass bereits das Taylorpolynom (über dem Summenzeichen steht dann nicht  $\infty$ , sondern eine endliche natürliche Zahl  $n$ ) unter gewissen Voraussetzungen eine zuvor sehr viel kompliziertere Funktion approximiert. Viele Überlegungen in der Physik und Mathematik sind dadurch erst möglich geworden.

Stellen wir uns also vor, dass wir zur Beschreibung eines Prozesses eine Funktion gefunden haben, die in keiner Weise dazu animiert, mit ihr arbeiten zu wollen. Auch weitere Berechnungen erscheinen mit ihr aussichtslos, denn Sie ist einfach zu kompliziert. Genau in solchen Fällen, die häufiger auftreten als allgemein gedacht, kommt das Taylorpolynom ins Spiel, denn mit diesem können wir — unter gewissen Voraussetzungen — ein simples Polynom zur weiteren Betrachtung verwenden, welches der eigentlichen Funktion selbst sehr nahe kommt. Natürlich ist allgemein ein Fehler zu erwarten, der den Unterschied zwischen der Funktion und dem Taylorpolynom ausmacht. Dieser wird aber im günstigen Fall sehr klein und lässt sich abschätzen. Wenn das alles gut klappt, haben wir nur noch Polynome zu untersuchen. Und diese (samt ihrer Eigenschaften) kennen wir recht gut.

Das Taylorpolynom ist, was wirklich auf den ersten Blick unerwartet scheint, direkt mit dem Auffinden von Extremwerten (insbesondere Maxima und Minima) von Funktionen verknüpft. Daher wurden diese auch nicht im Abschnitt zur Differenziation behandelt.

Dass Funktionen Maxima und Minima haben können, welche am gezeichneten Funktionsgraphen meist gut erkennbar sind, ist allgemein bekannt. Wichtig für

uns ist aber ihre Bedeutung, die kaum zu hoch eingeschätzt werden kann, interessieren wir uns doch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften dafür, wo z. B. der höchste Wirkungsgrad bei einer Verbrennungsmaschine liegt (Maximum) oder welcher Weg die kürzeste Zeit erlaubt (Minimum).

## 11.2 Taylorpolynom und Taylorreihe

### 11.2.1 Das Taylorpolynom

Um zum Taylorpolynom zu kommen, müssen wir erst einige Vorüberlegungen anstellen. Dazu berechnen wir zuerst höhere Ableitungen einer bestimmten Funktion, was wir gleich als weitere Übung betrachten können:

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - x_0)^k$ , beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_0)^k \\ f'(x) &= k(x - x_0)^{k-1} \\ &\vdots \\ f^{(k-1)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) \\ f^{(k)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 =: k! \\ f^{(k+1)}(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

An der Stelle  $x = x_0$  gilt, dass alle Ableitungen bis auf  $f^{(k)}(x_0)$  verschwinden. Wir können dies auch in der folgenden Form notieren:

$$f^{(i)}(x_0) = \delta_{ik} k!$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$ , wobei wir

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

definieren. Dies ist das in vielen Fällen praktische *Kronecker-Symbol*, benannt nach dem deutschen Mathematiker Leopold Kronecker (1823 – 1891).

Die Darstellung  $f^{(i)}(x_0) = \delta_{ik} k!$  soll Sie keineswegs verwirren. Es handelt sich dabei einfach nur um eine zusammenfassende Schreibweise, durch die man das Ergebnis einer längeren Rechnung in komprimierter Weise angeben kann.

Betrachten wir aber nun ein beliebiges Polynom der Form

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

mit  $a_0, \dots, a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ . Mit Hilfe des Ergebnisses der ersten Rechnung können wir die  $i$ -te Ableitung von  $p$  an der Stelle  $x_0$  berechnen ( $i \leq n$ ) und erhalten

$$p^{(i)}(x_0) = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{ik} k! = a_i i! .$$

Wir nennen den Index nun wieder  $k$  und erhalten die Gleichung

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} .$$

und durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  schließlich

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

Bisher haben wir nur eine Rechnung durchgeführt und einen Ausdruck für die Koeffizienten eines Polynoms unter Verwendung des Polynoms selbst gefunden. Haben wir die Situation nicht einfach verschlimmert, viel Rechnung für nichts? Nein! Wir haben einen tieferen Zusammenhang gefunden, denn die  $a_k$  bei der Darstellung eines Polynoms sind nur vermeintlich ganz frei; bei genauer Betrachtung sind diese aber durch die Ableitungen von  $p(x)$  an der Stelle  $x_0$  gegeben. Final können wir die Frage stellen, ob sich diese Idee nicht auch für andere Funktionen eignet? Wir versuchen dies und schreiben in Analogie für  $n$ -mal differenzierbare Funktionen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{f,x_0}^n(x) .$$

Dabei nennt man die Summe

$$T_{f,x_0}^n := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das *Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung* von  $f$  mit *Entwicklungspunkt*  $x_0$  und der Term  $R_{f,x_0}^n$  heißt *Restglied*. Das Taylorpolynom stellt eine Approximation der Funktion durch Polynome dar; das Restglied gibt dabei den *Fehler* an, der bei dieser Näherung gemacht wird. Dieser Fehler ist zu erwarten, denn wenn die Gleichung (wie oben gesehen) für Polynome gerade exakt ist, also das Restglied verschwindet ( $R_{f,x_0}^n = 0$ ), dann wäre das für andere Funktionen wohl zu

viel verlangt. Der folgende Satz fasst zusammen, was über das Taylorpolynom gewusst werden sollte.

### Satz

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbare Funktion. Dann ist für  $x_0, x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{f,x_0}^n(x)$$

und für das Restglied gilt:

1. 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{f,x_0}^n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$
2. 
$$R_{f,x_0}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein  $\xi \in \mathbb{R}$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , falls  $f$  sogar  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar ist. ■

In Punkt 2 des obigen Satzes finden wir die *Lagrange'sche Darstellung* des Restglieds. Es gibt noch andere Varianten der Darstellung des Restgliedes, welche wir aber in diesem Buch nicht behandeln.

Dass das Taylorpolynom eine Approximation der Funktion in einem Punkt (nämlich  $x_0$ ) darstellt, lässt sich schon für einen einfachen Fall leicht einsehen. Betrachten wir dazu das Taylorpolynom der ersten Ordnung mit Restglied, dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{f,x_0}^1(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{f,x_0}^1(x) . \end{aligned}$$

Nahe bei  $x_0$  bekommen wir daraus

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) ,$$

denn das Restglied geht ja hier gegen Null. Auf der rechten Seite steht eine Geradengleichung. Wir sehen daher, dass in diesem Taylorpolynom der ersten Ordnung bereits die Approximation der Funktion durch eine Gerade (die Tangente) erfolgt. Versuchen Sie doch einmal, aus einer Taylorapproximation den Zwischenwertsatz zu gewinnen. Tipp: Verwenden Sie explizit das Restglied und eine niedrige Ordnung, die sich schon direkt daraus ergibt, welche Ableitung im Zwischenwertsatz vorkommt.

## 11.2.2 Die Taylorreihe

Der Übergang vom Taylorpolynom zur Taylorreihe wird durch das Ersetzen des  $n$  durch ein  $\infty$  über dem Summenzeichen realisiert:

### Definition (Taylorreihe)

Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

heißt Taylorreihe der Funktion  $f(x)$ , die hierbei beliebig oft differenzierbar sein muss. 

Folgende Fragen scheinen offensichtlich:

1. Für welche  $x$  konvergiert die Taylorreihe?
2. Wenn Konvergenz vorliegt, stimmt die durch die Taylorreihe definierte Funktion dann mit der Ausgangsfunktion überein?

Die erste Frage ist über den Konvergenzradius recht leicht im individuellen Fall zu beantworten, denn die Taylorreihe ist ja gerade ein Spezialfall einer Potenzreihe, wie wir sie bereits behandelt haben. Hier ist nämlich  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

Eine erschöpfende Beantwortung der zweiten Frage über bestimmte Kriterien ist nicht leicht. Fest steht aber, dass wir zu einer beliebig oft differenzierbaren Funktion eine Taylorreihe angeben können. Dass diese nicht notwendigerweise gegen die Funktion konvergieren muss, zeigt das folgende Beispiel:

### Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  beliebig oft stetig differenzierbar und die Ableitungen in jedem Punkt  $x \leq 0$  sind alle Null. Die Taylorreihe um den Nullpunkt ist also die Nullfunktion, und stimmt in keiner Umgebung der Null mit der Funktion überein. 

Wir werden nun Taylorreihen exemplarisch berechnen und erkennen dabei einiges wieder, was wir bereits zuvor entdeckt hatten:

### Beispiel

Wir betrachten  $f(x) = e^x$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Beim Ableiten ändert sich die Funktion nicht, sodass  $f^{(k)}(0) = f(0) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Somit ist die Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k .$$



### Beispiel

Interessieren wir uns für die Taylorreihe von  $f(x) = \sin x$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , müssen wir zuerst die Ableitungen des Sinus in  $x_0$  berechnen:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

Bei weiteren Ableitungen wiederholt sich obiges immer wieder, also entfällt bei der Taylorreihe jeder zweite Summand. Wir erhalten

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

Analog erhalten wir als Taylorreihe des Kosinus, wieder mit  $x_0 = 0$ ,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} .$$

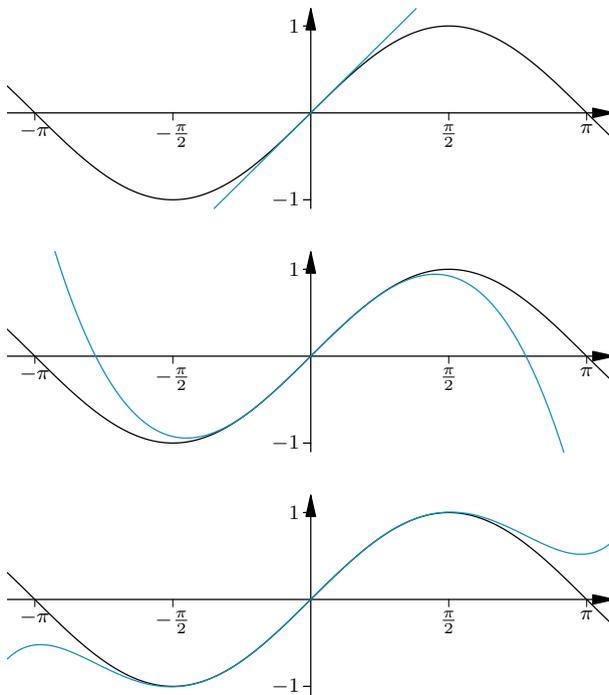


Wir haben bei unseren Berechnungen stets den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  verwendet. Dies ist bei Aufgaben oft der Fall, denn es ist einfach damit zu rechnen. Welche Bedeutung hat aber der Entwicklungspunkt? Es ist der Punkt, für den unsere Approximation gut funktioniert. Das Restglied wird ja gerade in der Nähe von  $x_0$  verschwindend klein; entfernt davon ist dies allgemein nicht zu erwarten. Wollen wir also eine gute Approximation einer Funktion an einem bestimmten Punkt haben, müssen wir diesen als Entwicklungspunkt wählen.

Bitte machen Sie sich für obige Beispiele klar, dass wir damit gleichfalls auch wissen, wie die Taylorpolynome der hier betrachteten Funktionen aussehen. Warum? Na, wir haben beim Taylorpolynom doch anstatt der Reihe (also der

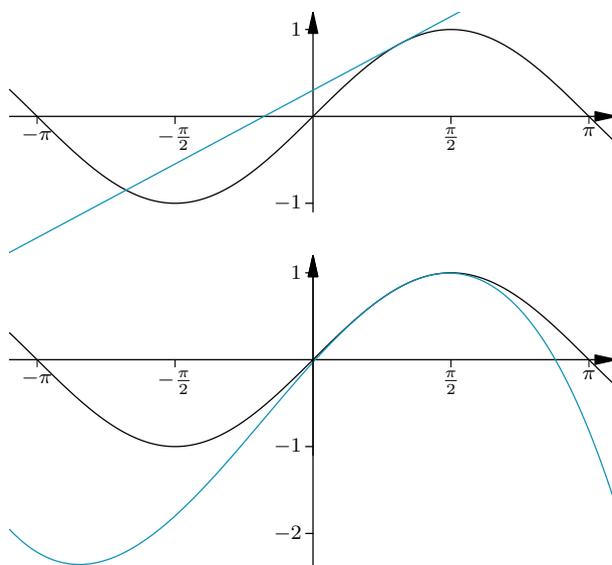
unendlichen Summation) nur eine endliche Summe (bis zu einer bestimmten natürlichen Zahl  $n$ ) zu betrachten. Was hinter dem Summenzeichen steht bleibt gleich.

Wir möchten nun in Bildern zeigen, wie gut die Approximation schon bei kleiner Ordnung des Taylorpolynoms ist.



Von oben: Taylor-Polynom der Ordnung 1, der Ordnung 3 und 5, jeweils für den Sinus ( $x_0 = 0$ )

Zur Veranschaulichung der Bedeutung des Entwicklungspunktes nochmals Graphiken für die gleiche Funktion, allerdings mit  $x_0 = 1$ :



Von oben: Taylor-Polynom der Ordnung 1 und 3, jeweils für den Sinus ( $x_0 = 1$ )

Wir können erkennen, dass die Approximation wirklich stets dort gut funktioniert, wo wir den Entwicklungspunkt gewählt haben.

### 11.2.3 Fehlerabschätzung

Eine Anwendung des Taylorpolynoms ist es, den Funktionswert einer komplizierten Funktion mittels ihres Taylorpolynoms näherungsweise zu berechnen. Dabei möchten wir allerdings eine Aussage über die Qualität unserer Näherung, d. h. über die Größe des gemachten Fehlers, treffen können. Wir haben im vorigen Abschnitt bereits die Lagrange'sche Darstellung des Restglieds kennen gelernt:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Diese eignet sich hervorragend für solche Fehlerabschätzungen.

#### Beispiel

Wir wollen das Taylorpolynom erster Ordnung verwenden, um ohne technische Hilfsmittel Wurzeln zu berechnen. Wir wählen also  $f(x) := \sqrt{x}$  mit der Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  und erhalten als Taylorpolynom

$$T_{f,x_0}^1(x) = f(x_0) + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0).$$

Um dies für unsere Rechnung zu nutzen, empfiehlt es sich natürlich, als Entwicklungspunkt  $x_0$  eine Zahl nahe  $x$  zu wählen, deren Wurzel wir kennen. Damit erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned}\sqrt{4,2} &\approx T_{f,4}^1(4,2) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4,2 - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 = 2,05, \\ \sqrt{42} &\approx T_{f,36}^1(42) = \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}(42 - 36) = 6 + \frac{1}{12} \cdot 6 = 6,5.\end{aligned}$$

Zur Abschätzung des gemachten Fehlers benötigen wir die zweite Ableitung von  $f$ :  $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ . Der Restterm lässt sich also folgendermaßen darstellen:

$$R_{f,x_0}^1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = -\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x - x_0)^2.$$

Bei der Fehlerabschätzung ist interessant, wie weit wir schlimmstenfalls vom tatsächlichen Wert abweichen, egal ob nach oben oder nach unten. Wir suchen also eine obere Schranke für den Betrag des Restterms. Wegen des negativen Exponenten beim  $\xi$  wird unser berechnetes  $R_{f,x_0}^1(x)$  betraglich für kleines  $\xi$  besonders groß. In den beiden Beispielen ist dies

$$\begin{aligned}|R_{f,4}^1(4,2)| &= \frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(0,2)^2 \leq \frac{1}{8} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 25} = 0,000625, \\ |R_{f,36}^1(42)| &= \frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}6^2 \leq \frac{1}{8} \cdot 36^{-\frac{3}{2}} \cdot 6^2 = \frac{1}{48} < \frac{1}{40} = 0,025.\end{aligned}$$

Da der Restterm negativ ist, wissen wir zudem, dass der tatsächliche Wert niedriger ist als unser berechneter. Wir können somit folgende Intervalle angeben, in denen die Wurzel liegt:

$$\begin{aligned}\sqrt{4,2} &\in [2,05 - 0,000625, 2,05] = [2,049375, 2,05], \\ \sqrt{42} &\in [6,5 - 0,025, 6,5] = [6,475, 6,5].\end{aligned}$$



Nun können Sie natürlich fragen, wo genau die praktische Anwendbarkeit des Wurzelziehens ohne Taschenrechner oder Computer liegt, wenn wir davon absehen, auf Parties Leute zu beeindrucken. Was aber durchaus häufig vorkommt, ist eine physikalische Größe zu messen und daraus eine andere zu berechnen. Bedingt durch die technische Natur des Messinstrumentes werden Sie einen gewissen Messfehler nicht ausschließen können. Wie aber überträgt sich dieser Fehler auf die errechnete Größe? Die Vorgehensweise ist im Prinzip die gleiche wie zuvor im Beispiel. Wir stellen uns vor,  $x_0$  sei die gemessene Größe und  $x$  die tatsächliche. Die Genauigkeit des Messinstrumentes gibt den maximalen Abstand von  $x_0$  zu  $x$  an, etwa  $|x - x_0| \leq M$ . Und die Wurzelfunktion  $f$  liefert uns die aus dem Messwert zu errechnende Größe. Mit den Überlegungen aus dem Beispiel können wir dann den Fehler bei der errechneten Größe wie folgt

abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f'(x_0) + R_{f,x_0}^1| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \right| + \left| \frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x - x_0)^2 \right| \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{x_0}} + \frac{1}{8}(x_0 - M)^{-\frac{3}{2}} M^2, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass  $x_0 > M$ . Da das Taylorpolynom auf Ableitungen der Funktion basiert und die Ableitungen der Wurzelfunktion für  $x \searrow 0$  immer größer werden, wird unsere Approximation in diesem Bereich immer ungenauer.

Interessant ist manchmal nicht der absolute Fehler wie oben berechnet, sondern der relative Fehler, also das Verhältnis von Fehler zu tatsächlichem Wert. Auch hierzu wollen wir ein Beispiel rechnen:

### Beispiel

Wir wollen das Volumen einer Kugel aus ihrem gemessenen Radius berechnen. Die Anforderung ist, das Kugelvolumen mit einer Genauigkeit von  $\pm 1\%$  zu bestimmen. Wie groß darf dann der relative Fehler beim Messen des Radius sein?

Die Formel für das Kugelvolumen und dessen Ableitung nach dem Radius sind

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V'(r) = 4\pi r^2.$$

Wir sind faul und wollen uns Rechenarbeit sparen. Daher betrachten wir lediglich das Taylorpolynom erster Ordnung und unterschlagen sogar das Restglied (was wir durch das  $\approx$  anstelle des  $=$  kennzeichnen):

$$\begin{aligned} V(r) &\approx V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) \\ \Leftrightarrow V(r) - V(r_0) &\approx V'(r_0)(r - r_0) \\ \Leftrightarrow (r - r_0) &\approx \frac{V(r) - V(r_0)}{V'(r_0)} = \frac{V(r) - V(r_0)}{V(r_0)} \cdot \frac{V(r_0)}{V'(r_0)}. \end{aligned}$$

Für den relativen Fehler erhalten wir:

$$\frac{(r - r_0)}{r_0} \approx \frac{V(r) - V(r_0)}{V(r_0)} \cdot \frac{V(r_0)}{r_0 V'(r_0)} = 1\% \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3}{r_0 \cdot 4\pi r_0^2} = \frac{1}{3}\%.$$

Wir dürfen somit den Radius mit einem Fehler von  $\pm \frac{1}{3}\%$  messen, sollten aber im Hinterkopf behalten, dass dies auch nur eine ungefähre Schranke für den Fehler ist, da wir den Fehlerterm nicht berücksichtigt haben.  $\blacklozenge$

Sie sehen also, dass wir mit der Abschätzung des Restterms ein wichtiges Instrument zur Hand haben, wenn es um Fragen der Messgenauigkeit bzw. der Eingrenzung von Fehlern geht.

## 11.3 Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Recht schnell können wir den Finger auf „höchste“ bzw. „tiefste“ Stellen eines Funktionsgraphen halten. Dabei gibt es aber z. B. folgende Probleme:

- Ist der Graph in einer Skalierung gezeichnet, die wirklich alle Stellen dieser Art zeigt?
- Könnte nicht bei allen gewählten Skalierungen etwas übersehen werden und reicht die Auflösung überhaupt für das Aufzeigen solcher Stellen?
- Muss überhaupt ein Graph gezeichnet werden?

Es ist also nötig, ein mathematisches Verfahren zu erarbeiten, durch das die Extrema der gegebenen Funktion im Definitionsbereich bestimmt werden können.

### 11.3.1 Zur Berechnung lokaler Extrema

Für unsere Untersuchungen nahe bei einem Punkt (von links und rechts), haben wir bisher erfolgreich mit Folgen gearbeitet, wir denken z. B. an Untersuchungen zur Stetigkeit. Um die Existenz solcher konvergenter Folgen zu garantieren, müssen wir folglich auf beiden Seiten des Punktes noch einen Bereich haben, der für gegen den Punkt konvergente Folgen Raum bietet, was sich durch eine um den Punkt existierende  $\varepsilon$ -Umgebung garantieren lässt.

Als erste Frage wollen wir beantworten, welche Eigenschaften Punkte haben müssen, die als Kandidaten für Extremwerte taugen und gehen zuerst davon aus, dass eine betrachtete Funktion in  $x_0$  ein lokales Maximum annimmt. Dann gibt es nach der Definition des lokalen Maximums eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $O$  von  $x_0$  mit  $f(x_0) - f(x) \geq 0$  für alle  $x \in O$ . Nun existieren Folgen in  $O$ , die (von links bzw. rechts) gegen  $x_0$  konvergieren, sodass für den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Dadurch erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0.$$

Für ein Minimum verläuft alles analog.

Wir fassen unsere Untersuchung in einem Satz zusammen:

### Satz

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $O \subseteq D$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ . Hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt die Gleichung  $f'(x_0) = 0$ . ■

Es bleibt uns die Überlegung, wann genau ein Maximum oder Minimum vorliegt. Dazu verwenden wir die Approximation nach Taylor. Eingangs erwähnten wir, dass dies das Mittel zum Zweck ist, tatsächlich gehören demnach unsere Gedanken dazu in dieses Kapitel.

### Satz

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion ( $n > 0$ ) und  $x_0 \in O$  ( $O$  wie in vorigen Satz) mit

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

1. Ist  $n$  gerade, so gilt:
  - a)  $f$  nimmt an der Stelle  $x_0$  ein lokales Maximum an, falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
  - b)  $f$  nimmt an der Stelle  $x_0$  ein lokales Minimum an, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .
2. Ist  $n$  ungerade, so nimmt  $f$  an der Stelle  $x_0$  weder ein Minimum noch ein Maximum an. ■

Warum ist das so? Wir gehen hier vom Fall  $f^{(n)}(x_0) < 0$  aus (der andere verläuft analog). Aus dem Konvergenzverhalten des Restglieds bei der Approximation durch Taylor folgt, unter Beachtung der Voraussetzungen des Satzes (nur  $f^{(n)}(x_0)$  sollte ja ungleich Null sein),

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{f, x_0}^n(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} < 0. \end{aligned}$$

Bei der linken Seite der Implikation haben wir einfach nur die bereits bekannte Gleichung  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{f, x_0}^n(x)$  verwendet und die Voraussetzungen eingesetzt, dann  $f(x_0)$  auf die linke Seite gebracht. Die rechte

Seite der Implikation verwendet die Eigenschaft des Restgliedes. Wir gelangen zu einer Fallunterscheidung.

1. Ist  $n$  gerade, so wird in einem offenen Intervall um  $x_0$  das Vorzeichen von  $f(x) - f(x_0)$  durch jenes von  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  bestimmt, da stets  $(x - x_0)^n > 0$ . D. h. es gilt  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ .
2. Ist  $n$  ungerade, so muss  $f(x) - f(x_0)$  bei  $x_0$  ebenso wie  $(x - x_0)^n$  das Vorzeichen wechseln — andernfalls wäre  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$ .

Wir werden den Satz zur Verdeutlichung an Beispielen demonstrieren.

### Beispiel

Sei

$$f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Für die Ableitung gilt  $f'(x) = 2x - 2$ , für die zweite Ableitung gilt  $f''(x) = 2$ . Die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion ist  $x = 1$ , und dort gilt  $f''(1) = 2 > 0$ . Also liegt dort ein lokales Minimum mit  $f(1) = 4$  vor.

An den Punkten  $x = \pm 2$  gilt  $f(-2) = 13$  und  $f(2) = 5$ . Da die Funktion auf dem Intervall  $[-2,1[$  streng monoton fällt ( $f'(x) < 0$ ) und auf dem Intervall  $]1,2]$  streng monoton steigt ( $f'(x) > 0$ ), muss die Funktion an den Stellen  $x = \pm 2$  ein lokales Maximum annehmen. Ein Vergleich der Funktionswerte liefert, dass die Funktion  $f$  bei  $x = 1$  das globale Minimum  $y = 4$  und bei  $x = -2$  das globale Maximum  $y = 13$  annimmt.  $\blacklozenge$

Achtung! In der Schule wurden die Kriterien häufig etwas reduziert gelehrt. Man sollte über die Nullstellen der ersten Ableitung die kritischen Stellen finden und diese dann in die zweite Ableitung einsetzen. Je nach Vorzeichen des Ergebnisses lag dann ein Maximum oder Minimum vor. Das funktioniert manchmal, aber ist nach Obigem nicht die ganze Weisheit. Bitte berechnen Sie daher nach dem gerade angegebenen Verfahren (aus einigen Schulen) die Extrema von  $f(x) = x^4$ , danach mit dem hier demonstrierten Verfahren (es führt uns auf ein Minimum). Sie werden überrascht sein.

## 11.4 Aufgaben

1. Berechnen Sie  $\sin \frac{\pi}{6}$  über ein Taylorpolynom von  $\sin x$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 := 0$  mit einer Genauigkeit von 0,05.
2. Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $f(x) := \ln(x + 1)$  im Entwicklungspunkt  $x_0 := 0$  sowie deren Konvergenzintervall. Zeigen Sie weiterhin, dass

die Taylorreihe im Intervall  $] -\frac{1}{2}, +1]$  gegen  $f$  konvergiert.

3. Was ist das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades eines Polynoms maximal  $n$ -ten Grades?
4. Differenzieren Sie die Taylorreihen von  $\sin x$  und  $\cos x$ .
5. Bestimmen Sie sämtliche lokalen Extrema von

$$f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \frac{1}{x} \ln x$$

## 11.5 Lösungen

1. Um zu wissen, wie weit das Taylorpolynom zu entwickeln ist, schätzen wir den Fehlerterm  $\left| \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{6} - 0\right)^{n+1} \right|$  ab. Dieser soll nach Aufgabenstellung nicht größer als 0,05 sein. Dabei ist  $\xi \in ]0, \frac{\pi}{6}]$ , was wir hier aber nicht verwenden, denn beim Sinus und dessen Ableitungen bietet es sich an, gegen 1 abzuschätzen:

$$\left| \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{6} - 0\right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} .$$

Wir probieren einige  $n$ :

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^1}{1!} = \frac{\pi}{6} > \frac{3}{6} > \frac{1}{2} \\ n = 1 : \quad & \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} > \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^2}{2!} = \frac{1}{8} > 0,05 \\ n = 2 : \quad & \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} = \frac{\pi^3}{6^4} < \frac{4^3}{6^4} = \frac{4}{81} < \frac{4}{80} = 0,05 \end{aligned}$$

Bei  $n = 2$  halten wir also definitiv die geforderte Fehlerschranke ein. Vielleicht hätten wir das auch schon bei besserer Abschätzung für ein kleineres  $n$  eingesehen, aber das soll uns hier nicht weiter kümmern. Das Taylorpolynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und ausgewertet bei  $x = \frac{\pi}{6}$  liefert uns somit die gesuchte Näherung:

$$\sin \frac{\pi}{6} \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin 0 \cdot \frac{\pi^2}{36} = 0 + \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6} \approx 0,52 .$$

Der genaue Wert wäre  $\sin \frac{\pi}{6} = 0,5$ .

2. Die  $k$ -te Ableitung von  $f$  ist

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} ,$$

(zur Erinnerung:  $0! := 1$ ), ausgewertet am Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! .$$

(Die Formel für die  $k$ -te Ableitung müssten wir streng genommen noch beweisen, sinnvollerweise mit vollständiger Induktion; dies ist nun aber nicht das Thema und wird daher vernachlässigt.)

Die Taylorreihe um  $x_0 = 0$  ist demnach

$$T_0(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k .$$

Ihr Konvergenzradius ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$ . Sie konvergiert nicht bei  $x = -1$  (harmonische Reihe), wohl aber bei  $x = +1$  (alternierende harmonische Reihe), insgesamt also auf  $] -1, +1]$ . Der Fehlerterm ist

$$R_k(x) = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1} \right| = \frac{1}{(k+1)} \left| \frac{x}{\xi+1} \right|^{k+1} .$$

Für festes  $x \in ]-\frac{1}{2}, +1]$  und für beliebiges  $\xi$  zwischen  $x$  und  $0$  ist  $\left| \frac{x}{\xi+1} \right| \leq 1$  und somit  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x) = 0$ . Das bedeutet, dass dort die Taylorreihe gegen  $f$  konvergiert.

3. Zunächst einmal ist die Taylorreihe  $n$ -ten Grades ein Polynom der Form

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k .$$

Die Ableitungen sind

$$T_{n,x_0}^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j} , \quad j = 0, \dots, n ,$$

ausgewertet am Entwicklungspunkt  $x = x_0$  fallen alle Summanden bis auf den ersten weg:

$$T_{n,x_0}^{(j)}(x_0) = \sum_{k=j}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!} (x_0-x_0)^{k-j} = f^{(j)}(x_0) .$$

Das Taylorpolynom und seine ersten  $n$  Ableitungen stimmen somit im Entwicklungspunkt mit  $f$  und dessen Ableitungen überein. Ist  $f$  ein Polynom maximal  $n$ -ten Grades, so ist  $p := f - T_{n,x_0}$  ein Polynom maximal  $n$ -ten Grades, welches mit seinen ersten  $n$  Ableitungen in  $x_0$  Null ist. Damit ist  $p$  das Nullpolynom und das Taylorpolynom stimmt nicht nur im Entwicklungspunkt, sondern überall mit  $f$  überein.

Diese Betrachtung ist unabhängig vom Entwicklungspunkt. Damit sind die Taylorpolynome zu unterschiedlichen Entwicklungspunkten gleich (nur anders dargestellt), solange  $f$  ein Polynom ist.

4. Sinus und Kosinus haben folgende Taylorreihen mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Diese dürfen wir innerhalb ihres Konvergenzintervalls, also auf ganz  $\mathbb{R}$ , differenzieren und erhalten als Ableitungen:

$$\begin{aligned} \sin' x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x, \\ \cos' x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k) x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = -\sin x. \end{aligned}$$

Der Summand für  $k = 0$  der Taylorreihe des Kosinus ist konstant und fiel daher beim Ableiten weg. Durch eine Indexverschiebung haben wir schließlich die Form der Sinustaylorreihe hergestellt.

5. Zunächst berechnen wir die Ableitung mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Diese hat genau eine Nullstelle, und zwar bei  $\ln x = 1$ , also  $x = e$ . Als nächstes müssen wir verifizieren, dass dort wirklich ein Maximum oder Minimum vorliegt. Dazu benötigen wir die zweite Ableitung (wieder mit der Quotientenregel):

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Diese werten wir bei  $x = e$  aus:

$$f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0,$$

was bedeutet, dass  $f$  bei  $x = e$  ein lokales Maximum hat. Weitere lokale Extrema gibt es nicht.

### Fragen

- Was ist das Taylorpolynom und was das Restglied nach Lagrange?
- Approximiert eine konvergente Taylorreihe stets die Ausgangsfunktion?
- Welche Bedeutung hat der Entwicklungspunkt?
- Was sind Anwendungsmöglichkeiten von Taylorreihen in der Praxis?
- Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für lokale Extrema an.
- Welche Aussagen lassen sich über den Fehler bei der Taylorapproximation machen?
- Können Sie den Zusammenhang zwischen der Taylorapproximation und lokalen Extrema deutlich machen?



# 12 Integration

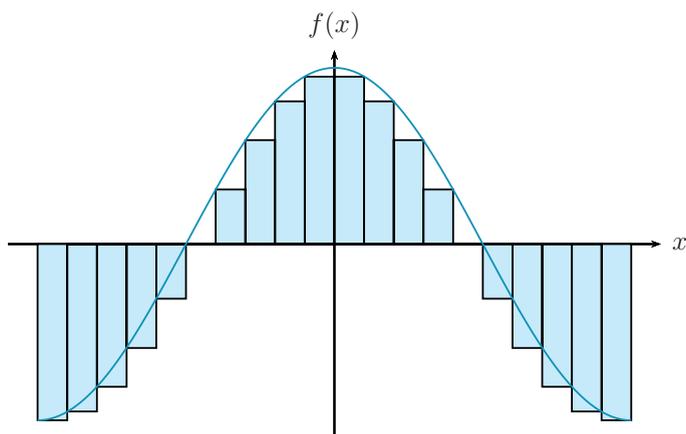
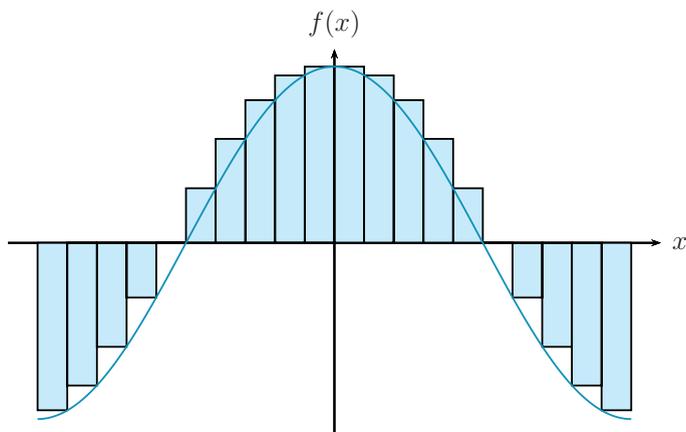
## 12.1 Motivation

Das Integral ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion auf einem gegebenen Integrationsintervall eine Zahl (die Fläche zwischen  $x$ -Achse und Funktionsgraph; bestimmtes Integral) oder eine Funktion (Stammfunktion; unbestimmtes Integral) zuordnet.

Das klingt vermutlich nicht wirklich motivierend, aber es stecken wunderbare Dinge dahinter verborgen, welche die Integration auch zu einem großartigen Helfer in der Praxis machen.

Wir führen den Eingangssatz etwas aus: Dass es sich um eine lineare Abbildung handelt, werden wir durch die Rechenregeln einsehen und mit der Hilfe von so genannten Integralen werden wir dann tatsächlich Flächen berechnen und — dort steckt der Kern und die tiefere Bedeutung — Stammfunktionen bilden. Dies sind gerade jene Funktionen, deren Ableitung wieder die integrierte Funktion liefert; in gewisser Weise sind also Integration und Differenziation Umkehrungen voneinander, wenn auch *nicht* im klassischen Sinne der Umkehrfunktion. Wir hatten ja bereits zuvor gesehen, dass (nach den Kenntnissen der Physik) die Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit die Geschwindigkeit liefert. Wenden wir umgekehrt die Integration auf die Geschwindigkeits-Funktion an, kommen wir zur Ortsfunktion zurück. Integration scheint also eng mit der Beschreibung der Natur verknüpft zu sein. Das ist es auch wirklich; so hatte schon Newton der Integralrechnung tiefe Einblicke zu verdanken.

Wesentliche klassische Ideen zum Integralbegriff stammen von einem Großmeister der Mathematik: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866). Sie basieren darauf, die Fläche zwischen einer Funktion und der  $x$ -Achse von oben und unten durch Rechtecke zu approximieren, was in den folgenden Bildern exemplarisch gezeigt wird:

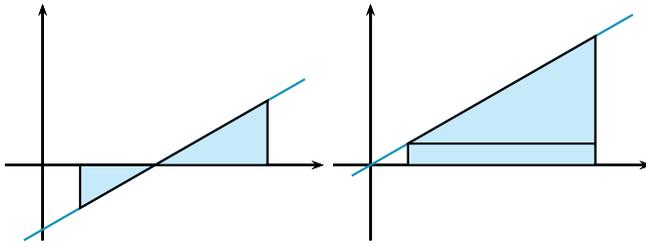


Dabei ist es mathematisch von Bedeutung zu untersuchen, ob — bei immer kleiner gewählten Grundseiten der Rechtecke — die Gesamtfläche der oberen gegen diejenige der unteren konvergiert. Eine Funktion, bei der dies klappt, heißt Riemann-integrierbar.

Wir werden hier einen noch etwas einfacheren Weg gehen und dabei intensiv auf das bauen, was wir über unendliche Reihen gelernt haben.

## 12.2 Grundlagen zur Integration

Wie berechnet man die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen einer Funktion? Ist der Graph eine Gerade, so lässt sich die Fläche einfach durch Dreiecke und Rechtecke zusammensetzen.



Bei komplizierteren Funktionen ist dies nicht so einfach. Wir beschränken uns auf die Berechnung von Rechtecken und minimieren den Fehler, indem wir das Intervall  $[a, b]$  in viele ( $n$  Stück) gleich große Teilintervalle mit Randpunkten  $a$  und  $b$  aufteilen:

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$$

und jede Teilfläche durch ein Rechteck annähern. Die Grundflächen sind dann jeweils

$$\Delta x := \frac{b - a}{n},$$

die Randpunkte

$$x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0, \dots, n)$$

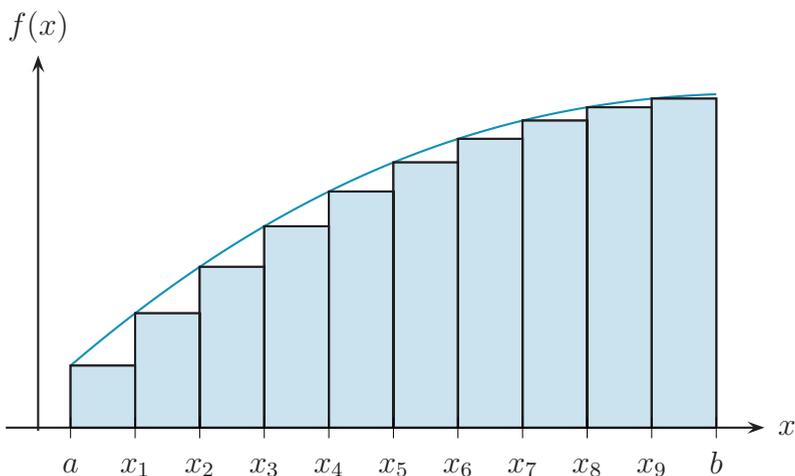
und die Flächen der  $n$  Rechtecke

$$F_k = f(x_{k-1})\Delta x.$$

Für die letzte Gleichung ist  $1 \leq k \leq n$ , denn wir wollen stets die Funktionswerte für den jeweils linken Punkt der Teilintervalle berechnen. Ferner haben wir zwar  $n + 1$  Randpunkte, aber nur  $n$  Flächen. Es gilt für die gesamte durch die Rechtecke gebildete Fläche

$$F(n) = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Zur Verdeutlichung des Vorgehens noch das folgende Bild als Beispiel:



Wie Sie sicher bemerkt haben, erhalten wir nach unserer Konstruktion für Abschnitte mit negativen Funktionswerten auch einen negativen Flächeninhalt. Dies ist beabsichtigt und wir werden auch im Folgenden stets von vorzeichenbehafteten Flächeninhalten reden, auch wenn wir es nicht dazuschreiben.

### Satz

Für stetige oder monotone Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert der Grenzwert von  $F(n)$  und es ist

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x$$

das Integral von  $f$  über  $[a, b]$ . ■

Wenn wir die linke und die rechte Seite der im Satz formulierten Gleichung betrachten, erkennen wir, dass das Integral nach der Grenzwertbildung aus dem Summenzeichen entsteht (daher auch die Ähnlichkeit mit dem gewöhnlichen „S“ für „Summe“) und das  $\Delta x$  in das  $dx$  übergeht. Das  $\Delta x$  hatte noch eine greifbare endliche Größe, während das  $dx$  als beliebig (*infinitesimal*) kleine Größe zu verstehen ist.

Es genügt, wenn  $f$  nur stückweise stetig (oder, analog definiert, stückweise monoton) ist. Die Integrale können dann für die einzelnen Teilstücke separat berechnet und anschließend addiert werden (bitte beachten Sie dazu auch die dritte der folgenden Regeln). Alle diese Funktionen nennen wir *integrierbar* (sie sind auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stets beschränkt). Wir möchten noch unterstreichen, dass wir es — auch in der Praxis — sehr oft mit stetigen Funktionen zu tun haben, und diese erkennen wir dann sofort als integrierbar.

Wir geben nun einige Rechenregeln an, die häufig nützlich sind. Ihre Basis bildet die Tatsache, dass wir die Integration gerade über Reihen angegeben haben, für die Entsprechendes klar ist und in großen Teilen bereits behandelt wurde. Ferner ist anschaulich klar was passiert. Dabei müssen wir nur daran denken, dass wir die Intergration ja bisher als Flächenberechnung eingeführt haben. Zeichnen Sie im Zweifelsfall einfach ein paar Bilder zur Verdeutlichung. Nachstehend sind  $a \leq b \leq c \in \mathbb{R}$  und die zweite Regel ist eher eine Definition für den Fall, dass die obere Intagationsgrenze kleiner ist als die untere:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b \lambda f(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned} \right\} \text{ (Linearität des Integrals)}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in ]a, b[$$

## 12.3 Der Hauptsatz

Wir kommen hier (aus mathematischer Sicht) zum Finale des Kapitels zur Integration, wobei wir noch eine Definition benötigen:

### Definition (Stammfunktion)

Seien  $I$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine differenzierbare Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , wenn für alle  $x \in I$  gilt:

$$F'(x) = f(x) .$$



Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so auch  $F+c$  für beliebige Konstanten  $c$ , denn  $(F+c)' = F' + 0 = F'$ . Weitere Stammfunktionen gibt es allerdings nicht. Um

sich nicht auf eine bestimmte Stammfunktion einigen zu müssen, schreiben wir auch

$$\int f(x)dx := F(x) + c$$

ohne Grenzen am Integralsymbol und nennen  $\int f(x)dx$  *unbestimmtes Integral* von  $f$ .

Nun also zum Hauptsatz; dieser besteht in gewisser Weise aus zwei Teilen: Der erste kümmert sich um die Existenz der Stammfunktion, der zweite Teil liefert uns eine einfache Möglichkeit, um Integrale zu berechnen.

### Satz

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so ist für alle  $x_0 \in [a, b]$  die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion zu  $f$ . Ferner gilt die Gleichung

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) ■

Zum Beweis des ersten Teils berechnen wir die Ableitung des dort definierten  $F$ : Seien dazu  $x \in [a, b]$  und  $h \neq 0$  mit  $x + h \in [a, b]$ :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Da das Integral den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen angibt, können wir dieses folgendermaßen durch Rechteckflächen abschätzen:

$$h \cdot \min_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq h \cdot \max_{t \in [x, x+h]} f(t). \quad (12.1)$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $\xi_h$  zwischen  $x$  und  $x + h$  mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = h \cdot f(\xi_h).$$

Der Index bei  $\xi_h$  soll hier verdeutlichen, dass es vom Integrationsintervall, also von  $h$ , abhängt. Es ist  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ , denn  $\xi_h$  ist ja gerade zwischen  $x$  und  $x + h$  eingeklemmt. Also folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Der zweite ergibt sich einfach durch Einsetzen der Definition von  $F$ :

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(t) dt - \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_{x_0}^b f(t) dt + \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt .$$

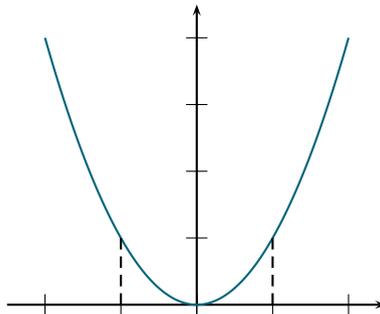
Die Argumentation, welche uns zu Zeile 12.1 geführt hat, können wir etwas verallgemeinern und erhalten für stetige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  den so genannten *Mittelwertsatz der Integralrechnung*:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) ,$$

falls  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ .

### Beispiel

Wir berechnen die Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f(x) := x^2$  auf  $[-1, 1]$ :



$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + c - \left( \frac{-1}{3} + c \right) = \frac{2}{3} + c - c = \frac{2}{3} .$$



Wir sehen in dem Beispiel, dass sich die Konstante der Stammfunktion bei der Berechnung des Integrals wegekürzt. Das Integral ist also unabhängig von der Wahl der Stammfunktion und wir müssen uns keine Gedanken machen, welches konkrete  $x_0$  aus dem Hauptsatz wir verwenden.

## 12.4 Wichtige Regeln zur Integration

In diesem Abschnitt wollen wir darauf eingehen, wie möglichst geschickt ein Integral berechnet werden kann. Leider ist dies nämlich allgemein nicht einfach. *Integrieren ist eine Kunst*. Allerdings gibt es hilfreiche Regeln, die vieles leichter machen und Integrale oft auf bereits bekannte zurückführen.

Die gleich gezeigten Regeln gelten natürlich analog für unbestimmte Integrale; nur die Integrationsgrenzen kommen dann einfach nicht vor.

### 12.4.1 Substitutionsregel

Sei  $f$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Ferner sei  $x = x(t)$  stetig differenzierbar. Dann haben wir nach der Kettenregel

$$\frac{d(F \circ x)}{dt}(t) = F'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) .$$

Also folgt nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt = F(x(b)) - F(x(a)) = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx .$$

Dies ist die so genannte *Substitutionsregel*.

#### Beispiel

Zum Integrieren von  $\int_a^b f(3t + 1) dt$  definieren wir  $x(t) := 3t + 1$ . Damit ist  $\dot{x}(t) = 3$  und die Substitutionsregel führt zu

$$\int_a^b f(3t + 1) dt = \frac{1}{3} \int_a^b f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \frac{1}{3} \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{3a+1}^{3b+1} f(x) dx .$$



Obiger Lösungsweg wurde direkt auf die Substitutionsregel zugeschnitten. Nun das gleiche Beispiel etwas anders: Wir wählen wieder  $x(t) := 3t + 1$  und formen deren Ableitung um, so als handle es sich um einen echten Bruch und nicht nur um eine formale Schreibweise:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{3} = dt .$$

Natürlich ist diese Schreibweise nicht willkürlich, sondern clever mit der Integralschreibweise abgestimmt, sodass wir die erhaltene Gleichung einfach ins Integral einsetzen und die Integralgrenzen anpassen müssen, um die Substitutionsregel anzuwenden:

$$\int_a^b f(3t+1)dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) \frac{dx}{3} = \int_{3a+1}^{3b+1} \frac{f(x)}{3} dx .$$

Diese Methode empfinden viele als angenehmer, da sie konstruktiver ist. Beispielsweise können wir damit auch leicht die Substitutionsregel in „umgekehrter“ Richtung ausführen:

### Beispiel

Wir integrieren  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ , indem wir  $t := \sin x$  substituieren. Dann ist nämlich

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \quad \text{bzw.} \quad dt = \cos x \, dx$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x} \cos x \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx . \end{aligned}$$

Hier wurde also  $t(x)$  eingeführt, im Beispiel davor  $x(t)$ . ◆

Ohne Integrationsgrenzen, also bei der Bestimmung eines unbestimmten Integrals, muss nach der Substitution die erhaltene Stammfunktion wieder in Abhängigkeit der alten Variablen gebracht werden.

## 12.4.2 Partielle Integration

Seien  $f, g$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig differenzierbare Funktionen. Nach der Produktregel ist dann

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' ,$$

d. h.  $f \cdot g$  ist eine Stammfunktion des rechten Ausdrucks. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt somit

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

oder umgestellt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx .$$

Diese Regel heißt *partielle Integration*. Sie ist auch oft in der Form

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx$$

vertreten.

Wir bringen ein Beispiel mit möglicher Falle, das in keinem Buch fehlen sollte:

### Beispiel

Bei der Integration von  $x \cdot e^x$  wählen wir  $f'(x) := e^x$  und  $g(x) := x$ . Demnach ist

$$\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = (x - 1) e^x \Big|_a^b .$$



Die partielle Integration wird beim Integrieren von Produkten oft angewendet. Wie wir im übernächsten Beispiel sehen werden, sind Produkte allerdings nicht immer offensichtlich. Bei der Entscheidung, welcher Faktor als  $f'$  und welcher als  $g$  angesehen wird, sollten Sie sich überlegen, ob das Integral, mit dem Sie es nach der partiellen Integration zu tun haben, einfacher zu berechnen ist. Hätten wir im vorigen Beispiel die Rollen von  $f$  und  $g$  vertauscht, hätten wir es nach der partiellen Integration mit  $\int \frac{1}{2} x^2 e^x dx$  zu tun gehabt. Dadurch hätte sich unsere Lage allerdings nicht verbessert. Der Blick dafür, welches die richtige Wahl ist bzw. ob partielle Integration überhaupt von Nutzen ist, entsteht durch unaufhörliches Üben.

### Beispiel

$$\begin{aligned} \int e^x (2 - x^2) dx &= e^x (2 - x^2) - \int e^x (-2x) dx \\ &= e^x (2 - x^2) + 2 \int x e^x dx \\ &= e^x (2x - x^2) \end{aligned}$$

Konnten Sie die Rechnung verstehen? Was war hier  $f'$ , was  $g$ ? ◆

### Beispiel

Wir integrieren  $\ln x$  in den Grenzen von 1 bis 2 mit Hilfe der partiellen Integration. Dazu wählen wir  $g(x) := \ln x$  und  $f'(x) := 1$ . Es folgt

$$\int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2.$$

Indem wir die Integrationsgrenzen weglassen, haben wir auch gleich die Stammfunktion von  $\ln x$  gefunden, nämlich  $G(x) = x \ln x - x$ . ◆

### 12.4.3 Integration rationaler Funktionen

Oft entstehen durch Anwendung der Substitutionsregel oder der partiellen Integration rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)}, \quad p, q: \text{Polynome},$$

die es weiter zu integrieren gilt. Von diesen wissen wir bereits, dass sie stets durch Polynomdivision und anschließender Partialbruchzerlegung in ein Polynom und eine Summe sehr einfacher rationaler Funktionen der Form

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{oder} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$$

mit  $k \in \mathbb{N}$  zerlegt werden können. Wegen der Linearität des Integrals — Summen können einzeln integriert und Konstanten vor das Integral gezogen werden — können wir jede beliebige rationale Funktion integrieren, wenn wir nur wissen, was die Stammfunktionen von

$$x^k, \quad \frac{1}{(x-a)^k}, \quad \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}$$

sind. Die meisten dieser Terme sind sehr einfach zu integrieren, ggf. durch ein wenig Herumprobieren oder durch Anwendung der Substitutionsregel. Die Lösung des letzten Terms ist etwas schwieriger, weshalb wir ihn nach folgender Auflistung genauer untersuchen. Es ist

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a)^k} dx &= \int (x-a)^{-k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} \\ &= \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \quad (\text{für } k > 1), \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln(x-a),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} dx &= \int (x^2+bx+c)^{-k} (2x+b) dx \\ &= \frac{(x^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} \\ &= \frac{-1}{(k-1)(x^2+bx+c)^{k-1}} \quad (\text{für } k > 1), \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \ln(x^2+bx+c),$$

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k} dx &= \frac{2x+b}{(k-1)(4c-b^2)(x^2+bx+c)^{k-1}} \\ &+ \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4c-b^2)} \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{k-1}} dx \quad (\text{für } k > 1). \end{aligned}$$

Dabei sind  $a, b, c$  geeignete reelle Zahlen, also solche, für welche die Ausdrücke stets definiert sind. Die letzte Gleichung liefert uns nicht sofort ein Ergebnis, weil auch auf der rechten Seite wieder unser Integral steht, nur mit kleinerem Exponenten. Deshalb müssen wir diese Gleichung ggf. mehrfach hintereinander anwenden, jedesmal mit einem um 1 kleineren  $k$  und so den Exponenten auf  $k = 1$  senken. Im letzten Schritt können wir für  $k = 1$  die vorletzte Gleichung mit dem Arcustangens verwenden.

Exemplarisch wollen wir die vorletzte Gleichung herleiten. Dazu erinnern wir

an die Ableitung des Arcustangens

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2},$$

da wir sie gleich als Stammfunktion brauchen. Wir betrachten den Fall, dass der Nenner  $x^2 + bx + c$  keine reellen Nullstellen hat (sonst könnte er ja bei der Partialbruchzerlegung weiter zerlegt werden), sondern ein komplex konjugiertes Paar  $x_0$  und  $\bar{x}_0$  von komplexen Nullstellen. So können wir  $x^2 + bx + c$  auch folgendermaßen schreiben:

$$x^2 + bx + c = (x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - (x_0 + \bar{x}_0)x + x_0\bar{x}_0 = x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2,$$

also ist  $b = -2\operatorname{Re}(x_0)$  und  $c = |x_0|^2 = \operatorname{Re}(x_0)^2 + \operatorname{Im}(x_0)^2$ . Damit formen wir den Nenner so um, dass er sich bequem zur Ableitung des Arcustangens hin substituieren lässt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2 &= (x - \operatorname{Re}(x_0))^2 + \operatorname{Im}(x_0)^2 \\ &= \operatorname{Im}(x_0)^2 \left( \left( \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$y := \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)}$$

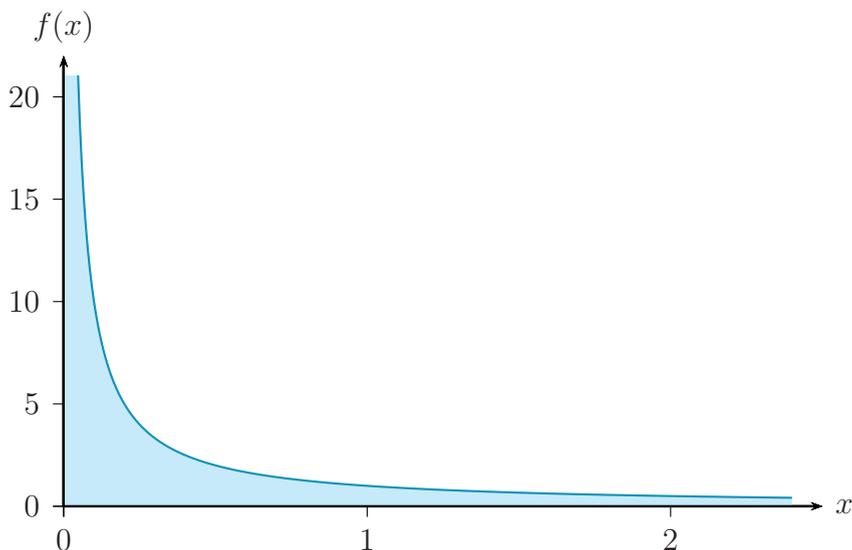
ist somit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + |x_0|^2} dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)^2} \int \frac{1}{\left( \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)} \right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \arctan y \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(x_0)} \arctan \left( \frac{x - \operatorname{Re}(x_0)}{\operatorname{Im}(x_0)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan \left( \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right). \end{aligned}$$

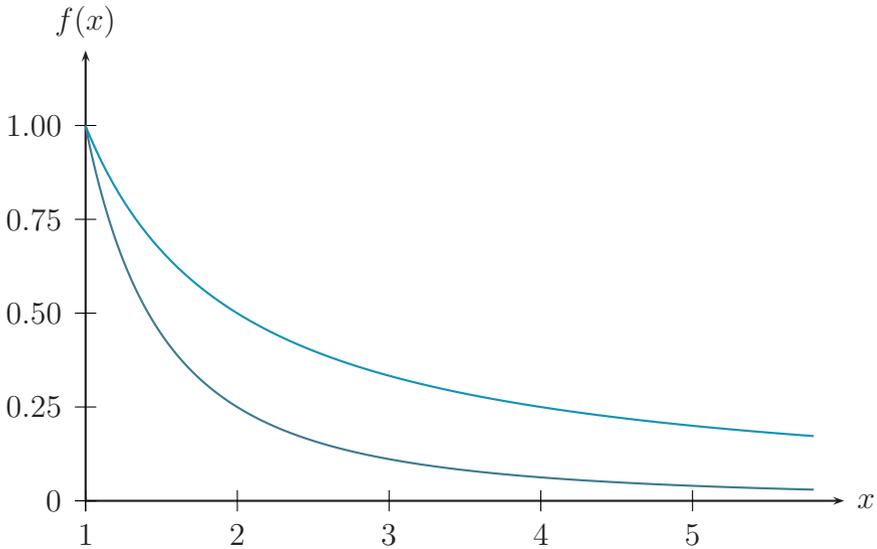
## 12.5 Das uneigentliche Integral

Das uneigentliche Integral kommt in vielen Anwendungen vor. Zur Behandlung wird wieder der Grenzwertbegriff nötig sein, denn solche Integrale müssen über diesen auf ihre Konvergenz hin untersucht werden.

Woher kommt aber die Notwendigkeit für diesen Integralbegriff? Neben den Anwendungen können wir dies recht einfach anhand der Frage beantworten, ob die Fläche unter einem Funktionsgraphen „ausläuft“, also unendlich groß wird, wenn der Graph z. B. nicht die  $x$ -Achse schneidet. Folgendes Bild macht alles etwas deutlicher. Wir sehen darin die Funktion  $\frac{1}{x}$  aufgezeichnet. Wenn wir die Fläche zur Null hin berechnen wollen, scheint diese unendlich groß zu werden, gleichfalls, wenn wir z. B. von 1 bis ins Unendliche integrieren wollen (es ist natürlich nur ein Ausschnitt zu sehen).



Aber aufgepasst! Schon bei Reihen haben wir gesehen, dass wir uns nicht auf grobe Überlegungen verlassen können, der Schein kann trügen. Im nächsten Bild sehen wir die Graphen der Funktionen  $\frac{1}{x}$  (oberer Graph) und  $\frac{1}{x^2}$  (unterer Graph), beginnend bei  $x = 1$ :



Wenn wir hier von 1 bis ins Unendliche integrieren, so konvergiert die Fläche unter dem Graphen von  $\frac{1}{x^2}$ , nicht aber unter  $\frac{1}{x}$ . Das war nicht zu erwarten, denn auch hier scheint die Fläche unendlich groß zu werden, selbst wenn der Graph schnell näher an die  $x$ -Achse kommt. Wirklich erreicht wird sie an keiner Stelle.

### 12.5.1 Integration unbeschränkter Funktionen

Betrachten Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx .$$

Hier ist der Integrand  $\frac{1}{x}$  an einer der Integrationsgrenzen (nämlich der unteren) *kritisch*, d. h. unbeschränkt. In solchen Fällen nähern wir uns an diese Grenze an und definieren dabei

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \searrow a} \int_{\xi}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \nearrow b} \int_a^{\xi} f(x) dx ,$$

je nachdem, ob die untere oder obere Grenze kritisch ist.

### Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \searrow 0} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \searrow 0} \ln x \Big|_{\xi}^1 = \lim_{\xi \searrow 0} (\ln 1 - \ln \xi) = \lim_{\xi \searrow 0} (-\ln \xi) = \infty ,$$

somit existiert dieses Integral nicht.

Für  $0 < a < 1$  ist hingegen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \lim_{\xi \searrow 0} \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_{\xi}^1 = \frac{1}{1-a} \lim_{\xi \searrow 0} (1 - \xi^{1-a}) = \frac{1}{1-a} .$$



Befindet sich die kritische Stelle  $x_0$  des Integranden innerhalb der Integrationsgrenzen, teilen wir den Integrationsbereich in zwei Teilstücke auf:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \nearrow x_0} \int_a^{\xi} f(x) dx + \lim_{\xi \searrow x_0} \int_{\xi}^b f(x) dx .$$

Bei mehreren kritischen Stellen zerlegen wir den Integrationsbereich entsprechend mehrfach.

## 12.5.2 Unbeschränkte Integrationsgrenzen

Betrachten wir hierfür

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx .$$

Der Integrand ist aus dem vorigen Abschnitt bekannt, allerdings gibt es für die untere Grenze kein Problem wie zuvor. Da wir über die Existenz aufgrund der oberen Grenze nichts wissen, muss gesagt werden, was damit gemeint ist, nämlich

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx .$$

Nur wenn der Grenzwert existiert, ist das entsprechende uneigentliche Integral definiert. Analog definieren wir das uneigentliche Integral, bei dem die untere

Integrationsgrenze unendlich ist:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx .$$

### Beispiel

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty ,$$

somit existiert dieses Integral nicht.

Für  $a > 1$  ist hingegen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-a)x^{a-1}} \Big|_1^b = \frac{1}{1-a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b^{a-1}} - 1 \right) = \frac{1}{a-1} .$$



Sind beide Grenzen unendlich, wird also über ganz  $\mathbb{R}$  integriert, so teilen wir  $\mathbb{R}$  einfach in zwei Integrationsbereiche und verwenden die obigen Definitionen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &:= \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_b^c f(x) dx . \end{aligned}$$

Erst wenn beide Teilintegrale existieren, ist das gesamte Integral definiert. Wir müssen hier selbstverständlich darauf achten, dass wir mit  $b$  nicht eine kritische Stelle wählen.

Oft wird behauptet, dass beispielsweise das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$  sei, weil der Integrand ungerade ist und sich, vom Ursprung gleichermaßen in beide Richtungen ausgehend, positive und negative Integralanteile genau aufheben. Doch Vorsicht: Starten wir nicht genau vom Ursprung oder integrieren wir nicht „gleich schnell“ in positive und negative Richtung, könnten wir jeden beliebigen Wert erzeugen. Das widerspricht aber gänzlich unserem Grenzwertbegriff.

Natürlich können die behandelten Typen uneigentlicher Integrale beliebig kombiniert werden, so ist z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx$$

möglich. Hier haben wir unbeschränkte Integrationsgrenzen und einen Integranden mit einer kritischen Stelle bei 1. Aber hier ist selbstverständlich alles auf die behandelten Fälle reduzierbar und wir können das Integral folgendermaßen aufteilen, wobei  $x_0 < 1 < x_1$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{x_0} \frac{1}{x^3 - 1} dx + \lim_{b \nearrow 1} \int_{x_0}^b \frac{1}{x^3 - 1} dx \\ &\quad + \lim_{c \searrow 1} \int_c^{x_1} \frac{1}{x^3 - 1} dx + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^d \frac{1}{x^3 - 1} dx . \end{aligned}$$

Wir liefern am Ende noch ein Beispiel mit Praxisbezug, bei dem wir einige physikalische Überlegungen einfließen lassen.

### Beispiel

Wir betrachten eine Rakete auf der Oberfläche eines Planeten mit dem Radius  $R$ . Ist es möglich, eine solche Rakete mit nur einer endlichen Menge an Treibstoff beliebig weit ins All zu befördern? Diese Frage ist durchaus berechtigt und scheint zuerst negativ beantwortet werden zu müssen. Denn durch eine endliche Menge an Treibstoff kann die Rakete über ihre Triebwerke nur eine endliche Arbeit gegen das Gravitationsfeld des Planeten verrichten. Dieses nimmt mit steigender Höhe zwar quadratisch ab, da es sich auf eine quadratisch größer werdende Kugeloberfläche verteilt, allerdings wird es nie wirklich Null. Es wird also immer ein wenig an unserem Flugobjekt „gezerzt“. Die Rakete soll also von der Höhe  $R$  (Oberfläche des Planeten) beliebig weit ins All befördert werden. Die auf die Rakete wirkende Kraft auf der Oberfläche des Planeten ist  $mg$ , wobei  $m$  die Masse der Rakete ist und  $g$  die Gravitationskonstante des Planeten. Die Kraft in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der Rakete zum Planetenmittelpunkt ist dann  $mg \frac{R^2}{r^2}$ . Multiplizieren wir diese Kraft mit dem (infinitesimal kleinen) Weg  $dr$ , so haben wir die Arbeit, welche die Rakete auf diesem winzigen Stück  $dr$  verrichten muss, wenn sie den Planeten verlässt. Die gesamte, von der Rakete zu verrichtende Arbeit erhalten wir durch (unendliche) Summation der Arbeit  $mg \frac{R^2}{r^2} dr$ , was genau folgendem Integral entspricht:

$$\begin{aligned} \int_R^{\infty} mg \frac{R^2}{r^2} dr &= mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_R^{\rho} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{r} \right|_R^{\rho} \\ &= -mgR^2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) \\ &= mgR . \end{aligned}$$

Und das ist endlich! Was muss das für eine Erleichterung für die Pioniere der Weltraumforschung gewesen sein! 

## Reihen und Integrale

Wir kommen hier auf Reihen zurück und nutzen beim folgenden Satz, dass das bestimmte Integral gerade über den Grenzwert von Reihen definiert wurde, wodurch über die Richtigkeit des Satzes eigentlich schon alles gesagt ist.

### Satz

Sei  $f: [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige monoton fallende und positive Funktion. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert. (Integralvergleichskriterium) 

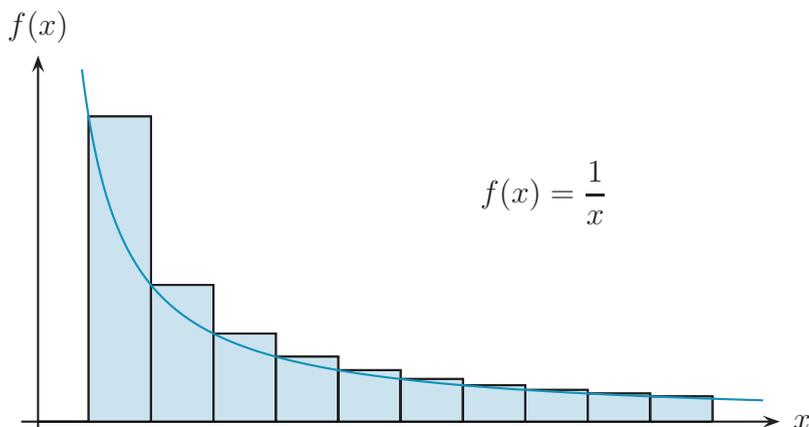
### Beispiel

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty .$$

Nach dem Integralvergleichskriterium divergiert also die harmonische Reihe. Klar ist dadurch aber gleichfalls, dass z. B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert.

Das Bild verdeutlicht das Geschehen nochmals für die harmonische Reihe; die Rechteckflächen entsprechen gerade den Summanden dieser Reihe.



## 12.6 Aufgaben

1. Berechnen Sie  $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ . (Logarithmische Ableitung)
2. Berechnen Sie folgende Stammfunktionen:

$$\int \cos x \sin x dx, \quad \int x \sin x dx, \quad \int \cos^2 x dx, \quad \int \frac{x^2 + x}{x^2 + 2} dx.$$

3. Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx, \quad \int_0^\pi \sin(\lambda x) dx, \quad \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx.$$

4. Fassen Sie tabellarisch zusammen, für welche  $a \in \mathbb{R}$  die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx \quad \text{bzw.} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$$

existieren und welche Werte sie annehmen. Stellen Sie die dazu notwendigen Berechnungen an.

5. Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie ggf. ihren Wert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)^2} dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

6. In Kapitel 12.4.3 haben wir folgende Formel für das Integral rationaler Funktionen kennen gelernt:

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{2x + b}{(k-1)(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4c - b^2)} \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} dx \quad (\text{für } k > 1)$$

- (a) Berechnen Sie für den Nennerterm  $f(x) := x^2 + bx + c$  die Ableitungen:  $f'$ ,  $f''$  und  $(f')^2$ .
- (b) Bestimmen Sie mithilfe dieser Ableitungen  $\left(\frac{f'}{f^{k-1}}\right)'$ .
- (c) Leiten Sie daraus obige Integralformel her.

## 12.7 Lösungen

1. Der Begriff „Logarithmische Ableitung“ deutet schonmal einen Zusammenhang zum Logarithmus an. Wie genau dieser Zusammenhang aussieht, verrät uns die Substitutionsregel:

$$\int_a^t \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_a^t \frac{1}{g(x)} g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(t)} \frac{1}{g} dg = \ln g(t) - \ln g(a)$$

oder auch

$$\int_a^t \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_a^t \frac{1}{g(x)} \frac{dg}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(t)} \frac{1}{g} dg = \ln g(t) - \ln g(a) .$$

Damit ist der natürliche Logarithmus eine Stammfunktion der logarithmischen Ableitung:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + c .$$

2.

$$\int \cos x \sin x dx = \sin x \sin x - \int \sin x \cos x dx$$

$$\Rightarrow \int \cos x \sin x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x dx &= \int \cos x \cos x dx \\
&= \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx \\
&= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx \\
&= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \\
\Rightarrow \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 2} dx &= \int 1 + \frac{x - 2}{x^2 + 2} dx \\
&= \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 2} dx \\
&= x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\
&= x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx &= \int_1^2 x^{-3} dx \\
&= \frac{1}{-2} x^{-2} \Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{-2x^2} \Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{-8} - \frac{1}{-2} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(\lambda x) dx &= -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) \Big|_0^\pi \\
&= -\frac{1}{\lambda} (\cos(\lambda\pi) - \cos 0) \\
&= -\frac{1}{\lambda} (\cos(\lambda\pi) - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx &= \int_1^2 x(x-1)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= x\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{2}{3}2 - \frac{2}{3}\frac{2}{5} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

4. Wir unterscheiden drei Fälle, in denen wir zunächst einmal die Stammfunktion bestimmen und so notieren, dass der Exponent von  $x$  positiv ist:

$$a > 1: \int \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{-(a-1)x^{a-1}} = \frac{-1}{(a-1)x^{a-1}} + c,$$

$$a = 1: \int \frac{1}{x^a} dx = \ln x + c,$$

$$a < 1: \int \frac{1}{x^a} dx = \frac{x^{1-a}}{1-a} + c.$$

Nun können wir die Grenzwerte für die uneigentlichen Integrale betrachten:

$$\begin{aligned}
a > 1: \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \searrow 0} \int_b^1 \frac{1}{x^a} dx \\
&= \lim_{b \searrow 0} \frac{-1}{(a-1)x^{a-1}} \Big|_b^1 \\
&= \lim_{b \searrow 0} \left( \frac{-1}{a-1} - \frac{-1}{(a-1)b^{a-1}} \right) \\
&= \infty \\
\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^a} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{(a-1)x^{a-1}} \Big|_1^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{(a-1)b^{a-1}} - \frac{-1}{a-1} \right) \\
&= \frac{1}{a-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a = 1 : \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \searrow 0} \int_b^1 \frac{1}{x^a} dx \\
 &= \lim_{b \searrow 0} \ln x \Big|_b^1 \\
 &= \lim_{b \searrow 0} (0 - \ln b) \\
 &= \infty \\
 \int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^a} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 0) \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a < 1 : \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \searrow 0} \int_b^1 \frac{1}{x^a} dx \\
 &= \lim_{b \searrow 0} \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_b^1 \\
 &= \lim_{b \searrow 0} \left( \frac{1}{1-a} - \frac{b^{1-a}}{1-a} \right) \\
 &= \frac{1}{1-a} \\
 \int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^a} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right) \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

Tabellarisch sieht das so aus:

	$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$	$\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$
$a > 1$	$\infty$	$\frac{1}{a-1}$
$a = 1$	$\infty$	$\infty$
$a < 1$	$\frac{1}{1-a}$	$\infty$

5. Bei der ersten Aufgabe behelfen wir uns mit einer schnellen Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)^2} dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln b - \ln(b+1) + \frac{1}{b+1} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln \left( \frac{b}{b+1} \right) + \frac{1}{b+1} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \ln 2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bei der zweiten Aufgabe ist der Integrand für  $x = 1$  nicht definiert, sodass wir das uneigentliche Integral in zwei uneigentliche Integrale für die Integrationsbereiche  $]0,1[$  bzw.  $]1,2[$  aufteilen müssen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \lim_{b \nearrow 1} \ln(x-1) \Big|_0^b + \lim_{a \searrow 1} \ln(x-1) \Big|_a^2
 \end{aligned}$$

Da aber weder der eine noch der andere Grenzwert existieren, existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

Bei der dritten Aufgabe substituieren wir  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{b \nearrow 1} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \lim_{b \nearrow 1} \int_{\arcsin 0}^{\arcsin b} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt \\
 &= \lim_{b \nearrow 1} \int_0^{\arcsin b} \frac{1}{\cos t} \cos t dt \\
 &= \lim_{b \nearrow 1} t \Big|_0^{\arcsin b} \\
 &= \lim_{b \nearrow 1} \arcsin b \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Bei der vierten Aufgabe zerlegen wir den Integrationsbereich in zwei Teile

$] - \infty, 0]$  und  $[0, \infty[$ , wobei die Teilung bei 0 willkürlich ist.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \searrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \nearrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \searrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \nearrow \infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \searrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b \nearrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

6. (a) Für  $f(x) := x^2 + bx + c$  ist  $f'(x) = 2x + b$ ,  $f''(x) = 2$  und  $(f')^2 = 4x^2 + 4bx + b^2 = 4(x^2 + bx + c) + b^2 - 4c = 4f(x) + b^2 - 4c$ .

(b) Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'}{f^{k-1}}\right)' &= \frac{f'' f^{k-1} - f'(k-1)f^{k-2} f'}{(f^{k-1})^2} \\ &= \frac{2f^{k-1} - (k-1)f^{k-2}(4f + b^2 - 4c)}{f^{2k-2}} \\ &= \frac{(2-4k+4)f^{k-1} - (k-1)(b^2-4c)f^{k-2}}{f^{2k-2}} \\ &= \frac{2(3-2k)f^{k-1} + (k-1)(4c-b^2)f^{k-2}}{f^{2k-2}} \\ &= -\frac{2(2k-3)}{f^{k-1}} + \frac{(k-1)(4c-b^2)}{f^k} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\frac{1}{f^k} = \frac{1}{(k-1)(4c-b^2)} \left( \left(\frac{f'}{f^{k-1}}\right)' + \frac{2(2k-3)}{f^{k-1}} \right)$$

und nach Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{f^k} dx &= \frac{1}{(k-1)(4c-b^2)} \left( \frac{f'(x)}{f^{k-1}(x)} + 2(2k-3) \int \frac{1}{f^{k-1}(x)} dx \right) \\ &= \frac{2x+b}{(k-1)(4c-b^2)f^{k-1}(x)} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4c-b^2)} \int \frac{1}{f^{k-1}(x)} dx. \end{aligned}$$

### Fragen

- Was ist die Grundidee bei der Berechnung von bestimmten Integralen? Fertigen Sie Skizzen an.
- Sind differenzierbare Funktionen integrierbar?
- Was besagt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung?
- Welche Rolle spielt die Integrationskonstante?
- Was ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung und wofür kann er verwendet werden?
- Nennen Sie wichtige Integrationsregeln.
- Was ist ein uneigentliches Integral und was muss bei seiner Berechnung beachtet werden?
- Formulieren Sie das Integralvergleichskriterium.



# 13 Ausblick: Fourierreihen

## 13.1 Motivation

Durch die Taylorreihe können wir zahlreiche Funktionen darstellen bzw. durch das Taylorpolynom approximieren. Sind die Funktionen periodisch (wir denken hier an Schwingungsprozesse), so geht dies durch ein so genanntes *trigonometrisches Polynom* noch besser, denn ein solches wird aus den periodischen Funktionen Sinus und Kosinus zusammengesetzt, die wir bereits gut kennen.

Die Idee der Überlagerung von endlich vielen Schwingungen zu einem Polynom ist gut, es kann aber auch anders kommen. So erfordert z. B. die mathematische Beschreibung eines „Knalls“ die Modellierung eines Schwingungsphänomens, welches nicht durch die Überlagerung von nur „einigen wenigen“ Schwingungen möglich ist; durch unendlich viele wohl eher.

Dies wird dann ähnlich wie bei der Taylorreihe durch den Übergang vom (nun trigonometrischen) Polynom zur so genannten *Fourierreihe* bewerkstelligt, die dann Sinus- und Kosinusfunktionen unendlich vieler Frequenzen als Summanden enthält.

Wie dies genau zu geschehen hat, lernen wir in diesem Kapitel. Die Grundlagen verdanken wir Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), dessen Name sogar (mit 71 anderen) auf dem Eiffelturm in Paris verewigt ist, um seine Leistungen zu würdigen.

Wir möchten noch bemerken, dass die so genannte Fourieranalyse und -synthese in den mathematisch geprägten Wissenschaften sehr bedeutsam ist, wir denken dabei u. a. an die Signalverarbeitung. Daher müssten wir für ein tieferes Verständnis eine große Menge an zusätzlichem Stoff behandeln, für den uns an dieser Stelle nicht der richtige Platz zu sein scheint. Daher machen wir gleich hier deutlich, dass wir wirklich nur die elementaren Dinge zu Fourierreihen behandeln und so einen ersten Einblick geben. Allerdings wollen wir die Gelegenheit nutzen, am Ende etwas über diesen fortgeschrittenen Teil der Analysis einer Variable zu erwähnen, denn hier fließen einige Begriffe in schöner Art

und Weise zusammen, die wir zuvor gelernt haben. Es ist aber wirklich nur ein Ausblick, weshalb wir hier auch auf Aufgaben verzichtet haben.

## 13.2 Grundlagen zu Fourierreihen

Wir erinnern uns: Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit der Periode  $p$  oder auch kurz  $p$ -periodisch, wenn stets  $f(x + p) = f(x)$  gilt.

### Definition (Fourierreihe, Fourier-Koeffizienten)

Ist  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, betrachten wir

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

Die rechte Seite ist die  $f$  zugeordnete Fourierreihe mit den Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ :

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx .$$



- Mit dem obigen Ausdruck  $f \sim \dots$  meinen wir, dass der Funktion die Fourierreihe zugeordnet ist und nicht, dass diese gleich der Funktion ist. Dazu gleich mehr.
- Bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten kann auch über jedes andere Intervall der Länge  $2\pi$  integriert werden, weil  $f$  ja  $2\pi$ -periodisch ist. Ferner können auch allgemein  $p$ -periodische Funktionen betrachtet werden.

Um sich unnötige Rechnungen zu ersparen, sollten Sie folgende Punkte beachten:

- Ist  $f$  gerade (bis auf die Randpunkte), gilt also  $f(x) = f(-x)$  für  $x \in ]-\pi, \pi[$ , so sind alle  $b_k = 0$  und die  $a_k$  können alternativ durch

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

berechnet werden.

- Ist  $f$  ungerade (bis auf die Randpunkte), gilt also  $f(x) = -f(-x)$  für  $x \in ]-\pi, \pi[$ , so sind alle  $a_k = 0$  und die  $b_k$  können alternativ durch

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

berechnet werden.

Dies zu beweisen wollen wir hier unterlassen, es ist aber nicht schwer, dies in Eigenarbeit zu machen. Bitte versuchen Sie es als Übung.

Mit einem Beispiel wollen wir die Vorgehensweise verdeutlichen, denn auf den ersten Blick erscheint die obige Definition sicher nicht ganz einfach.

### Beispiel

Sei die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $]-\pi, \pi]$  durch  $f(x) := x$  definiert und auf ganz  $\mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch fortgesetzt. Es ergibt sich die so genannte „Sägezahnfunktion“. Den Namen hat die Funktion von ihrem gezackten Funktionsgraphen, den Sie weiter unten zusammen mit der Approximation durch die Fourierreihe finden.

$f$  ist ungerade (bis auf die Randpunkte), weshalb alle  $a_k = 0$  sind. Weiterhin gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( x \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{-2}{k\pi} \left( x \cos(kx) - \frac{\sin(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-2}{k\pi} \pi \cos(k\pi) \\ &= \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von  $f$  lautet demnach

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx).$$

Die hier behandelte Funktion bekommen Sie in physikalischen Übungen recht häufig auf dem Oszilloskop präsentiert, die Fourierreihe bietet Ihnen dann eine schöne mathematische Darstellung. ◆

Es stellt sich die Frage, was die Fourierreihe eigentlich mit der Funktion zu schaffen hat, für die wir diese bilden? Darüber gibt der nächste Satz Auskunft (den wir nicht beweisen wollen, es wäre wohl etwas viel an dieser Stelle).

### Satz

Ist die Funktion  $f$  stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe in jedem Punkt gegen den entsprechenden Funktionswert von  $f$ , es ist also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

Ist  $f$  stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe gegen

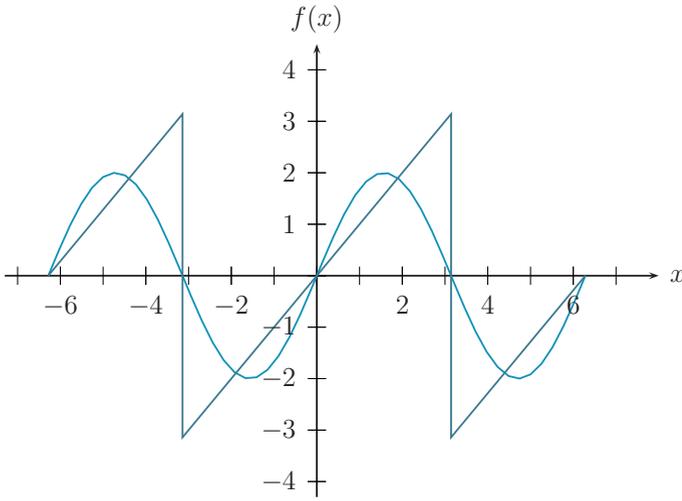
$$\frac{1}{2} \left( \lim_{a \nearrow x} f(a) + \lim_{a \searrow x} f(a) \right) .$$

An den Stetigkeitspunkten von  $f$  ist dies gleich dem Funktionswert von  $f$ , somit gilt dort wieder

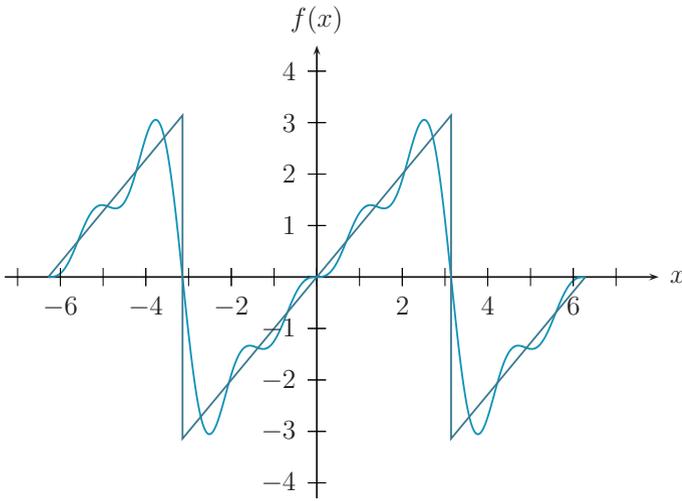
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

Nur in Unstetigkeitspunkten von  $f$  entscheidet sich die Fourierreihe diplomatisch für den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes. ■

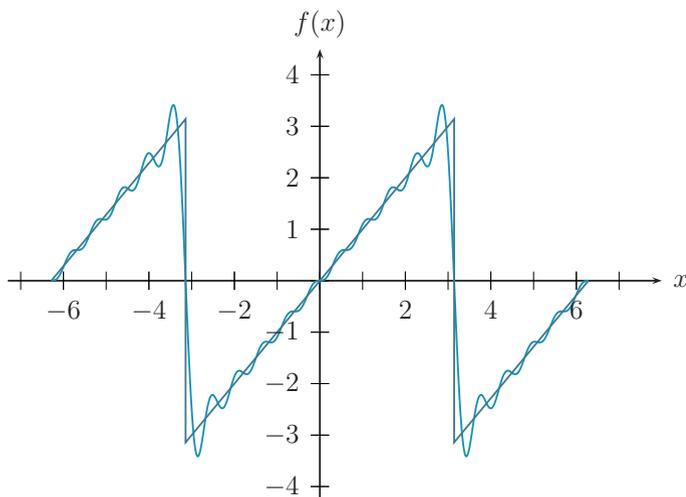
Die Funktion des letzten Beispiels und ihr so genanntes Fourierpolynom werden wir gleich bildlich darstellen. Das Fourierpolynom ist gerade der Abschnitt der Fourierreihe bis zum Summanden der Ordnung  $n$ , also analog zum Taylorpolynom. Wir haben hier verschiedene Ordnungen aufgeführt. Dadurch wird deutlich, wie die Approximation immer besser wird (die vertikalen Linien verdeutlichen nur die Wortwahl für die Sägezahnfunktion, gehören aber selbstverständlich nicht zur Funktion selbst).



Ordnung 1



Ordnung 4



Ordnung 10

### 13.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Wir haben bereits mit der Eulerformel gelernt, dass es einen direkten Zusammenhang zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus gibt. Daher muss sich der entsprechende Ausdruck in der Fourierreihe auch entsprechend darstellen lassen, was der Fall ist:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Dabei sind die komplexen Fourier-Koeffizienten durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

gegeben. Die Berechnung ist in vielen Fällen einfacher, denn

- Die Exponentialfunktion ist leicht zu integrieren.
- Wir haben es nur mit einer Koeffizientenart  $c_k$  zu tun und nicht mit  $a_k$  und  $b_k$ .

Der Zusammenhang zwischen der reellen und komplexen Darstellung ist wie folgt:

$$c_k = \frac{(a_{-k} + ib_{-k})}{2} \quad (k < 0)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2} \quad (k > 0)$$

$$a_0 = 2 \cdot c_0$$

$$\text{bzw.} \quad a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

### Fragen

- Was ist die gemeinsame Idee für Taylor- und Fourierreihen?
- Wann verwenden Sie Fourierreihen?
- Wie lautet die Definition der (komplexen) Fourierreihe?
- Wann entspricht die Fourierreihe der Ausgangsfunktion?
- Was ist bei der Berechnung von ungeraden Funktionen zu beachten?

# Lineare Algebra



# 14 Worum geht es in der Linearen Algebra?

Die beiden Worte in „*Lineare Algebra*“ können wir isoliert betrachten und feststellen, dass „*linear*“ vom lateinischen „*linea*“ stammt, was so viel wie „*gerade Linie*“ heißt. „*Algebra*“ kommt vom arabischen „*al-jabr*“ und bedeutet in etwa „*Zusammenfügen gebrochener Teile*“. Aus moderner Sichtweise ließe sich also aus den beiden Worten folgern, dass wir es mit geraden Linien und dem Rechnen mit Variablen zu tun haben, um daraus neue Ergebnisse zu erhalten. Das ist aber zu kurz gesprungen. Wir sollten vielmehr die Begrifflichkeit „*Lineare Algebra*“ als ein mathematisches Teilgebiet auffassen, in dem es — um nur das Wesentliche zu nennen — um das Folgende geht:

- Lösung und Untersuchung linearer Gleichungssysteme,
- Vektoren und Vektorräume,
- Abstands- und Winkelmessung,
- Eigenwerte und -vektoren.

Bei der Behandlung dieser Begriffe werden Sie zahlreiche Hilfsmittel kennen lernen wie z. B. Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen, lineare Unabhängigkeit, Skalarprodukte und einiges mehr. All dies braucht Sie nicht zu verwirren oder Ihnen gar Angst zu machen. Wir werden Sie auf dem Weg zu den neuen Dingen hilfreich begleiten. Allerdings geht keine Wanderung durch das Gebirge ohne Mühe. Aber Training hilft stets, das Ganze leichter zu bewältigen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir nochmals die Bedeutung der Aufgabensammlungen zu jedem Kapitel betonen.

Zu den Begriffen aus obiger Aufzählung wollen wir einige Bemerkungen machen:

**Lineare Gleichungssysteme** sind Systeme von Gleichungen der Art

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 &= 14 \\3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 5.\end{aligned}$$

Die einzelnen Gleichungen — allgemein mit  $n$  Unbekannten (die wir im Folgenden auch gerne Variablen nennen) — haben also stets die Gestalt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b.$$

Die  $a_i$  sind dabei reelle oder komplexe Zahlen, die  $x_i$  die Unbekannten und  $b$  ist ebenfalls eine reelle oder komplexe Zahl, die Inhomogenität genannt wird. Interessant ist dabei z. B., ob es überhaupt Lösungen gibt, wie diese aussehen und ob sie sogar eindeutig sind. Die entsprechenden Beurteilungs- und Berechnungsmethoden hierfür werden wir erlernen.

Lineare Gleichungssysteme wären nutzlos, könnten wir mit ihnen nicht Fragen des Alltags lösen. Ein Eimer-Fabrikant kann z. B. die folgende Fragestellung formulieren: Er hat 10 Einheiten Kunststoff und 12 Einheiten Metall. Ein großer Eimer aus dem Produktionssortiment benötigt zur Herstellung 3 Einheiten Kunststoff und 1 Einheit Metall, für einen kleinen Eimer braucht er 1 Einheit Kunststoff und 1 Einheit Metall. Welche Anzahl großer und kleiner Eimer kann er produzieren, ohne dass Reste anfallen? Als lineares Gleichungssystem erhalten wir

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 &= 10 \\x_1 + x_2 &= 12.\end{aligned}$$

Dabei ist dann  $x_1$  die Anzahl der großen,  $x_2$  die der kleinen Eimer. Um die Lösung kümmern wir uns erst einmal nicht.

**Vektoren** haben Sie in der Schule meist als Pfeile in der Ebene behandelt, die zu bestimmten Punkten im Koordinatensystem zeigen. In der Physik wurde dieser Begriff dann z. B. verwendet, um Kräfte zu beschreiben oder um durch die Länge des Vektors und seine Richtung die Geschwindigkeit eines Balles anzugeben. Der Begriff des Vektors ist damit aber noch lange nicht genau geklärt. Mathematiker suchen nach allgemeinen Strukturen, die dann gesonderte Namen bekommen. Elemente einer Menge, die sich in diese Strukturen einfügen und die Menge in gewisser Weise nicht verlassen (können), bilden dann eine Gesamtheit, die häufig als Raum bezeichnet wird. So gibt es auch eine spezielle Struktur, der die Vektoren genügen; das Ganze wird **Vektorraum** genannt. Vektoren sind dann nicht mehr ausschließlich „Pfeile“. Vielmehr werden wir lernen, dass auch Funktionen und andere Objekte Vektoren in einem Vektorraum sein können.

Werden auf einem Tisch oder im uns umgebenden Raum zwei Punkte miteinander verbunden, so am einfachsten mit einer geraden Linie. Nun können wir die Frage stellen, wie lang diese Verbindungslinie ist. Liegen zwei Geraden vor: Wie groß ist der Winkel zwischen beiden? Dies sind Fragen nach der **Abstands- und Winkelmessung**. Die Lineare Algebra stellt uns hierfür Hilfsmittel zur Verfügung, die wir dann *Norm* und *Skalarprodukt* nennen. So werden wir einfach zwei Punkte mit einem Vektor verbinden, welcher genau auf der Verbindungslinie liegt, und seine Länge messen, indem wir die Norm des Vektors berechnen. Die Richtung verschiedener Geraden wird dann wieder durch Vektoren beschrieben. Mit dem Skalarprodukt können wir den Winkel zwischen ihnen berechnen und damit auch den Winkel zwischen Geraden.

Wir wollen noch bemerken, dass sich Vektoren auch in der Welt der Computer finden, so sind u. a. bestimmte Datenstrukturen (wir denken beispielsweise an Arrays in den verschiedensten Programmiersprachen) mit Vektoren assoziiert.

**Eigenwerte** sind etwas ganz Besonderes. Sie werden uns bei zahlreichen Überlegungen hilfreich sein und die Arbeit vereinfachen. Darüber hinaus sind sie aber auch für sich betrachtet interessant. Wir können einfach verstehen, was ein Eigenwert ist. Betrachten wir hierzu als Beispiel die folgende Gleichung, wobei  $f(x)$  eine Funktion ist und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Auf der linken Seite stehe die erste Ableitung der Funktion, also  $(\frac{df}{dx}(x) = f'(x))$ :

$$\frac{df}{dx}(x) = \lambda f(x).$$

Diese Gleichung mag kompliziert erscheinen. Aber es gibt einfache Lösungen. So ist  $f(x) := e^{\lambda x}$  eine Lösung für jedes beliebige  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d e^{\lambda x}}{dx} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Gleichungen dieser Art — die wir noch allgemeiner betrachten werden — heißen *Eigenwertgleichungen* und  $\lambda$  *Eigenwert* zum *Eigenvektor*  $e^{\lambda x}$ . Ihre allgemeine Form ist

$$L\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

wobei wir unter  $L$  hier naiv etwas verstehen wollen, was auf den Vektor  $\vec{v}$  „wirkt“. In unserem Beispiel ist  $L$  einfach die erste Ableitung und  $\vec{v} := f(x)$ . Die Funktion  $f(x) = e^{\lambda x}$  sieht sicher nicht so aus, wie Sie es von Vektoren aus der Schule vielleicht kennen. Dies soll uns aber jetzt nicht weiter stören, denn wir werden über den Zusammenhang noch einiges erfahren.

Neben der reinen innermathematischen Anwendung von Eigenwerten haben diese auch in den Naturwissenschaften eine große Bedeutung. So werden durch bestimmte Abbildungen — die dann z. B. Namen wie „Hamilton-Operator“ tragen — physikalische Systeme beschrieben, deren Eigenwerte beispielsweise die diskreten Energiezustände eines Atoms repräsentieren. Dies ist hier natürlich

sehr vage formuliert und es erwartet niemand, dass Sie dies an dieser Stelle bereits fassen können. Dazu sind sicherlich auch noch ein paar Semester Physik nötig. Aber das Beispiel gibt einen Ausblick auf das, was die Methoden und Grundideen der Linearen Algebra in ihrer Weiterentwicklung leisten können. Es ist gut zu wissen, dass es noch einiges hinter dem Horizont gibt.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang mit den Naturwissenschaften ist durch das so genannte *Superpositionsprinzip* gegeben. Physikalisch bedeutet dies, dass die Summe zweier Zustände eines Systems auch wieder ein Zustand des Systems ist. So kann sich eine Gitarrensaite in bestimmten Schwingungszuständen befinden. Lassen sich diese geeignet mathematisch durch Funktionen beschreiben, so ist unter bestimmten Voraussetzungen die Summe der Funktionen wieder die Beschreibung eines Schwingungszustandes der Saite.

Differenzialgleichungen, welche ein Wesentliches Element bei der Beschreibung von Phänomenen in Naturwissenschaft und Technik sind, bilden den Teil, der Analysis und Lineare Algebra zusammenfließen lässt. Wie der Name sagt, geht es hierbei auch um das Differenzieren. Wir wollen Sie ein erstes Mal mit Differenzialgleichungen bekannt machen. Eigentlich ist es sogar das zweite Mal, denn die bereits oben betrachtete Gleichung

$$\frac{df}{dx}(x) = \lambda f(x),$$

die wir auch in der (bei Differenzialgleichungen häufig verwendeten) Form

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0$$

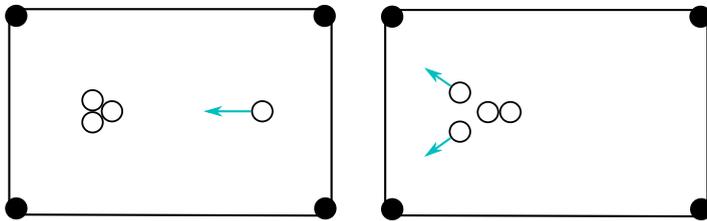
schreiben können, ist eine Differenzialgleichung. Eine solche zeichnet sich dadurch aus, dass sie eine gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) — teils gar nur diese — enthält. Hier kommt neben der Funktion  $f(x)$  nur die erste Ableitung  $f'(x)$  vor. Gesucht ist hier also ein  $f(x)$ , durch welches die Gleichung erfüllt wird. Eine Lösung hatten wir bereits erwähnt:  $f_1(x) = e^{\lambda x}$ . Offensichtlich ist aber auch  $f_2(x) = 2e^{\lambda x}$  eine Lösung (zur Unterscheidung nennen wir nicht beide  $f$ , sondern  $f_1$  und  $f_2$ ). Sie können leicht überprüfen, dass auch  $f_1 + f_2$  eine Lösung ist.

Das Faszinierende ist nun, dass sich diese Struktur (Multiplikation mit einer Konstanten ergibt eine neue Lösung ebenso wie die Addition zweier Lösungen) auch bei den oben angesprochenen linearen Gleichungssystemen findet! Auch dort sind, wenn wie bei den Differenzialgleichungen bestimmte Bedingungen erfüllt sind, Summen von Lösungen wieder Lösungen. Das ist der Grund, warum wir im Rahmen der Linearen Algebra gerne einen Blick auf Differenzialgleichungen werfen: Es liegt an den gemeinsamen Strukturen.

# 15 Vektorräume und lineare Unabhängigkeit

## 15.1 Motivation

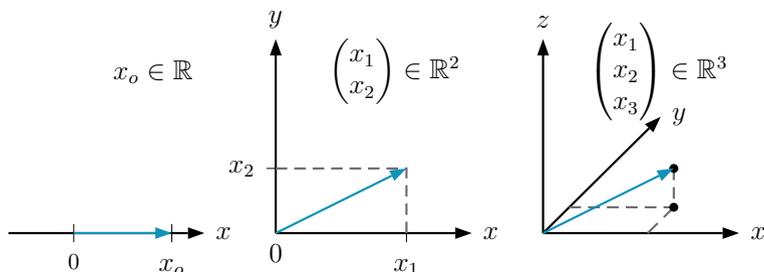
Vieles im täglichen Leben lässt sich durch eine Zahl beschreiben: So hat der Januar 31 Tage und ein Byte sind acht Bit. Hierbei handelt es sich um so genannte *skalare Größen*. Darüber hinaus gibt es jedoch Dinge, die sich nicht alleine durch eine Zahl beschreiben lassen, sondern bei denen auch eine Richtung von Bedeutung ist; Beispiele kommen häufig aus der Physik. So bewegt sich eine Kugel beim Billard mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Diese hat einen bestimmten Wert, auch Betrag genannt, aber auch eine Richtung, die von Bedeutung ist:



Gleiches gilt auch für die Kraft, bei deren Wirkung es ebenfalls auf Betrag und Richtung ankommt. Wir sprechen, sofern Betrag und Richtung kennzeichnend sind, von einem *Vektor*, der gewöhnlich als Pfeil gezeichnet wird. Wir werden jedoch sehen, dass das bisher Geschriebene nur die halbe Wahrheit ist, denn Vektoren sind viel mehr, nämlich Elemente von Mengen, auf denen zuvor eine besondere Struktur festgelegt wurde. Dies führt zum Begriff des *Vektorraumes*. Ein solcher kann z. B. als Elemente auch Funktionen mit bestimmten Eigenschaften enthalten. Zur Darstellung solcher Vektoren versagt dann aber die einfache Vorstellung in Form von Pfeilen.

Unsere bisherige Herangehensweise ist vornehmlich physikalisch motiviert. Es

lässt sich aber auch ganz einfach die Frage stellen: Wie erreichen wir Punkte im „Raum“? Beispielsweise so:

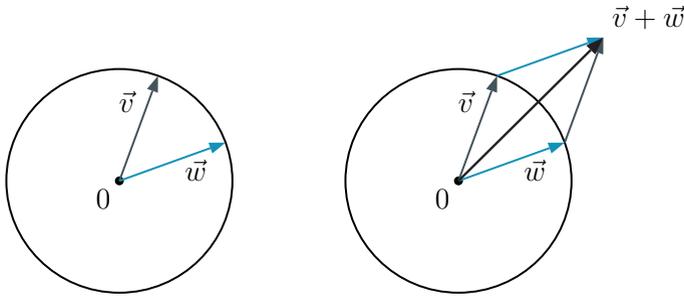


Es ist klar, dass der Begriff Raum hier intuitiv verwendet wurde, denn offensichtlich haben wir nur die gängige Anschauung bemüht und Vektoren als Pfeile in allseits bekannte Koordinatensysteme eingezeichnet. Dabei fällt auf, dass die mathematische Darstellung der Vektoren einfach dadurch geschieht, dass die Koordinaten (die Sie nach Projektion des Vektors auf die Koordinatenachsen ablesen können) einfach in Klammern geschrieben werden, wie oben geschehen. Dabei sehen wir das erste Mal die Bezeichnung  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , was wir vorerst als „Ebene“ und „Raum“ verstehen wollen. Später wird klar werden, dass es sich dabei um so genannte *reelle Vektorräume* handelt.

Wir wollen dann auch wissen, ob sich eine Menge von Vektoren bereits durch wenige Vektoren vollständig beschreiben lässt. Die Hilfsmittel dafür sind für sich bereits interessant und nützlich.

## 15.2 Vektorräume

Mehrfach sprachen wir über Mengen mit einer besonderen Struktur. Es geht dabei im Wesentlichen darum, dass eine Menge betrachtet und durch Eigenschaften, die definieren, was mit den Elementen der Menge gemacht werden darf, festgelegt wird. Die dabei verwendeten Operationen dürfen nicht aus der Menge herausführen. Die Mathematiker reden bei Mengen mit einer Struktur dann allgemein von „Räumen“. Wir machen uns dies mit einem Bild intuitiv klar: Betrachten wir einen Kreis und zeichnen in diesen, wie unten, den Radius an verschiedenen Stellen ein. Betrachten wir diese Radien als zwei Vektoren (als Pfeile visualisiert) und addieren sie mithilfe eines eingezeichneten Parallelogrammes, so zeigt der Ergebnisvektor aus dem Kreis heraus.



Das wollen wir nicht! Betrachten wir hingegen zwei Vektoren wie oben in der gesamten Ebene (die natürlich in alle Richtungen unendlich weit ausgedehnt ist), so bleiben wir auch nach Addition der Vektoren in der Ebene.

Wir definieren gleich den für die Lineare Algebra bedeutsamen Vektorraum. Für diese und auch für folgende Definitionen spielen die reellen ( $\mathbb{R}$ ) oder komplexen Zahlen ( $\mathbb{C}$ ) eine Rolle und um nicht alles einmal für  $\mathbb{R}$  und einmal für  $\mathbb{C}$  formulieren zu müssen, hat sich die Bezeichnung  $\mathbb{K}$  als Stellvertreter für beide Mengen etabliert. Auch wir wollen darauf nicht verzichten. Das  $\mathbb{K}$  stammt übrigens vom so genannten *Körper*, ebenfalls eine Menge mit einer besonderen Struktur.  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind in weiten Teilen der Mathematik die wichtigsten Körper. Wir wollen hier allerdings nicht näher auf diese Struktur eingehen und widmen uns nun dem Vektorraum:

### **Definition** (Vektorraum)

Gelten für eine Menge  $V$  die unten stehenden Eigenschaften 1. bis 8. für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  und alle  $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ , so heißt die Menge  $V$  zusammen mit den Rechenoperationen „+“ und „ $\cdot$ “  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

1.  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  (Assoziativität der Addition)
2.  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  und  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$  (Nullvektor)
3.  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (Kommutativität)
4.  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$  (Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren)
5.  $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$ ,  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$  (Distributivität)
6.  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
7.  $\lambda \cdot \vec{x} \in V$
8.  $\vec{x} + \vec{y} \in V$



- Die Elemente eines Vektorraumes sind nicht immer, wie bereits erwähnt, „Pfeile“ bzw. als solche darstellbar. Diese Art der Visualisierung ist nützlich, jedoch nicht allgemein anwendbar.
- Wir haben oben absichtlich „+“ und „·“ mit Anführungszeichen geschrieben, denn unter dem „Plus“ bzw. „Mal“ verstehen wir hier allgemein nicht mehr die Rechenoperationen, welche für reelle Zahlen bekannt sind. Ähnlichkeiten gibt es, jedoch müssen die verwendeten Rechenoperationen nachfolgend stets erst definiert werden. Bis dahin sind die verwendeten Symbole einfach Platzhalter, die konkretisiert werden müssen.
- Durch die Punkte 1. bis 8. haben wir nun die erwähnte Struktur gegeben, die uns zum einen sagt, was wir mit den Elementen machen dürfen. Zum anderen sagen uns die Punkte 7. und 8., dass wir beim Anwenden der Operationen nicht aus  $V$  herausgelangen können.

Wir können uns gut vorstellen, dass all dies sehr technisch und „vom Himmel fallend“ erscheint. Wir werden die Situation durch ein Beispiel entspannen:

### Beispiel

Denken wir uns anstelle der Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  einfach reelle Zahlen  $x$  und  $y$ . Dann ist alles, was bei den Punkten 1. bis 6. steht, einfach nur das, was Sie schon immer über das Rechnen mit reellen Zahlen wussten. In gewisser Weise wird die zugrunde liegende Idee nur verallgemeinert.

Was ist aber die Rolle von 7. und 8.? Nun, wenn wir eine reelle Zahl mit einer anderen multiplizieren oder zwei reelle Zahlen miteinander addieren, so ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl. Die beiden Rechenoperationen führen also nicht aus der Menge hinaus.

Folgerung: Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der gewöhnlichen Multiplikation und Addition bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. (Sie haben es bisher nur nicht gewusst.) Sehen Sie sich die Vektorraumdefinition unter diesem Aspekt noch einmal an. ◆

## 15.3 Der Vektorraum der reellen Zahlen

Wir sind nun gerüstet, um ein weiteres Beispiel zu betrachten. Es ist eines der bedeutsamsten, da sich Betrachtungen in komplizierteren Vektorräumen oft auf solche in diesem Beispiel zurückführen lassen, wie wir noch im Abschnitt zum Basiswechsel sehen werden.

Wir führen hier den so genannten  $\mathbb{R}^n$  ein; dieser ist ein Vektorraum, wie wir unter Verwendung der sogleich vorgestellten Rechenoperationen mit den Punkten

1. bis 8. leicht nachprüfen können. Seine Vektoren haben die Gestalt

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Die Zahlen  $x_i$  heißen *Koordinaten* von  $\vec{x}$ . Die natürliche Zahl  $n$  im Exponenten von  $\mathbb{R}^n$  gibt die Anzahl der Koordinaten seiner Vektoren an.

Ein spezieller Vektor ist der Nullvektor:

$$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sagen nun, welche Rechenoperationen hier verwendet werden:

*Addition von Vektoren:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

*Multiplikation mit Skalaren:*

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Operationen sind *Vektorraumoperationen*, wie sie in der Definition verwendet wurden.

### Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Wir können in diesem Abschnitt statt Elementen aus  $\mathbb{R}$  auch komplexe Zahlen verwenden und erhalten so  $\mathbb{C}^n$ , den Vektorraum der Vektoren mit  $n$  komplexen Koordinaten.

## 15.4 Der Vektorraum reellwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}$

Wir müssen zugeben, dass das letzte Beispiel für einen Vektorraum weder spektakulär noch schwierig war. Dies nimmt ihm allerdings nichts von seiner immensen Bedeutung! Dennoch möchten wir noch ein deutlich abstrakteres Beispiel vorstellen, welches weit von der Anschauung entfernt ist, denn Sie sollten keineswegs in dem Glauben bleiben, dass Vektoren stets als Pfeile — wie in der Schule — zu visualisieren sind.

Betrachten wir als Beispiel die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir zeigen im Folgenden, dass diese Menge zusammen mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der Multiplikation mit Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$$

die Vektorraumeigenschaften erfüllt. Der Trick dabei ist, dass durch die gerade gemachten Definitionen die beiden Rechenoperationen auf ihre Entsprechungen in  $\mathbb{R}$  zurückgeführt werden, womit sich das Nachprüfen der Punkte 1. bis 6. der Vektorraumdefinition erübrigt, als Beispiel führen wir dennoch die erste Vektorraumeigenschaft aus. Nach der definierten Addition ist

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) , \end{aligned}$$

womit die erste Vektorraumeigenschaft nachgewiesen wäre.

Interessant bleibt die Abgeschlossenheit der Menge bezüglich dieser Rechenoperationen: Sind für sämtliche Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sowie für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot f \quad \text{und} \quad f + g$$

wieder Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ ?  $\lambda \cdot f$  ordnet jedem  $x \in \mathbb{R}$  die Zahl  $\lambda f(x) \in \mathbb{R}$  und  $f + g$  ordnet jedem  $x \in \mathbb{R}$  die Zahl  $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$  zu. Somit hätten wir auch die Abgeschlossenheit eingesehen.

Dass dies auch mal schief gehen kann, können wir bei der Überprüfung, ob diese Menge auch ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist, sehen. Die Frage lautet also: Ist die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum? Für  $\lambda$  sind somit alle komplexen Zahlen zugelassen, z. B.  $\lambda = i$ , und  $\lambda f(x) = if(x)$  ist mitnichten eine reellwertige Funktion, solange es sich bei  $f$  nicht um die Nullfunktion handelt. Dem gegenüber ist die Menge der Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sehr wohl ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Überlegen Sie bitte, ob diese Menge auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

## 15.5 Linearkombinationen

Die von uns verwendeten Operationen sind die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit Skalaren. Durch diese erhalten wir aus bekannten Vektoren neue. Diese Vorgehensweise erheben wir nun zum Prinzip, nämlich zu dem der Linearkombination:

### Definition (Linearkombination)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum; ein Vektor  $\vec{v} \in V$  heißt Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ , wenn er sich folgendermaßen mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  darstellen lässt:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \quad \left( =: \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i \right).$$



Sprechweise:  $\vec{v}$  lässt sich aus  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  *linear kombinieren*.

### Beispiel

Der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  soll aus  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  linear kombiniert werden:

$$\vec{v} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2.$$

Wir sehen sofort, dass hier  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$  ist.



Eine mögliche Frage: Ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear kombinierbar?

Test:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &0 = \lambda_1 + 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 + \lambda_2 \\ 1 &= 0 + 0 \quad (\text{geht nicht!}) \end{aligned}$$

Wir haben also gelernt, wie sich bestimmte Vektoren aus bereits bekannten Vektoren konstruieren (linear kombinieren) lassen. Was entsteht nun aber, wenn wir

eine vorgegebene Menge von Vektoren betrachten und aus diesen alle möglichen Linearkombinationen bilden? Zuerst soll definiert werden, was dies mathematisch bedeutet:

**Definition** (lineare Hülle, Spann)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der Spann (oder die lineare Hülle) der Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$  ist die Menge aller Vektoren, die sich aus  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  linear kombinieren lassen:

$$\text{Span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} := \{ \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \} .$$



Es ist dabei kein Fehler, dass wir hier „Span“ anstelle von „Spann“ schreiben, sondern einfach eine zumeist verwendete Konvention. Einige Autoren schreiben z. B. auch  $L \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ . Wir wollen ein Beispiel besonderer Art geben, indem wir auf die Visualisierung zurückgreifen:  $\text{Span} \{ \uparrow, \nearrow \} = \mathbb{R}^2$ .

Warum ist das so? Zeichnen wir die beiden Vektoren auf ein Blatt Papier, so können wir durch einige Skizzen schnell sehen, dass wir durch Linearkombinationen der beiden Vektoren wirklich jeden Punkt auf dem Blatt erreichen, denn dies bedeutet ja gerade, die einzelnen Vektoren zu strecken (Multiplikation mit Skalaren) und diese aneinander zu legen (Addition von Vektoren). Bedenken Sie dabei bitte, dass die Richtung eines Vektors hier umgekehrt werden kann, wenn er mit  $(-1)$  multipliziert wird. Da wir auch ohne Probleme beliebig weit über das Blatt zeichnen können, wird klar, dass wir auch beliebig weit davon entfernte Punkte erreichen können. Als Ergebnis erhalten wir damit die ganze Ebene, also den  $\mathbb{R}^2$ .

Wir nähern uns nun der Antwort auf die Frage, ob zur Beschreibung eines Vektorraumes unendlich viele Vektoren nötig sind. Dazu betrachten wir die folgende Definition.

**Definition** (Erzeugendensystem)

Eine Familie  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$  eines Vektorraumes  $V$  heißt Erzeugendensystem von  $V$ , wenn gilt:

$$\text{Span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = V .$$

In Worten: Die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  spannen den Vektorraum  $V$  auf.



**Beispiel**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also spannen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  den gesamten  $\mathbb{R}^2$  auf.

Was zuvor  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  hieß, haben wir hier einfach  $x_1$  und  $x_2$  genannt, weil dies zur Beschreibung der Koordinaten eines Vektors üblich ist.  $\blacklozenge$

Die beiden zuletzt genannten Vektoren haben also die Eigenschaft, dass aus ihnen die gesamte Ebene aufgespannt werden kann. Nehmen wir nur einen der beiden Vektoren, geht das nicht. So können wir durch  $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  nur die reelle Zahlengerade erhalten und auch die Linearkombinationen von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und z. B.  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  liefern nichts anderes.

**Definition** (linear abhängig, linear unabhängig)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$  heißen linear abhängig, wenn es  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  gibt, von denen mindestens eines ungleich Null ist, und folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Das heißt, dass es eine Linearkombination gibt, in der sich die Vektoren genau gegeneinander aufheben.

Die Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$  folgt, dass  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  gilt.  $\blacktriangleleft$

**Definition** (Basis, Dimension)

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraumes heißt Basis. Die Anzahl der Vektoren in einer Basis heißt Dimension und die Dimension eines Vektorraumes  $V$  wird mit  $\dim V$  bezeichnet.  $\blacktriangleleft$

Wir merken uns: Alle Basen eines Vektorraumes haben die gleiche Anzahl an Basisvektoren; die Dimension ist somit sinnvoll definiert. Wir werden hier, ohne dies im Folgenden gesondert zu bemerken, stets nur Vektorräume endlicher Dimension behandeln.

Natürlich gibt es auch zahlreiche interessante Dinge über den Fall unendlicher Dimension zu berichten. Dies ist aber hier nicht unser Anliegen, sondern es wird im Rahmen der „Funktionalanalysis“ behandelt, einem weiteren Teilgebiet der Mathematik.

### Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{e}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{e}_2, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{e}_n.$$

Diese  $n$  Vektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  bilden die so genannte *Standardbasis* des  $\mathbb{R}^n$ , was den  $\mathbb{R}^n$  zu einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum macht. Wir wollen kurz obige Definition der Basis hierfür nachprüfen.

- $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  sind linear unabhängig:  
Aus dem Gleichungssystem  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$  folgt  $\lambda_1 \cdot 1 = 0$  (erste Zeile),  $\lambda_2 \cdot 1 = 0$  (zweite Zeile),  $\dots$ ,  $\lambda_n \cdot 1 = 0$  (letzte Zeile). Insgesamt sind somit alle  $\lambda_k = 0$  für  $1 \leq k \leq n$ .
- $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  bilden ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^n$ :  
Zunächst einmal sind  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ . Ein beliebiger Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  hat die Gestalt  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ , kann also als Linearkombination  $\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{e}_k$  der Vektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  geschrieben werden. Somit spannen  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  ganz  $\mathbb{R}^n$  auf.



### Definition (Untervektorraum)

Eine nichtleere Teilmenge  $T$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $V$  heißt Teilraum oder Untervektorraum (UVR), wenn gilt:

1. für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in T \subset V$  folgt  $\vec{x} + \vec{y} \in T$ ;
2. für alle  $\vec{x} \in T$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  folgt  $\lambda \vec{x} \in T$ .

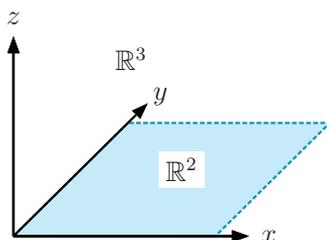


Wichtig bei obiger Definition des Untervektorraumes ist natürlich, dass  $T$  auch wirklich Teilmenge eines Vektorraumes  $V$  ist. Die Definition zielt nämlich darauf ab, dass  $T$  selbst wieder ein eigenständiger Vektorraum ist, also die Vektorraumeigenschaften 1. bis 8. erfüllt. Die grundlegenden Rechenregeln 1. bis 6. gelten für alle Vektoren von  $V$ , also erst recht für alle von  $T$ , da  $T$  Teilmenge

ist. Die Eigenschaften 7. und 8. — die Abgeschlossenheit bzgl. „+“ und „ $\cdot$ “ — gewährleisten, dass die beiden Rechenoperationen nicht aus der Menge herausführen. Dies muss für die kleinere Menge  $T$  nicht mehr unbedingt gelten und wird daher in der Definition des Untervektorraumes gefordert.

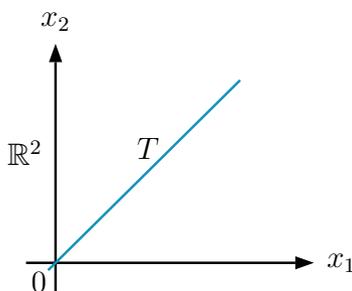
### Beispiel

- $T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein UVR des  $\mathbb{R}^3$ .

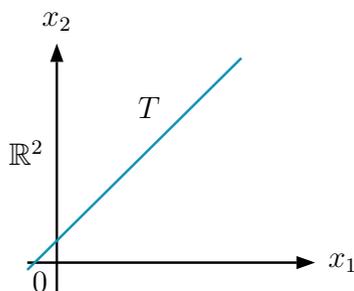


(Das obige Bild ist mathematisch nicht exakt, denn der  $\mathbb{R}^2$  selbst liegt natürlich nicht als blaues Rechteck herum. Es handelt sich lediglich um eine die Anschauung unterstützende Skizze.)

- $T := \{\vec{0}\}$  ist UVR von  $\mathbb{K}^n$ .
- $T := \{(x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$  ist UVR des  $\mathbb{R}^2$



- Eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht, ist *kein* UVR (wir sprechen dann aber von einem so genannten affinen Unterraum).



Warum nicht?

- Die Menge der differenzierbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bildet einen UVR des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums aller Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Denn die Summe zweier differenzierbarer Funktionen sowie reelle Vielfache differenzierbarer Funktionen sind wiederum differenzierbar.



Ein sehr leicht zu überprüfendes Kriterium bei der Untersuchung einer Menge im Hinblick auf die Untervektoreigenschaft ist das Folgende: Jeder Untervektorraum  $U$  eines Vektorraumes  $V$  enthält den Nullvektor. Erfüllt eine Menge also nicht einmal diese Bedingung, so können wir uns weitere Anstrengungen ersparen. Zunächst müssen wir diese Behauptung allerdings einmal (und dann nie wieder) als Folgerung der Untervektorraumdefinition untersuchen. In der Definition steht „Für alle  $\vec{x} \in T$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  folgt  $\lambda\vec{x} \in T$ .“ Nehmen wir uns also irgendein  $\vec{x} \in T$  und wählen  $\lambda = 0$ . Falls  $T$  wirklich ein Untervektorraum ist, gilt damit  $0 \cdot \vec{x} \in T$ . Das Element  $0 \cdot \vec{x}$  ist aber der Nullvektor  $\vec{0}$ .

Schließlich können wir der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit ein wenig mehr Anschauung verleihen. Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren bedeutet nichts anderes, als dass die beiden Vektoren Vielfache voneinander sind. Sie liegen also in *einem* eindimensionalen Untervektorraum. Lineare Abhängigkeit bei drei Vektoren bedeutet entsprechend, dass alle drei Vektoren in *einem* ein- oder zweidimensionalen Untervektorraum — einer Ursprungsgeraden oder -ebene — liegen.

## 15.6 Aufgaben

1. Stellen Sie, wenn möglich, die Vektoren

$$a) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dar.

Kann ein Vektor  $\vec{w}_i$  weggelassen werden, ohne die Menge der möglichen Linearkombinationen zu verringern?

2. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

- (a)  $W_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$
- (b)  $W_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 2x_2\}$
- (c)  $W_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$
- (d)  $W_4 := [0, 1] \times \mathbb{R}$
- (e)  $W_5 := \{0\} \times \mathbb{R}$

3. Überprüfen Sie, ob die folgende Menge ein Vektorraum ist.

$$W := \left\{ p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

also die Menge aller Polynome, deren Grad — d. h. größter auftretender Exponent — maximal  $n$  ist. Hierbei ist  $n$  eine feste natürliche Zahl. Finden Sie dann eine Basis zu  $W$  und überprüfen Sie für Ihre Wahl die entsprechenden Eigenschaften.

- 4. Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen eine Ebene im Raum einen Untervektorraum bildet. Wie sieht dies bei Geraden im Raum aus?
- 5. Finden Sie diejenigen Zahlen  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für die folgende Vektoren eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 15.7 Lösungen

- 1. Die Vektoren sind sehr einfach gewählt, sodass schlichtes Probieren zu den Linearkombinationen führt. Bei komplizierteren Vektoren hilft das Lösen von linearen Gleichungssystemen (siehe Kapitel 17). In Teil a) hilft die Null in der ersten Komponente von  $\vec{v}$ . Um diese auch in der Linearkombination zu erhalten, stehen uns lediglich Kombinationen der Form  $\vec{v} = a\vec{w}_1 + b(\vec{w}_2 - \vec{w}_3)$  zur Verfügung. Dabei fällt auf, dass  $\vec{w}_2 - \vec{w}_3 = \vec{w}_1$

ist (merken!). Also gingen, wenn überhaupt, nur Linearkombinationen der Form  $\vec{v} = c\vec{w}_1$ ; diese Gleichung stimmt offensichtlich nicht.

An dieser Stelle können wir bereits die Frage am Schluss der Aufgabe beantworten. Wegen

$$\vec{w}_2 - \vec{w}_3 = \vec{w}_1$$

kann jeder der drei Vektoren  $\vec{w}_i$  in Linearkombinationen weggelassen und durch die anderen beiden ersetzt werden. Dies machen wir uns für die Betrachtungen in b) und c) natürlich zunutze und verzichten dabei auf, sagen wir,  $\vec{w}_3$ . Es interessieren also nur noch Linearkombinationen der Form

$$\vec{v} = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2.$$

In Teil b) benötigen wir für die 1 in der ersten Komponente, dass  $b = 1$  ist. Um die zweite Komponente zu Null zu bekommen, muss dann  $a = -2$  sein, also  $\vec{v} = -2\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ . In dieser Gleichung stimmt auch die dritte Komponente, sodass dies eine Linearkombination von  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  darstellt.

În Teil c) kommen wir mit genau der gleichen Vorgehensweise wie in b) zu einem Widerspruch in der dritten Komponente, somit gibt es keine Linearkombination für  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. Bei der Untersuchung der Unterraumeigenschaft einer Menge sollte zunächst geprüft werden, ob der Nullvektor in der Menge enthalten ist. Dies ist ein sehr leicht zu testendes Kriterium. Ohne Nullvektor kann eine Menge kein Untervektorraum mehr sein.

- (a) Wegen  $0^2 = 0$  ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ . Allerdings sollte das Quadrat beim  $x$  misstrauisch machen. Also testen wir die zwei definierenden Unterraumeigenschaften,

i.  $\vec{v}, \vec{w} \in W_1 \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W_1$  und

ii.  $\vec{v} \in W_1 \Rightarrow \lambda\vec{v} \in W_1$ ,

zunächst einmal an zwei konkreten Vektoren aus der Menge, beispielsweise  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Deren Summe ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , kein Vektor von  $W_1$ . Somit ist  $W_1$  kein Untervektorraum.

- (b) Auch  $W_2$  enthält den Nullvektor. Tests konkreter Vektoren wie zuvor werden diesmal nicht zum Widerspruch führen. Also versuchen wir, die Unterraumeigenschaften für *alle* Vektoren von  $W_2$  nachzuweisen. Seien dazu  $\vec{v}, \vec{w} \in W_2$ . Es gilt also für deren Komponenten  $v_1 + v_4 = 2v_2$  und  $w_1 + w_4 = 2w_2$ . Die entsprechenden Gleichungen für die Summe  $\vec{v} + \vec{w}$

$$(v_1 + w_1) + (v_4 + w_4) = 2(v_2 + w_2)$$

und für die Multiplikation mit Skalaren  $\lambda\vec{v}$

$$(\lambda v_1) + (\lambda v_4) = 2(\lambda v_2)$$

können daraus direkt gefolgert werden. Da wir keine konkreten Werte für  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  vorausgesetzt haben, sind die Vektorraumeigenschaften für alle Vektoren von  $W_2$  erfüllt und  $W_2$  ist somit ein Untervektorraum.

- (c) Hier ist die Vorgehensweise die gleiche wie zuvor.  $W_3$  ist ebenfalls ein Untervektorraum.
- (d) In  $W_4$  sind die Vektoren nur in der ersten Komponente eingeschränkt. Diese muss zwischen 0 und 1 liegen. Hierbei ist schnell einzusehen, dass die Addition und Multiplikation mit Skalaren leicht aus der Menge herausführen. Ein konkretes Gegenbeispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W_4, \text{ aber } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_4.$$

$W_4$  ist somit kein Untervektorraum.

- (e) Bei  $W_5$  ist dies nicht der Fall und wir müssen die Vektorraumeigenschaften wieder für *alle* Vektoren von  $W_5$  zeigen. Seien dazu  $\vec{v}, \vec{w} \in W_5$ , also  $v_1 = w_1 = 0$ . Offensichtlich ist sowohl für  $\vec{v} + \vec{w}$  als auch für  $\lambda\vec{v}$  die erste Komponente Null. Da dies die einzige Bedingung der Menge ist, gelten die Unterraumeigenschaften für  $W_5$ .
3. Die Eigenschaften 1. bis 6. der Vektorraumdefinition können stets auf die entsprechende Eigenschaft in  $\mathbb{R}$  zurückgeführt werden. Interessant sind die 7. und 8. Vektorraumeigenschaft. Das sind die gleichen wie bei der Untervektorraumdefinition: die Abgeschlossenheit bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren. Nun ist die Summe zweier Polynome wieder ein Polynom und das  $\lambda$ -Fache ebenfalls. Weiterhin erhöht sich dabei der Grad der Polynome nicht, somit ist  $W$  unter diesen Operationen abgeschlossen. Mit einer Basis von  $W$  soll jedes Polynom maximal  $n$ -ten Grades dargestellt werden können. Mit  $P_0(x) := 1$  können alle Polynome nullten Grades (Konstante Funktionen) linear kombiniert werden. Mit  $P_0(x)$  und  $P_1(x) := x$  können alle Polynome bis zum ersten Grad linear kombiniert werden. Allgemein dient

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

als ein Erzeugendensystem der Menge  $W$ . Außerdem ist dieses System linear unabhängig, denn keines der *Monome* — so heißen obige Grundbausteine der *Polynome* — kann durch die anderen dargestellt werden. Somit haben wir eine Basis von  $W$  gefunden.

4. Da der Nullvektor Element eines jeden Untervektorraums ist, können allenfalls Ursprungsebenen Untervektorräume sein. Elemente  $\vec{x}$  einer solchen Ebene erfüllen die Ebenengleichung

$$\vec{x} = \vec{0} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$$

und daran können die beiden Untervektorräumeigenschaften leicht nachgewiesen werden. Somit sind alle Ursprungsebenen Untervektorräume. Geraden im Raum verhalten sich ähnlich. Nur Ursprungsgeraden sind Untervektorräume.

5. Jede Basis des  $\mathbb{R}^3$  besteht aus drei linear unabhängigen Vektoren. Andererseits bilden je drei linear unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  eine Basis. Insgesamt müssen wir also lediglich testen, für welche  $\alpha$  die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Nach der Definition der linearen Unabhängigkeit muss aus der Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  folgen. Für die erste Komponente der Gleichung,  $2\lambda_2 = 0$  folgt bereits  $\lambda_2 = 0$ . Eingesetzt in die dritte Komponente ergibt sich  $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ , also  $\lambda_1 = -\lambda_3$ . Beides setzen wir in die zweite Komponente mit dem Parameter  $\alpha$  ein und erhalten

$$-\lambda_3 + \lambda_3(\alpha + 1) = \lambda_3\alpha = 0 .$$

Somit folgt auch  $\lambda_3 = 0$ , also die lineare Unabhängigkeit, falls  $\alpha \neq 0$  ist. Für  $\alpha = 0$  sind die Vektoren linear abhängig.

### Fragen

- Definieren Sie den Vektorraum der reellen Zahlen und den Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .
- Kennen Sie weitere Vektorräume?
- Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit.
- Was bedeutet es mathematisch, dass ein Vektor  $v_0$  von den Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig ist?
- Was ist der Unterschied zwischen einer Basis und einem Erzeugendensystem?
- Ist die lineare Hülle einer Anzahl von Vektoren eines Vektorraumes  $V$  immer ein Untervektorraum von  $V$ ?
- Geben Sie zwei unterschiedliche Untervektorräume des  $\mathbb{R}^4$  an.
- Wie wird die Dimension eines Untervektorraumes bestimmt?



# 16 Lineare Abbildungen und Matrizen

## 16.1 Motivation

Ein Schlüsselbegriff in der Linearen Algebra ist derjenige der linearen Abbildung. Die Definition findet sich weiter unten und erst mit dieser können wir dann wirklich verstehen, worum es geht. Feststellen lässt sich aber, dass Sie bereits lineare Abbildungen kennen; so stellt z. B. das Differenzieren eine lineare Abbildung dar.

Der hier behandelte Begriff ist vorerst einfach nur theoretisch motiviert, allerdings wird die spätere Anwendung der linearen Abbildungen im Bereich von Eigenwerten, linearen Gleichungssystemen etc. zahlreiche motivierende Beispiele liefern.

Die linearen Abbildungen können zwar exakt angegeben werden, aber mit der reinen Abbildungsvorschrift lässt sich in vielen Fällen nicht komfortabel und übersichtlich rechnen. Es wäre daher schön, eine einfachere Darstellung der linearen Abbildungen zu bekommen. Dies gelingt mithilfe der so genannten Matrizen, welche ein übersichtliches Schema der Abbildungsvorschrift darstellen. Dieses lernen wir hier kennen und wenden es später u. a. bei linearen Gleichungssystemen an, welche sich unter Verwendung der Matrizen sehr übersichtlich und kompakt aufschreiben lassen.

## 16.2 Grundlagen zu linearen Abbildungen

### **Definition** (lineare Abbildung)

Eine Abbildung  $L: V \rightarrow W$  zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt linear, wenn für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

- $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$ ,
- $L(\lambda\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$ .



Die hier genannten Bedingungen müssen also stets bei einer Abbildung überprüft werden, damit diese linear genannt werden kann. Häufig wird versucht, einfach nur auf die Definition zu starren und zu erkennen, ob die Bedingungen erfüllt sind. Es bleibt einem aber nichts anderes übrig, als tatsächlich die Forderungen zu überprüfen. Wir wollen dies an einem einfachen Fall üben.

### Beispiel

Sei  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} L \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) &= L \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} L \left( \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) &= L \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$



### Beispiel

Gegenbeispiel: Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x^2$ . Hier ist

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 .$$

Die Gleichheit gilt nur für die Wahl spezieller Werte für  $x$  und  $y$ , aber nicht allgemein!



Es gibt noch eine recht interessante Eigenschaft linearer Abbildungen, die wir zeigen wollen; dabei ist  $L: V \rightarrow W$  und  $\vec{x} \in V$ :

$$L(\vec{0}) = L(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot L(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Bitte beachten Sie, dass auf der linken Seite der Nullvektor aus  $V$  abgebildet wird, auf der rechten Seite allerdings der Nullvektor aus  $W$  steht. Dies ist klar, da wir wissen, von wo aus die Abbildung  $L$  wohin abbildet, allerdings wird dies oft übersehen. Bei der Berechnung oben wurde nur die Linearität verwendet. Fazit: Der Nullvektor wird durch lineare Abbildungen stets wieder auf den Nullvektor abgebildet.

Wie in der Motivation angesprochen, wollen wir noch genauer die Ableitung einer Funktion untersuchen. Dazu betrachten wir Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die differenzierbar sind, und bezeichnen die Ableitung einfach mit  $\frac{d}{dx}$  (gelesen: „d nach d x“). Dann haben wir bereits gelernt, dass bei Summen jeder Summand getrennt abgeleitet werden darf:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x),$$

und dass konstante Faktoren von der Ableitung unberührt bleiben:

$$\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{d}{dx}f(x).$$

Dies bedeutet aber gerade, dass  $\frac{d}{dx}$ , also das Ableiten, eine lineare Abbildung ist. Ebenso ist das Integral eine lineare Abbildung, was Sie bitte selbst prüfen.

## 16.3 Kern und Bild

Im Zusammenhang mit linearen Abbildungen gibt es zwei wichtige Begriffe, die wir nun präsentieren möchten.

### **Definition** (Kern, Bild)

Sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann heißt die Menge

$$\text{Kern } L := \left\{ \vec{x} \in V \mid L\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

der Kern von  $L$  und die Menge

$$\text{Bild } L := L(V) = \{L\vec{x} \in W \mid \vec{x} \in V\}$$

das Bild von  $L$ .

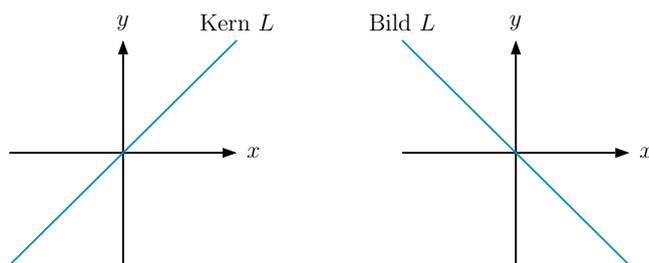


Der Kern einer linearen Abbildung  $L: V \rightarrow W$  ist ein Untervektorraum von  $V$ , das Bild ist ein Untervektorraum von  $W$ .

### Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x - y, y - x)$ .

Kern  $L$  ist besonders leicht zu erhalten, denn nach der Abbildungsvorschrift für unser  $f$  kommt gerade dann Null als Wert heraus, wenn  $x$  und  $y$  gleich sind. Wir erhalten also die gezeichnete Gerade durch den Ursprung (Winkelhalbierende). Dass diese Gerade durch den Ursprung geht, verdeutlicht nochmals, dass es sich bei Kern  $L$  tatsächlich um einen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$  handelt.



Um Bild  $L$  zu erhalten, gibt es verschiedene Möglichkeiten; eine einfache ist: Die beiden Komponenten von  $f(x, y)$  unterscheiden sich offensichtlich nur durch ihr Vorzeichen, beispielsweise  $f(1, 0) = (1, -1)$ . Sie sind also von der Gestalt  $(z, -z)$  und befinden sich somit auf der in der rechten Skizze eingezeichneten Winkelhalbierenden. Da es sich beim Bild um einen Untervektorraum handelt, muss auch jeder Punkt der Winkelhalbierenden erreicht werden. Finden Sie unter Zuhilfenahme des nächsten Satzes noch eine andere Erklärung?  $\blacklozenge$

Das Bild einer linearen Abbildung gibt Aufschluss darüber, was die Abbildung einem eigentlich im Bildraum, hier also dem Vektorraum  $W$ , liefert. Wie wir im Beispiel gesehen haben, ist dies teils sehr einfach geometrisch darstellbar. Der Kern einer linearen Abbildung ist die Lösungsmenge spezieller linearer Gleichungssysteme, die wir später behandeln werden.

Wir wollen uns nochmals überlegen, ob etwas über den Kern, das Bild und den Zusammenhang zur Dimension gesagt werden kann. Das Bild entspricht ja gerade dem, was nach Anwendung der linearen Abbildung  $L$  erhalten wird. Das Bild ist auch ein Vektorraum (Untervektorraum von  $W$ ) und hat somit auch eine Dimension. Beim Abbilden durch  $L$  geht aber auch einiges in gewisser Weise verloren. Es kann durchaus passieren, dass ein Vektor — und alle seine Vielfachen — durch  $L$  auf den Nullvektor abgebildet wird. Dieser befindet sich dann gerade im Kern von  $L$ , kann folglich im Bild nicht mehr dazu dienen,

die Dimension zu erhöhen. Was also einerseits im Bild verloren geht, taucht im Kern wieder auf. Wir verstehen damit den folgenden Satz:

### Satz

Sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim V = \dim(\text{Kern } L) + \dim(\text{Bild } L).$$

(Dimensionsatz) ■

Im zuvor betrachteten Beispiel sehen wir sofort, dass der Satz (natürlich) erfüllt ist, denn die lineare Abbildung dort bildet vom  $\mathbb{R}^2$  auf den  $\mathbb{R}^2$  ab und die Dimension von Kern  $L$  und Bild  $L$  ist jeweils 1.

### Definition (Defekt, Rang)

Die Dimension des Kerns einer linearen Abbildung wird auch als Defekt

$$\text{Def } L := \dim(\text{Kern } L)$$

bezeichnet, die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung als Rang

$$\text{Rang } L := \dim(\text{Bild } L) .$$

Obiger Satz lautet damit

$$\dim V = \text{Def } L + \text{Rang } L .$$

## 16.4 Grundlegendes zu Matrizen

Bevor wir Matrizen anwenden und mit ihnen rechnen, betrachten wir deren Definition:

### Definition ( $(m \times n)$ -Matrix, Zeilenindex, Spaltenindex)

Für  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  heißt

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij}) = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

eine Matrix vom Format  $(m \times n)$  mit Einträgen aus  $\mathbb{K}$ . Kurz:  $(m \times n)$ -Matrix oder auch  $(m, n)$ -Matrix.

Der erste Index, hier  $i$  genannt, heißt Zeilenindex, der zweite Spaltenindex. ◀

**Definition** ( $M(m \times n, \mathbb{K})$ )

Die Menge aller  $(m \times n)$ -Matrizen mit  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  für alle  $i$  und  $j$  wird als

$$M(m \times n, \mathbb{K})$$

notiert. ▶

Beispiele dafür sind:

$$\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Eine sehr wichtige Matrix ist die *Einheitsmatrix*:

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_n \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Beim Rechnen mit Matrizen (siehe den folgenden Abschnitt) übernimmt die Einheitsmatrix die Rolle der 1 bei den reellen Zahlen. Beispielsweise hat die  $(3 \times 3)$ -Einheitsmatrix die Gestalt  $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Wir bemerken noch, dass statt  $E_n$  häufig auch einfach nur  $E$  geschrieben wird, wenn die Dimension klar ist. Teils findet sich in der Literatur auch  $I_n$  bzw.  $I$ .

Bis hier handelt es sich bei einer Matrix nur um ein Schema. Seine Bedeutung wird dadurch klar, dass *jede* lineare Abbildung als Matrix dargestellt werden kann. Zusammen mit den Rechenregeln für Matrizen wird dann deutlich, dass es durch die Darstellung linearer Abbildungen als Matrizen viel einfacher ist, mit diesen zu rechnen. Ferner ist die Matrixdarstellung übersichtlicher und wir können schon jetzt manifestieren, dass wir beim Arbeiten mit linearen Abbildungen fast ausschließlich an Matrizen denken.

Der nachstehende Satz erklärt sich eigentlich von selbst: Wenn wir mit  $L$  ein Element  $\vec{v} \in V$  nach  $W$  abbilden, dann lässt sich  $L(\vec{v})$  eindeutig als Linearkombination von Basiselementen aus  $W$  darstellen. Dies gilt natürlich auch dann, wenn wir Basisvektoren von  $V$  abbilden.

**Satz**

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  und  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  und sei  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{K}$ , sodass

$$L(\vec{v}_j) = a_{1j}\vec{w}_1 + \dots + a_{mj}\vec{w}_m$$

gilt. ■

Die letzte Gleichung lässt sich nun für alle  $\vec{v}_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  aufschreiben und wir erhalten dann aus den  $a_{ij}$  genau eine Matrix, wie wir sie zum Anfang dieses Unterabschnittes definiert haben. Die Koeffizienten zum  $j$ -ten Basisvektor  $\vec{v}_j$  bilden folglich die  $j$ -te Spalte der Matrix  $(a_{ij})$ . Wir versuchen mit dem folgenden Beispiel zum gerade formulierten Satz alles noch klarer zu machen, sodass es in Zukunft kein Problem mehr sein sollte, aus gegebenen linearen Abbildungen die zugehörigen Matrizen zu basteln.

**Beispiel**

Seien  $V := \mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis und  $L: V \rightarrow V$  durch

$$L(x, y) := \begin{pmatrix} x + y \\ 2y \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese Abbildung ist linear (was Sie als Übung nachprüfen sollten). Als Basiselemente wählen wir

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da  $V = W$  gilt. Nun ist nach obigem Satz

$$L(\vec{v}_1) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \end{pmatrix},$$

also  $a_{11} = 1$  und  $a_{21} = 0$ . Ferner ist

$$L(\vec{v}_2) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

also  $a_{12} = 1$  und  $a_{22} = 2$ . Insgesamt folgt, dass die lineare Abbildung  $L$  durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Sie können, wenn Sie unserer Rechnung nicht trauen (was allerdings unbegründet wäre), gerne nachrechnen, dass gilt:

$$L(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wie ein Vektor mit einer Matrix multipliziert wird, ist im nächsten Abschnitt erklärt. ◆

Als Merkgel können wir festhalten: In der  $j$ -ten Spalte stehen die Koeffizienten des Bildes des  $j$ -ten Basisvektors.

Nachdem wir jetzt wissen, was eine Matrix ist, und gelernt haben, wie sich zu jeder linearen Abbildung die zugehörige Matrix angeben lässt, können wir die Begriffe Rang, Bild, Kern und Defekt gleichberechtigt für Matrizen verwenden. Der Begriff des Ranges ist von besonderer Bedeutung, daher der folgende Satz, der eine Beziehung zwischen den Spalten bzw. Zeilen einer Matrix herstellt, die jeweils als Vektoren (Spalten- bzw. Zeilenvektoren) aufgefasst werden können.

### Satz

Der Rang einer Matrix, also der Rang der durch die Matrix repräsentierten linearen Abbildung, ist gleich der Anzahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren, was wiederum gleich der Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilenvektoren ist. ■

## 16.5 Rechnen mit Matrizen

### 16.5.1 Multiplikation von Matrizen

Wenn eine Matrix eine lineare Abbildung darstellen soll, müssen wir wissen, wie Matrizen auf Vektoren des  $\mathbb{K}^n$  wirken, wie also  $A\vec{v}$  erklärt ist. Zu diesem Zweck werden wir eine Multiplikation zwischen Matrix und Vektor definieren und sie schlicht *Matrix-Vektor-Multiplikation* nennen. Allerdings sei an dieser Stelle daran erinnert, dass Vektoren des  $\mathbb{K}^n$  auch als Matrizen, nämlich als  $(n \times 1)$ -Matrizen, aufgefasst werden können. Daher definieren wir die Multiplikation von Matrizen auch gleich allgemein. Wir werden diese noch mehrfach anwenden.

#### Definition (Matrixprodukt, Matrix-Vektor-Produkt)

Seien zwei Matrizen  $A := (a_{ij}) \in M(m \times \underline{n}, \mathbb{K})$  und  $B := (b_{jk}) \in M(\underline{n} \times p, \mathbb{K})$  gegeben. Dann ist das Matrixprodukt definiert als

$$AB = A \cdot B := \left( \sum_{j=1}^{\underline{n}} a_{ij} b_{jk} \right)_{i=1 \dots m, k=1 \dots p} .$$

Das Matrix-Vektor-Produkt  $A\vec{v}$  ist als Spezialfall des Matrixproduktes erklärt, indem  $\vec{v}$  als  $(n \times 1)$ -Matrix aufgefasst wird und an die Stelle von  $B$  tritt. ◀

Einzelne Indizes sind nur deshalb unterstrichen, um deren Zusammengehörigkeit deutlicher zu machen. Wir geben zu, dass es sehr unübersichtlich ist, nach dieser Definition hier zu rechnen, denn die Vorschrift scheint doch etwas kompliziert zu sein (wenn sie es auch eigentlich gar nicht ist, nachdem einmal wirklich mit ihr gerechnet wurde). Wir geben dennoch schematisch ein Beispiel. Dieses verdeutlicht, dass eigentlich immer nur die Zeilen (beginnend mit der ersten Zeile) der linken Matrix auf die Spalten (beginnend mit der ersten Spalte) der rechten Matrix gelegt werden. Die „aufeinander gelegten“ Einträge werden dann einfach multipliziert und die Ergebnisse mit den anderen entstehenden Termen addiert. Beispielsweise sieht das Matrixprodukt für  $(2 \times 2)$ -Matrizen so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

und das Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Natürlich kann der Ergebnisvektor dieser Matrix-Vektor-Multiplikation wieder mit einer Matrix multipliziert werden. D. h. nach der Abbildung durch die erste Matrix erfolgt die Abbildung durch die zweite. Erinnern wir uns daran, dass jeder linearen Abbildung bzgl. einer Basis eindeutig eine Matrix zugeordnet werden kann, so wird klar, dass das Matrixprodukt genau der Hintereinanderausführung der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht. Dafür ist es wichtig, dass die Produktbildung mehrerer Matrizen — im Sinne des ersten der folgenden Punkte — nicht von der Reihenfolge abhängt.

Für von ihrer Zeilen- und Spaltenzahl her „passende“ Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und für  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$
- $(AB)^T = B^T A^T$  (Definition der transponierten Matrix auf Seite 238)
- $AE_n = E_m A = A$

Bei der letzten Gleichung ist  $A$  eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

Es ist nicht schwer, diese einzelnen Punkte zu beweisen. Es müssen nur die Definitionen der Rechenoperationen beachtet werden. Dann ist klar, dass die Behauptungen stimmen. Es ist auch eine gute Idee, die Punkte nur für Matrizen aus  $M(2 \times 2, \mathbb{R})$  zu beweisen, denn die Bildungsvorschriften zu den Rechenoperationen sind ja für alle anderen Matrizen die gleichen. Interessant ist noch, den

Fall der Matrizen aus  $M(1 \times 1, \mathbb{R})$  zu untersuchen. Hier handelt es sich nämlich nur um reelle Zahlen. Welche Gestalt hat in diesem Fall die Einheitsmatrix?

### Beispiel

Das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist nicht erklärt! 

### Beispiel

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 + 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 & 2 \cdot 0 + 0 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 & 0 + 4 \cdot 3 + 0 & 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + 0 + 6 \cdot 0 & 0 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 0 + 0 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## 16.5.2 Vektorraumstruktur für Matrizen

### Definition (Matrixsumme, Multiplikation mit Skalaren)

Seien  $A := (a_{ij})$ ,  $B := (b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann definieren wir Matrixsumme und Multiplikation mit Skalaren:

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda A &:= (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$



### Beispiel

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$



Für  $A, B, C \in M(m \times n, \mathbb{K})$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gelten — wie auch für Vektoren — folgende Rechenregeln, wobei im zweiten Punkt  $0$  die  $(m \times n)$ -Matrix ist, deren Einträge alle  $0 \in \mathbb{K}$  sind:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$  und  $A + (-A) = 0$
- $A + B = B + A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $1 \cdot A = A$  mit  $1 \in \mathbb{K}$ .

*Die Matrizen mit den Operationen der Addition von Matrizen und Multiplikation mit Skalaren bilden einen Vektorraum*, wie sich aus Obigem leicht erkennen lässt. Wer es nicht glaubt, der schlage bitte schnell im Abschnitt über Vektorräume nach und überprüfe die Punkte, die zur Erfüllung der Vektorraumeigenschaften nötig sind.

## 16.6 Besondere Matrizen

In Theorie und Praxis treten häufig besondere Matrizen auf, von denen wir nun einige wichtige Vertreter vorstellen möchten:

Zunächst sind das *quadratische Matrizen*; das sind solche mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl, darunter:

- *Einheitsmatrix* (die haben wir bereits kennen gelernt):

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Diagonalmatrix:*

$$(a_{ij}) = (a_{ii}) := \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *obere (untere) Dreiecksmatrix:*

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

(„\*“ bedeutet, dass an dieser Stelle beliebige Zahlen stehen können.)

### Definition (transponierte Matrix)

Aus  $A := (a_{ij})$  ergibt sich die transponierte Matrix durch

$$A^T := (a_{ij})^T := (a_{ji}) .$$

Zeilen und Spalten werden also vertauscht. Geschrieben wird auch  $A^t$  statt  $A^T$ .  
Es gilt  $(AB)^T = B^T A^T$ . ◀

### Definition (invertierbar, Inverse)

Eine quadratische Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  heißt invertierbar, wenn ein  $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$  existiert mit

$$AB = E_n (= BA) .$$

Für die Matrix  $B$  wird dann  $A^{-1}$  geschrieben und diese heißt Inverse von  $A$ . ◀

### Beispiel

Eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $ad - bc \neq 0$  gilt. Die Inverse hat dann die Gestalt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$



Zum Invertieren größerer Matrizen können wir den so genannten Gauß-Algorithmus verwenden. Diesen lernen wir aber erst im Abschnitt über lineare Gleichungssysteme kennen; dort kommen wir dann auf das Invertieren zurück.

**Definition** (symmetrisch, antisymmetrisch, orthogonal)

$A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  heißt symmetrisch, falls gilt:

$$A = A^T, \quad \text{d. h. } (a_{ij}) = (a_{ji}).$$

$A$  heißt antisymmetrisch, falls gilt:

$$A = -A^T, \quad \text{d. h. } (a_{ij}) = -(a_{ji}).$$

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  heißt orthogonal, falls gilt:

$$A^T A = E_n, \quad \text{also } A^T = A^{-1}.$$



**Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A$  ist symmetrisch,  $B$  ist antisymmetrisch und  $C$  ist orthogonal.  $\blacklozenge$

**Definition** (adjungiert, selbstadjungiert, unitär)

Für  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  heißt

$$A^* := \overline{A^T}, \quad \text{also } (a_{ij}^*) = (\overline{a_{ji}})$$

zu  $A$  adjungierte Matrix. Gilt

$$A = A^*,$$

so heißt  $A$  selbstadjungiert.

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  heißt unitär, falls gilt:

$$A^* A = E_n, \quad \text{also } A^* = A^{-1}.$$



Bitte beachten Sie die formale Verwandtschaft unitärer Matrizen im Komplexen und orthogonaler Matrizen im Reellen.

### Beispiel

Die adjungierte Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{-i} \\ \bar{i} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = A,$$

womit  $A$  selbstadjungiert ist. Für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

was  $B$  zu einer unitären Matrix macht. ◆

Die zuletzt aufgeführten Matrizen sind für sich gesehen nur begrenzt interessant, allerdings tauchen sie in Sätzen und Anwendungen der Mathematik wieder auf. So werden uns die selbstadjungierten und symmetrischen Matrizen bei der Diagonalisierung erneut begegnen. Bitte denken Sie bei diesen speziellen Matrizen immer auch an lineare Abbildungen und nicht nur an Schemata, bei denen Zeilen- und Spalten-Gymnastik durchgeführt wird. So werden wir später noch zu orthogonalen Abbildungen kommen (lineare Abbildungen mit speziellen Eigenschaften), die mit den hier vorgestellten orthogonalen Matrizen assoziiert sind.

## 16.7 Aufgaben

1. (a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

i.  $L(x, y) = x + y$

ii.  $L(x, y, z) = x$

iii.  $L(x) = 1$

iv.  $L(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

v.  $L(x, y) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$

vi.  $L(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$

- (b) Überprüfen Sie weiterhin die elementaren Funktionen

$$\sin x, \cos x, x^2, e^x, \ln x$$

auf Linearität.

2. Eine Abbildung  $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei linear und bilde 1 auf den Vektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ab. Bestimmen Sie  $L(-3)$ . Wie viele verschiedene Abbildungen mit dieser Eigenschaft gibt es?

3. (a) Betrachten Sie die Abbildung, welche jede auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf ihre Ableitung  $f'$  abbildet. Bestimmen Sie den Kern dieser linearen Abbildung.
- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung, welche ein Polynom maximal zweiten Grades  $P(x) = ax^2 + bx + c$  auf seine Koeffizienten  $(a, b, c)$  abbildet, linear auf dem Vektorraum der Polynome maximal zweiten Grades ist. Was ist das Bild dieser Abbildung?
4. (a) Bestimmen Sie die Formate folgender Matrizen und berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei dieser Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie kurz zusammen, was mit einer Matrix geschieht, wenn sie mit der Matrix  $A$  multipliziert wird.

- (b) Begründen Sie, weshalb die für reelle und komplexe Zahlen gebräuchliche Schreibweise  $\frac{A}{B}$  für Matrizen keinen Sinn macht.
5. (a) Invertieren Sie — falls möglich — folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bestimmen Sie die Inverse der Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:* Der Name dieser Matrix stammt von ihrer Eigenschaft, alle Vektoren, die von der rechten Seite an die Drehmatrix multipliziert werden, um den Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse zu drehen.

6. Für welche reellen Werte von  $\alpha$  ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) invertierbar,  
 (b) symmetrisch,  
 (c) antisymmetrisch,  
 (d) selbstadjungiert?

## 16.8 Lösungen

1. (a) Zum Prüfen der Linearität einer Abbildung müssen wir die beiden Eigenschaften

$$\begin{aligned}L(\vec{v} + \vec{w}) &= L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \\L(\lambda\vec{v}) &= \lambda L(\vec{v})\end{aligned}$$

aus der Definition linearer Abbildungen testen. Für Linearität müssen die Eigenschaften dabei für *alle*  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  und  $\lambda$  nachgewiesen werden, wohingegen für Nichtlinearität ein einziges Gegenbeispiel genügt.

- i.  $L(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}) = (x + \tilde{x}) + (y + \tilde{y}) = (x + y) + (\tilde{x} + \tilde{y}) = L(x, y) + L(\tilde{x}, \tilde{y})$  und  
 $L(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda L(x, y)$ ,
- ii.  $L(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z}) = x + \tilde{x} = L(x, y, z) + L(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  und  
 $L(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda x = \lambda L(x, y, z)$ ,
- iii.  $L(x + \tilde{x}) = 1$ , aber  $L(x) + L(\tilde{x}) = 1 + 1 = 2$ . Dies ist ein Gegenbeispiel.
- iv.  $L(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}) = \begin{pmatrix} x + \tilde{x} \\ -(y + \tilde{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ -\tilde{y} \end{pmatrix} = L(x, y) + L(\tilde{x}, \tilde{y})$   
und  
 $L(\lambda x, \lambda y) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ -(\lambda y) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \lambda L(x, y)$ ,
- v.  $L(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}) = \begin{pmatrix} (x + \tilde{x}) + 1 \\ y + \tilde{y} \end{pmatrix}$ , aber  
 $L(x, y) + L(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} + 1 \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \tilde{x} + 2 \\ y + \tilde{y} \end{pmatrix}$ . Hier haben wir wieder ein Gegenbeispiel.
- vi.  $L(x + \tilde{x}) = \begin{pmatrix} x + \tilde{x} \\ 2(x + \tilde{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 2\tilde{x} \end{pmatrix} = L(x) + L(\tilde{x})$  und  
 $L(\lambda x) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 2(\lambda x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \lambda L(x)$ .

Somit sind alle Abbildungen außer iii. und v. linear.

- (b) Von den genannten Elementarfunktionen ist keine linear. Gegenbeispiele sind

- $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ , aber  $\frac{1}{2} \sin(\pi) = 0$ ,
- $\cos(0 + 0) = 1$ , aber  $\cos(0) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$ ,
- $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$ , aber  $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ ,
- $e^{3 \cdot 0} = 1$ , aber  $3e^0 = 3 \cdot 1 = 3$ ,
- $\ln(3 \cdot 1) = \ln(3) \neq 0$ , aber  $3 \ln(1) = 3 \cdot 0 = 0$ .

2. Wegen der Linearität kann  $L(-3)$  auf den bekannten Wert  $L(1)$  zurückgeführt werden:

$$L(-3) = L(-3 \cdot 1) = -3L(1) = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Diese Vorgehensweise funktioniert sogar für jeden Wert  $\lambda$

$$L(\lambda) = L(\lambda \cdot 1) = \lambda L(1) = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sodass die Abbildung allein durch die gegebenen Eigenschaften (Linearität und der Wert von  $L(1)$ ) eindeutig bestimmt ist.

3. (a) Der Kern dieser Abbildung besteht aus allen Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist. Dies sind genau alle konstanten Funktionen  $f(x) = \text{konst.}$
- (b) Wir betrachten zwei möglichst allgemein gehaltene Polynome und deren Bildvektoren

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c & \mapsto & (a, b, c) \\ \tilde{P}(x) &= \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c} & \mapsto & (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}). \end{aligned}$$

Die Summe der Polynome wird auf die Summe ihrer Bildvektoren abgebildet:

$$\begin{aligned} (P + \tilde{P})(x) &= (a + \tilde{a})x^2 + (b + \tilde{b})x + (c + \tilde{c}) \\ &\mapsto (a + \tilde{a}, b + \tilde{b}, c + \tilde{c}) = (a, b, c) + (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}). \end{aligned}$$

Dies ist die erste Eigenschaft in der Definition linearer Abbildungen. Weiterhin wird das  $\lambda$ -Fache eines Polynoms auf das  $\lambda$ -Fache seines Bildvektors abgebildet:

$$\lambda P(x) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c \quad \mapsto \quad (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda(a, b, c).$$

Dies ist die zweite Eigenschaft in der Definition linearer Abbildungen. Das Bild dieser Abbildung ist  $\mathbb{R}^3$ , denn zu jedem Vektor  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  gibt es ein Polynom, welches auf diesen Vektor abgebildet wird, nämlich das Polynom  $ux^2 + vx + w$ .

4. (a) Beim Format wird die Zeilenzahl vor der Spaltenzahl genannt.  $A$  ist eine  $(2 \times 2)$ -Matrix,  $B$  eine  $(2 \times 3)$ -Matrix und  $C$  eine  $(3 \times 2)$ -Matrix. Beim Multiplizieren zweier Matrizen muss die Spaltenzahl der links stehenden Matrix mit der Zeilenzahl der rechts stehenden übereinstimmen. Demnach sind nur die Produkte  $A \cdot A$ ,  $A \cdot B$ ,  $C \cdot A$ ,  $B \cdot C$ ,  $C \cdot B$  möglich.

$$\begin{aligned} \bullet \quad A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bullet \quad A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \bullet \quad C \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \\ \bullet C \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 12 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus den ersten drei Punkten ist zu erkennen, dass die Multiplikation der Matrix  $A$  von der linken Seite an eine Matrix eine Vertauschung der Zeilen bewirkt und die Multiplikation von rechts eine Vertauschung der Spalten.

- (b) Bei reellen und komplexen Zahlen bedeutet der Ausdruck  $\frac{A}{B}$ , dass die Zahl  $A$  mit der Inversen  $\frac{1}{B} = B^{-1}$  von  $B$  multipliziert wird. Allerdings ist hier die Reihenfolge der Multiplikation —  $A\frac{1}{B}$  oder  $\frac{1}{B}A$  — nicht angegeben, was bei Zahlen auch nicht notwendig ist. Die Reihenfolge spielt aber bei der Multiplikation von Matrizen eine Rolle.  $AB^{-1}$  ist nicht immer gleich  $B^{-1}A$ . Somit ist der Ausdruck  $\frac{A}{B}$  für Matrizen nicht eindeutig.

5. (a)

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beim Invertieren der Matrix  $B$  müssten wir durch Null teilen. Somit ist die Matrix  $B$  nicht invertierbar.

- (b) Einfach ausgedrückt wird der Effekt einer Matrix von deren Inverse wieder rückgängig gemacht. Eine Drehung um einen Winkel  $\phi$  wird durch eine Gegendrehung um den gleichen Winkel, also eine Drehung um  $-\phi$ , neutralisiert. Die Drehachse bleibt dabei die gleiche. Somit ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) & 0 \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Inverse zur Matrix  $R$ .

6. (a) Die Inverse einer  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  kann durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Invertierbar ist solch eine Matrix also genau dann, wenn der Ausdruck  $ad - bc \neq 0$  ist. Für  $A$  ist dies

$$2 \cdot 3 - \alpha \cdot 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 6.$$

- (b) Symmetrisch ist  $A$  lediglich für  $\alpha = 1$ , denn nur dafür ist  $A = A^T$ .

- 
- (c) Antisymmetrisch ist  $A$  für kein  $\alpha$ .
  - (d) Selbstdjungiertheit ist für reelle Matrizen das Gleiche wie Symmetrie.

### Fragen

- Was ist eine lineare Abbildung?
- Geben Sie drei Beispiele linearer Abbildungen an.
- Worauf wird der Nullvektor eines Vektorraumes  $V$  durch eine lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  zwischen Vektorräumen abgebildet?
- Formulieren Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.
- Geben Sie Beispiele von Elementen aus  $M(n \times m, \mathbb{C})$  für verschiedene  $n, m \in \mathbb{N}$  an.
- Wie lässt sich für eine lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  zwischen Vektorräumen bei vorgegebenen Basen von  $V$  und  $W$  die zugehörige Matrixdarstellung finden?
- Was ist der Rang einer Matrix?
- Welche Bedeutung hat der Rang von Matrizen bei der Matrizenmultiplikation?
- Welche besonderen Typen von Matrizen kennen Sie?



# 17 Lineare Gleichungssysteme

## 17.1 Motivation und elementare Anwendungen

Lineare Gleichungssysteme („Lineares Gleichungssystem“ werden wir durch LGS abkürzen) kommen sehr häufig vor. So ist es eine elementare Aufgabe für Möbelmanufakturen, die Anzahl von Tischen und Stühlen zu errechnen, die sich mit einem gewissen Lagerbestand von Holz, Schrauben und Metallbeschlägen herstellen lassen. Bevor mit dem Zusammenbau begonnen wird, sollten wir genau berechnen, was im Einzelfall fehlen mag. Jeder Koch benötigt, kann er sich nicht auf Erfahrungen stützen, eigentlich ein lineares Gleichungssystem, um zu wissen, wie viele Gerichte er aus seinen Zutaten zaubern kann. Es gibt noch viele weitere Beispiele, z. B. aus der Regelungstechnik oder dem Ermitteln bestimmter Kenngrößen in elektrischen Schaltungen.

Wir betrachten als Beispiel

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 6x_2 &= -1.\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird, um es zu lösen, in eine so genannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* umgeformt:

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

In diesem Schema wird das LGS in folgenden Einzelschritten modifiziert:

Die Zeilen werden vertauscht:

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

zu Zeile 2 wird zweimal Zeile 1 addiert:

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 0 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

Zeile 2 wird durch 14 geteilt (normiert):

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

von Zeile 1 wird sechsmal Zeile 2 subtrahiert:

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

und schließlich wird Zeile 1 mit  $(-1)$  multipliziert:

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird nun wieder in ein LGS umgeschrieben, welches nun aber wirklich sehr überschaubar ist und den Namen daher nur noch aus formalen Gründen verdient:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Verwendet wurden so genannte *elementare Zeilenoperationen*:

- Tauschen von Zeilen,
- Addition eines (ggf. negativen) Vielfachen einer Zeile zu einer anderen,
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.

Diese Operationen ändern nicht die so genannte Lösungsmenge (später genauer behandelt) des Gleichungssystems und sie genügen, um jedwedes lineare Gleichungssystem zu lösen, solange es überhaupt lösbar ist. Ein Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $m$  Variablen kann unter gewissen Voraussetzungen in die Form

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & c_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_m \end{array} \right),$$

also mit der Einheitsmatrix im linken Teil, überführt werden, woran die eindeutige Lösung  $x_1 = c_1, \dots, x_m = c_m$  direkt abgelesen werden kann. Dies lässt sich als Idealfall bezeichnen. Tritt dieser nicht ein, so ergibt sich ein etwas anderes System, welches allerdings auch einfach zu behandeln ist.

**Beispiel**

$$\begin{array}{l}
3x_1 + 6x_2 = 9 \\
4x_1 + 8x_2 = 12
\end{array}
\rightarrow
\left( \begin{array}{cc|c}
3 & 6 & 9 \\
4 & 8 & 12
\end{array} \right)
\rightarrow
\left( \begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 3 \\
4 & 8 & 12
\end{array} \right)
\rightarrow
\left( \begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0
\end{array} \right)$$

$$\rightarrow
\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 = 3 \\
0 = 0
\end{array}$$

In diesem Beispiel kommen wir nicht auf obige Idealform, vereinfacht hat sich das LGS aber dennoch. Die letzte Zeile schränkt die Menge der Lösungen nicht ein, denn „ $0 = 0$ “ ist einfach eine wahre Aussage. Es verbleibt also die erste Gleichung, welche unendlich viele Belegungen für  $x_1$  und  $x_2$  liefert, die das Gleichungssystem lösen, und zwar in der Abhängigkeit  $x_1 = 3 - 2x_2$ . Eine konkrete Lösung ergibt sich also durch konkretes Wählen von  $x_2$  und anschließendem Berechnen von  $x_1$ . ◆

Angenommen, wir erhalten als letzte Matrix nach Umformungen

$$\left( \begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{array} \right) .$$

Was bedeutet das?  $0 = 1$ ! Also hat das ursprüngliche LGS, aus dem diese erweiterte Koeffizientenmatrix entstanden ist, keine Lösung.

## 17.2 Grundlagen

Nachdem wir uns nun schon recht intensiv mit der Handhabung und Lösung linearer Gleichungssysteme beschäftigt haben, wollen wir das Ganze nun noch mathematisch exakt behandeln.

**Definition** (lineares Gleichungssystem, Inhomogenität, Koeffizienten, homogen, inhomogen)

Ein System der Form

$$\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

mit  $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$  heißt lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten (Variablen). Die  $b_j$  heißen Inhomogenitäten des LGSs, die  $a_{jk}$  Koeffizienten. Sind alle  $b_j = 0$ , so heißt das LGS homogen, sonst inhomogen. ◀

Die linke Seite eines solchen LGSs können wir in einem Matrix-Vektor-Produkt und die rechte Seite in einem Vektor zusammenfassen. Dadurch entsteht dann die übersichtlichere Schreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oder kurz  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Die Matrix  $A := (a_{jk})$  heißt *Koeffizienten-* oder *Systemmatrix* und der Vektor  $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  *Inhomogenitätsvektor*.

Weiterhin wird beim Rechnen mit linearen Gleichungssystemen, um Schreibarbeit zu sparen, gerne auf den Vektor  $\vec{x}$  verzichtet, da alle wichtigen Informationen bereits in  $A$  und  $\vec{b}$  stehen. Übrig bleibt die so genannte *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{b}) := \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Im motivierenden Beispiel wird aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 6x_2 &= -1. \end{aligned}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{array} \right).$$

**Definition** (Lösungsvektor, Lösungsmenge)

$\vec{x}$  heißt Lösungsvektor des LGSs, wenn seine Komponenten  $x_1, \dots, x_n$  alle Gleichungen des LGSs erfüllen. Die Menge aller Lösungsvektoren heißt Lösungsmenge des LGSs. ◀

Der Kern einer linearen Abbildung  $L$ , den wir bereits behandelt haben, ist die Lösungsmenge des LGSs  $L(\vec{x}) = \vec{0}$ .

## 17.3 Gauß-Algorithmus

Es geht uns nun darum, ein LGS in Form der erweiterten Koeffizientenmatrix in eine möglichst einfache Gestalt zu bringen, aus der wir die Lösung ersehen

können.

Die im ersten Abschnitt eingeführten elementaren Zeilenoperationen — Tauschen von Zeilen, Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null — sind gerade die Operationen des *Gauß-Algorithmus*, an dessen Ende ein durch bloßes Hinsehen zu lösendes LGS steht. Der erwähnte Idealfall

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & c_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_m \end{array} \right)$$

sollte dabei als zu erstrebendes Ziel nie aus den Augen verloren werden.

Grob werden beim Gauß-Algorithmus folgende Punkte abgearbeitet:

- Alle Einträge unterhalb von  $a_{11}$  werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile addiert wird.
- Alle Einträge unterhalb von  $a_{22}$  werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile addiert wird.
- Auf diese Weise werden nacheinander die Einträge unterhalb sämtlicher  $a_{ii}$  Null.
- Alle Einträge oberhalb von  $a_{nn}$  werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der  $n$ -ten Zeile addiert wird.
- Alle Einträge oberhalb von  $a_{n-1,n-1}$  werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der  $(n-1)$ -ten Zeile addiert wird.
- Auf diese Weise werden nacheinander die Einträge oberhalb sämtlicher  $a_{ii}$  Null.
- Schließlich werden noch die  $a_{ii}$  zu 1 normiert, indem die entsprechende Zeile mit  $\frac{1}{a_{ii}}$  multipliziert wird.

Diese Reihenfolge versichert uns, dass bereits erzeugte Nulleinträge bis zum Ende des Gauß-Algorithmus bestehen bleiben. So machen spätere Umformungen die Bemühungen der vorherigen nicht zunichte.

Es ist aber ratsam, für eventuelle Zwischenschritte flexibel zu bleiben und sich nicht stur an diese Auflistung zu halten. So kann ein Zeilentausch zur rechten Zeit oder ein zwischenzeitliches Skalieren einer Zeile Brüche vermeiden, mit denen es sich schlecht weiterrechnen lässt.

### Beispiel

So sind

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & 0 \end{array} \right)$$

beides korrekte Vorgehensweisen, die letzte — mit dem anfänglichen Zeilenaustausch — ist aber deutlich angenehmer zu rechnen. Im ersten Fall wird die Multiplikation der zweiten und dritten Zeile mit 3 wenigstens die weiteren Schritte erleichtern. ◆

Auch könnte ein  $a_{ii} = 0$  sein, was es unmöglich macht, damit darunter stehende Einträge zu Null zu transformieren. In einem solchen Fall kann ebenfalls ein Tausch dieser Zeile mit einer darunter liegenden helfen, sodass das neue  $a_{ii} \neq 0$  ist.

Weiterhin können durchaus Zeilen der Art  $0 \cdots 0 \mid 1$  entstehen, bevor der Gauß-Algorithmus beendet wurde. Der Widerspruch einer solchen Zeile besagt, dass das LGS gar keine Lösung hat, womit eine Weiterführung des Gauß-Algorithmus überflüssig wird.

### 17.3.1 Abweichungen vom Idealfall

Abgesehen von einem vorzeitigen Abbruch des Gauß-Algorithmus gibt es im Grunde nur zwei Situationen, in denen das Ergebnis des Algorithmus vom Idealfall abweicht. Diese treten jedoch sehr häufig auf, sodass es ratsam ist, sich mit ihnen vertraut zu machen.

Zum einen kann — wie bereits erwähnt — ein  $a_{ii} = 0$  sein. Sind auch alle darunter stehenden Einträge ( $a_{ki}$  mit  $k > i$ ) Null, können wir diese Spalte nicht weiter vereinfachen und müssen unser Glück mit der nächsten versuchen. Wichtig dabei ist, bei der nächsten Spalte mit der gleichen Zeile wie zuvor weiterzuarbeiten, also nicht mit  $a_{i+1, i+1}$ , sondern mit  $a_i, i+1$ . Beispiele sind

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & c_2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & c_3 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & * & 0 & c_1 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array} \right),$$

wobei die \*-Einträge beliebige Zahlen bezeichnen, die durch den Gauß-Algorithmus nicht weiter vereinfacht werden. Die beschriebene Situation kann natürlich

auch bei mehreren Spalten auftreten, wie bei

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & * & 0 & 0 & * & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & c_2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & * & * & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & c_5 \end{array} \right).$$

Mit diesem Beispiel sind wir auch schon bei der zweiten, vom Idealfall abweichenden Situation angelangt. Diese liegt vor, wenn das LGS mehr Gleichungen als Unbekannte bzw. mehr Unbekannte als Gleichungen hat. In diesem Fall muss der Idealfall, der ja nur von quadratischen Matrizen ausgeht, um einige Nullzeilen bzw. um einige Spalten erweitert werden. Einfache Beispiele sind

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{array} \right) \text{ bzw. } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & c_2 \end{array} \right).$$

## 17.4 Die Struktur der Lösungsmenge

Nachdem wir uns ausführlich mit der linken Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Bestimmung der Lösungen sowie der Struktur dieser Lösungsmenge zu. Letztere hat — Sie werden es ahnen — mit Vektorräumen zu tun. Doch zunächst zur Lösungsbestimmung. Als Beispiel betrachten wir

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & c_1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 6 & 7 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 9 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 11 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{array} \right).$$

aus dem vorigen Abschnitt, denn dort treten im Grunde alle Sonderfälle auf. Die \*-Einträge haben wir durch fortlaufende Zahlen ersetzt, um nachfolgende Umformungen klarer zu machen. Wer möchte, kann die erweiterte Koeffizientenmatrix wieder in ein normales LGS umwandeln. In unserem Beispiel wäre dies

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + 2x_3 & + 3x_6 + 4x_7 = c_1 \\ & x_2 + 5x_3 & + 6x_6 + 7x_7 = c_2 \\ & & x_4 + 8x_6 + 9x_7 = c_3 \\ & & x_5 + 10x_6 + 11x_7 = c_4 \\ & & 0 = c_5. \end{array}$$

Die Bestimmung der Lösungsmenge verläuft zeilenweise. Etwaige Nullzeilen liefern uns entweder eine wahre Aussage und können übersprungen werden oder sie liefern einen Widerspruch, wonach das LGS gar keine Lösung hat. Nicht-nullzeilen (solche mit nicht ausschließlich Nullen als Einträge) werden nach der ersten Variablen aufgelöst. In unserem Beispiel erhalten wir — vorausgesetzt  $c_5 = 0$  — Formeln für  $x_1, x_2, x_4$  und  $x_5$  in Abhängigkeit der übrigen Variablen sowie der rechten Seite:

$$\begin{aligned}x_1 &= c_1 - 2x_3 - 3x_6 - 4x_7 \\x_2 &= c_2 - 5x_3 - 6x_6 - 7x_7 \\x_4 &= c_3 - 8x_6 - 9x_7 \\x_5 &= c_4 - 10x_6 - 11x_7\end{aligned}$$

Wir erhalten also durch eine Wahl von  $x_3, x_6$  und  $x_7$  eine Lösung und die gesamte Lösungsmenge, indem  $x_3, x_6$  und  $x_7$  jeweils ganz  $\mathbb{K}$  durchlaufen. Die Lösungsmenge können wir also schreiben als

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ c_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ -8 \\ -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ -9 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \right\}.$$

Ist diese Lösungsmenge ein Vektorraum?

In unserem Beispiel müssen wir diese Frage mit *Nein* beantworten.  $L$  ist nur dann ein Vektorraum, wenn alle  $c_i = 0$  sind, wenn wir es also mit einem homogenen LGS zu tun haben. Eine Basis dieses homogenen Lösungsraumes wäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ -8 \\ -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ -9 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dieser Sachverhalt gilt allgemein für beliebige lineare Gleichungssysteme:

### Satz

Sei  $r$  der Rang der  $(m \times n)$ -Matrix  $A$ . Dann hat  $A$  nach Anwendung des Gauß-Algorithmus genau  $r$  Zeilen, die nicht ausschließlich Nulleinträge enthalten. Weiterhin ist der Lösungsraum des homogenen LGSs  $A\vec{x} = \vec{0}$ , also der Kern von  $A$ , ein  $(n - r)$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{K}^n$ . Eine Basis dieses

homogenen Lösungsraumes erhalten wir, wie im obigen Beispiel demonstriert, durch den Gauß-Algorithmus. Durch Linearkombinationen dieser so genannten Lösungsbasisvektoren kann jede weitere Lösung des homogenen LGSs linear kombiniert werden. ■

Für eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit maximalem Rang folgt aus dem Dimensionssatz

$$n = \dim \mathbb{K}^n = \dim(\text{Bild } A) + \dim(\text{Kern } A) = n + \dim(\text{Kern } A) ,$$

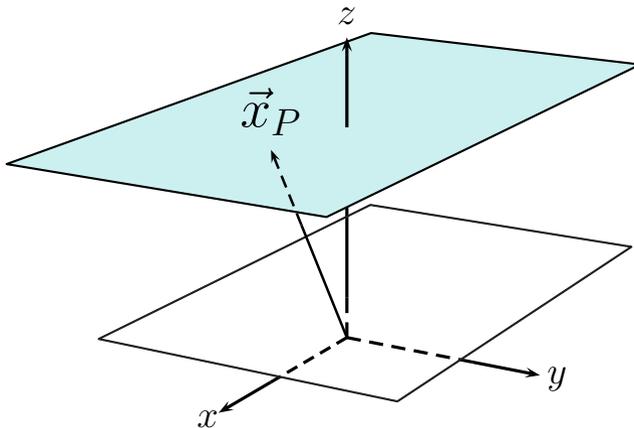
daher enthält der Kern der Matrix einzig den Nullvektor!

Die Vektorraumstruktur für die Lösungsmenge homogener LGSs liefert uns das so genannte *Superpositionsprinzip* (welches uns bereits im Teil zur Analysis bzgl. seiner physikalischen Bedeutung begegnet ist):

### Satz

Linearkombinationen von Lösungen eines homogenen LGSs  $A\vec{x} = \vec{0}$  sind wieder Lösungen. ■

Weiterhin sehen wir an unserem Beispiel, dass sich die Lösungsmenge des inhomogenen LGSs von der des homogenen lediglich durch die Addition eines konstanten Vektors — im Beispiel  $(c_1, c_2, 0, c_3, c_4, 0, 0)^T$  — unterscheidet. Bemerkenswert ist, dass dieser Vektor selbst auch eine Lösung des inhomogenen LGSs ist. Somit können wir uns die Lösungsmenge des inhomogenen LGSs als einen aus dem Ursprung heraus verschobenen Vektorraum vorstellen.



Der Vektor  $(c_1, c_2, 0, c_3, c_4, 0, 0)^T$  spielt dabei keine besondere Rolle. Statt dieses Vektors kann genauso gut jeder andere Lösungsvektor des inhomogenen LGSs erhalten.

**Satz**

Sei  $\vec{x}_P$  eine beliebige Lösung des inhomogenen LGSs  $A\vec{x} = \vec{b}$  und sei  $L_H$  der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGSs  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Dann ist

$$\vec{x}_P + L_H := \{\vec{x}_P + \vec{x}_H \mid \vec{x}_H \in L_H\}$$

die gesamte Lösungsmenge des inhomogenen LGSs. Oft wird auch einfach  $\vec{x}_H$  statt  $L_H$  für die allgemeine homogene Lösung geschrieben und

$$\vec{x}_H + \vec{x}_P$$

für die allgemeine inhomogene Lösung. ■

Lösungen des inhomogenen LGSs werden auch *spezielle* bzw. *partikuläre* Lösungen genannt, woher die Bezeichnung  $\vec{x}_P$  stammt.

Wesentliches aus dem Satz ist schnell bewiesen, denn nach dessen Voraussetzungen gilt (wobei wir uns an die Linearitätseigenschaften der Matrix  $A$  erinnern)

$$A(\vec{x}_H + \vec{x}_P) = A\vec{x}_H + A\vec{x}_P = \vec{0} + \vec{b},$$

und andererseits unterscheiden sich zwei inhomogene Lösungen nur durch eine homogene Lösung:

$$A(\vec{x}_{P_1} - \vec{x}_{P_2}) = A\vec{x}_{P_1} - A\vec{x}_{P_2} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Interessant ist, dass wir einen analogen Satz wie den vorherigen bei den linearen Differenzialgleichungen erneut finden. Diese Gleichheit der Strukturen bildet das gemeinsame Dach, unter dem die vermeintlich unterschiedlichen Gebiete ein warmes Plätzchen finden.

## 17.5 Zum Invertieren von Matrizen

Wie im Abschnitt über lineare Abbildungen besprochen, eignet sich der Gauß-Algorithmus zur Invertierung von (natürlich quadratischen) Matrizen. Dazu wenden wir den Algorithmus auf die erweiterte Matrix  $(A \mid E)$  an, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Auf der rechten Seite erhalten wir dann die Inverse von  $A$ :

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{Gauß}} (E \mid A^{-1}).$$

**Beispiel**

Wir invertieren die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Somit ist die inverse Matrix

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$



Ist es nicht möglich, auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erzeugen, so ist  $A$  nicht invertierbar.

Haben wir erst einmal die Inverse berechnet, können wir jedes LGS der Form

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

also mit beliebiger rechter Seite, einfach durch Auflösen nach  $\vec{x}$  lösen:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Lineare Gleichungssysteme mit *invertierbaren* Matrizen haben somit immer eine *eindeutige* Lösung.

**17.6 Aufgaben**

1. Berechnen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus sämtliche Lösungen des homogenen und der beiden inhomogenen linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccc} -x - 2y = 0 & -x - 2y = -1 & -x - 2y = -1 \\ 2x + 4y = 0 & 2x + 4y = 3 & 2x + 4y = 2 \end{array},$$

und zeichnen Sie alle Lösungsmengen in ein Koordinatensystem.

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für beliebige rechte Seiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}.$$

3. Für welche Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$  hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & \alpha^2 z & = & 2\alpha \end{array}$$

keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen?

4. Überprüfen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

linear abhängig oder linear unabhängig sind.

5. Lösen Sie folgende nicht quadratische lineare Gleichungssysteme.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 17.7 Lösungen

1. Der Gauß-Algorithmus angewendet auf das homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} -x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 0 = 0. \end{array}$$

Die zweite Zeile  $0 = 0$  ist für alle  $x$  und  $y$  erfüllt. Die erste Zeile kann in die Geradengleichung  $y = -\frac{1}{2}x$  umgeformt werden. Somit ist die Lösungsmenge im homogenen Fall die Ursprungsgerade (ein eindimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$ ) mit Steigung  $-\frac{1}{2}$ . Dieses kleine Gleichungssystem hätten wir ohne den Gauß-Algorithmus schneller umformen können, bei größeren Systemen geht aber ohne ihn schnell die Übersicht verloren.

Der Gauß-Algorithmus besteht beim inhomogenen System aus den gleichen Umformungen, nur mit einer anderen rechten Seite.

$$\begin{array}{l} -x - 2y = -1 \\ 2x + 4y = 3 \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 0 = 1. \end{array}$$

Dies ergibt einen Widerspruch und somit keine Lösung für das erste inhomogene System.

Beim zweiten inhomogenen System tritt kein Widerspruch auf:

$$\begin{array}{l} -x - 2y = -1 \\ 2x + 4y = 2 \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 0 = 0. \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist wiederum eine Gerade  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ , diesmal allerdings keine Ursprungsgerade, sondern eine Gerade parallel zu der des homogenen Gleichungssystems.

Dieses Phänomen lässt sich folgendermaßen verallgemeinern: Die Lösungsmenge eines inhomogenen, linearen Gleichungssystems ist entweder die leere Menge oder eine parallele Verschiebung des homogenen Lösungsraumes.

2. Wir wenden den Gauß-Algorithmus für beliebige rechte Seiten an, repräsentiert durch den Vektor  $(a, b, c)$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ -1 & 2 & 1 & b \\ 1 & -2 & 0 & c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 4 & -2 & b+a \\ 0 & -4 & 3 & c-a \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 4 & -2 & b+a \\ 0 & 0 & 1 & c+b \end{array} \right)$$

Um das Gleichungssystem noch einfacher lösen zu können, erzeugen wir nun auch in den Einträgen oberhalb der Diagonalen Nullen.

$$\begin{aligned} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 4 & 0 & b+a+2(c+b) \\ 0 & 0 & 1 & c+b \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a+3(c+b) \\ 0 & 4 & 0 & b+a+2(c+b) \\ 0 & 0 & 1 & c+b \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+3(c+b) - \frac{1}{2}(b+a+2(c+b)) \\ 0 & 4 & 0 & b+a+2(c+b) \\ 0 & 0 & 1 & c+b \end{array} \right) \end{aligned}$$

Teilen wir schließlich noch die zweite Zeile durch 4 und ordnen die Einträge auf der rechten Seite, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b + 2c \\ y &= \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}c \\ z &= b + c \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Letzteres ist übrigens die Inverse zur Ausgangsmatrix.

3. Bei Parametern im Gleichungssystem müssen wir darauf achten, dass die Umformungsschritte auch für alle Werte des Parameters definiert sind.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & \alpha^2 & 2\alpha \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha^2 - 3 & 2\alpha - 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 9 & 2\alpha - 6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Interessant ist nun die letzte Zeile, also die Gleichung  $(\alpha^2 - 9)z = 2\alpha - 6$ .

- Für  $\alpha = -3$  ist die linke Seite Null, die rechte aber nicht. Hierfür gibt es daher keine Lösungen.
  - Für  $\alpha = +3$  sind beide Seiten Null und damit die Variable  $z$  frei wählbar. Hierfür gibt es unendlich viele Lösungen.
  - $\alpha \neq \pm 3$  hingegen liefert stets eine eindeutige Lösung.
4. Nach der Definition der linearen Unabhängigkeit muss aus der Gleichung  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$  folgen, dass alle  $\lambda_i = 0$  sind. Dabei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem mit den  $\lambda_i$  als Unbekannten. Diese können wir mit dem Gauß-Algorithmus berechnen.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Da nach Anwendung des Gauß-Algorithmus keine Nullzeile auftritt, gibt es eine eindeutige Lösung, nämlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

5. Der Gauß-Algorithmus für das erste Gleichungssystem:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{array} \right)$$

Aus der letzten Gleichung folgt  $z = -\frac{2}{5}$ . In der nächsthöheren (der ersten) Zeile kommen gleich zwei Variablen dazu, sodass wir eine davon — sagen wir  $y$  — frei wählen können. Sind wir nur an einer einzigen Lösung interessiert, empfiehlt es sich, einen besonders einfachen Wert wie 0 für  $y$  einzusetzen. Wollen wir allerdings die gesamte Lösungsmenge, so müssen wir  $y$  unbestimmt lassen. Nach  $x$  aufgelöst ergibt sich  $x = y + 3z = y - \frac{6}{5}$ . Somit ist die Lösungsmenge

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} y - \frac{6}{5} \\ y \\ -\frac{2}{5} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Gauß-Algorithmus für das zweite Gleichungssystem:

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun haben wir in der dritten Zeile einen Widerspruch ( $0 \cdot y = 1$ ) und somit ist die Lösungsmenge die leere Menge.

*Vorsicht:* Auch wenn die zweite Zeile ähnlich wie die dritte aussieht, stellt die zweite keinen Widerspruch dar. Ausgeschrieben lautet sie nämlich  $-z = 0$ , was für  $z = 0$  erfüllt ist.

### Fragen

- Was ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem?
- Gibt es Probleme des Alltags, die sich mit der Hilfe linearer Gleichungssysteme behandeln lassen?
- Welche Operationen sind beim Gauß-Algorithmus gestattet?
- Sind Linearkombinationen von Lösungen eines LGSs stets wieder Lösungen? Oder ist es von Bedeutung, ob das LGS homogen ist oder nicht?
- Was wissen Sie über die Struktur der Lösungsmenge eines LGSs?
- Wie können quadratische Matrizen invertiert werden?



# 18 Determinanten

## 18.1 Motivation

Wir haben Matrizen bisher als Schema zur Darstellung linearer Abbildungen oder linearer Gleichungssysteme kennen gelernt. Eine weitere, oft verwendete Betrachtungsweise ist die Zusammenfassung mehrerer Vektoren — meist einer Basis — zu einer Matrix, indem einfach jeder Vektor in eine Spalte der Matrix geschrieben wird. So erhalten wir beispielsweise aus der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  die  $(3 \times 3)$ -Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie zuvor können wir dann durch Untersuchungen der Matrix Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Vektoren ziehen. Das Praktische ist nun, dass wir aus der Berechnung einer einzigen Größe, der *Determinante*, eine Vielzahl von Eigenschaften ableiten können. In diesem Zusammenhang interessieren uns die folgenden grundlegenden und auch anschaulichen Eigenschaften:

- **Lineare Unabhängigkeit.** Die kennen wir bereits, doch werden wir eine einfachere Überprüfungsmöglichkeit kennen lernen, als sie das Lösen linearer Gleichungssysteme bietet.
- **Orientierung.** Dieses Konzept ist im  $\mathbb{R}^3$  als *Rechte-Hand-Regel* veranschaulicht. Die Determinante gibt uns einerseits die Möglichkeit der einfachen Bestimmung der Orientierung und andererseits die Möglichkeit der Verallgemeinerung in den  $\mathbb{R}^n$ .
- **Volumenberechnung.** Welches Volumen hat ein Quader im  $\mathbb{R}^n$ , dessen Kanten durch  $n$  Vektoren gegeben sind?

Dies ist nicht alles, was die Determinante vermag. Eine sehr wichtige Anwendung der Determinante besteht in der Berechnung von Eigenwerten linearer

Abbildungen und wird uns somit in dem Kapitel zu diesem Thema noch einmal begegnen.

## 18.2 Definition und Berechnung

Die Definition der Determinante ist recht komplex und benötigt zuvor die Einführung der so genannten *Streichungsmatrix*. Ist die Definition allerdings erst einmal verstanden, ermöglicht sie eine einigermaßen einfache Berechnung. Bei vielen Betrachtungen werden wir es mit quadratischen Matrizen zu tun haben; nur für solche ist die Determinante definiert.

### Definition (Streichungsmatrix)

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  mit  $n > 1$ . Dann kann aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte die so genannte Streichungsmatrix

$$S_{ij}(A) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \cancel{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \dots & \cancel{a_{ij}} & \dots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \cancel{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n-1 \times n-1, \mathbb{K})$$

gewonnen werden. ◀

### Definition (Determinante)

Sei  $n > 1$ . Die Determinante  $\det: M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist definiert durch

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det S_{i1}(A).$$

Für  $A = (a_{11}) \in M(1 \times 1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$  gilt  $\det A := a_{11}$ . Es wird oft

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{statt} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

geschrieben. ◀

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist also über die Determinanten kleinerer quadratischer Matrizen definiert. Letztere werden mit der gleichen

Definition wiederum auf noch kleinere Matrizen zurückgeführt. Schließlich landen wir bei  $(1 \times 1)$ -Matrizen, für die unsere Definition ohne weitere Umwege einen Wert für die Determinante liefert. Dieses Konzept, in einer Definition wieder auf die Definition zu verweisen, wird *Rekursion* genannt.

Schauen wir uns nun die Definition genauer an, wobei wir die Vorzeichen vorerst vernachlässigen. Es wird jedes Element der ersten Matrixspalte mit der Determinante der Streichungsmatrix multipliziert, die durch Streichen jener Zeile und Spalte entsteht, zu denen das aktuelle Element gehört. Schließlich wird alles summiert. Der Term  $(-1)^{i+1}$  verursacht dabei einen Vorzeichenwechsel eines jeden zweiten Summanden.

Nun stellt sich vielleicht die Frage, was an der ersten Spalte einer Matrix so besonders ist, dass gerade sie zur Definition einer so praktischen Größe wie der Determinante benutzt wird. In der Tat kann durch einige Rechnerei eine entsprechende Formel für die Determinante hergeleitet werden, in der anstelle der ersten Spalte eine beliebige Spalte oder Zeile der Matrix durchlaufen wird. Diese Formeln sind als *Laplace'scher Entwicklungssatz* zusammengefasst:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det S_{ik}(A) \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile})$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det S_{ik}(A) \quad (\text{Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte})$$

Welcher der Summanden sein Vorzeichen ändert, kann folgendem Schachbrettmuster entnommen werden:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Die Minuszeichen stehen hier für einen Vorzeichenwechsel.

Der Vorteil dieses Satzes liegt darin, sich zur Determinantenberechnung einer gegebenen Matrix die Zeile oder Spalte auszusuchen, welche am wenigsten Rechenaufwand verspricht. Dies ist typischerweise die Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen, denn so entfallen viele Determinantenberechnungen der Streichungsmatrizen.

### Beispiel

Enthält eine quadratische Matrix eine Nullzeile oder -spalte, so ist deren Determinante bei Entwicklung nach dieser Zeile oder Spalte Null.

Beispiele sind

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0 .$$



Wenn sich die Nullen nicht gerade wie in diesem Beispiel in einer Zeile oder Spalte konzentrieren, macht diese Strategie allerdings erst bei größeren Matrizen Sinn. Für  $(2 \times 2)$ - und  $(3 \times 3)$ -Matrizen ergeben sich aus der Definition separate Determinantenformeln, die wir im Folgenden herleiten wollen.

### 18.2.1 Berechnung für $(2 \times 2)$ -Matrizen

Wir berechnen die Determinante einer nicht näher konkretisierten  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  direkt nach der Definition (Entwicklung nach der ersten Spalte):

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} a_{i1} \det S_{i1}(A) \\ &= (-1)^2 a_{11} \underbrace{\det S_{11}(A)}_{= a_{22}} + (-1)^3 a_{21} \underbrace{\det S_{21}(A)}_{= a_{12}} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} . \end{aligned}$$

Dies kann in folgendem Schema zusammengefasst werden:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ & \searrow \\ \cdot & \cdot \end{matrix} - \begin{matrix} & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ & \swarrow \end{matrix}$$

### 18.2.2 Berechnung für $(3 \times 3)$ -Matrizen

Für den ebenso häufigen Fall der  $(3 \times 3)$ -Matrizen berechnen wir auf die gleiche

Weise die Determinante von  $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \det B &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Auch hier hilft ein Schema als Merkhilfe, der Übersichtlichkeit wegen ohne Indizes. Dafür schreiben wir die ersten beiden Spalten noch einmal hinten an die Matrix. Die Terme zu den schräg nach unten zeigenden Pfeilen werden addiert, jene zu den schräg nach oben zeigenden werden subtrahiert.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix} - \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

Diese Determinantenberechnung heißt *Regel von Sarrus*.

### 18.2.3 Dreiecksmatrizen

Matrizen, die oberhalb bzw. unterhalb der Diagonalen ausschließlich Nullen als Einträge haben, werden *obere* bzw. *untere Dreiecksmatrizen* genannt. Deren Determinante ist besonders leicht zu berechnen, unabhängig von der Größe der Matrix. In diesen Fällen ist nämlich die Determinante lediglich das Produkt der Diagonalelemente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Prüfen Sie dies als Übung zum Laplaceschen Entwicklungssatz eigenständig nach!

## 18.3 Geometrische Interpretation

### 18.3.1 Determinante als Volumenform

Wir erwähnten bereits, Matrizen hier auch als Zusammenfassung von Vektoren — ihrer Spaltenvektoren — betrachten zu wollen. Unter dieser Sichtweise erhält die Determinante eine sehr anschauliche Bedeutung. Die Determinante gibt nämlich ein Volumen an.

- Für reelle  $(3 \times 3)$ -Matrizen spannen die drei Spaltenvektoren ein so genanntes Parallelepiped auf. Ein Parallelepiped ist vorstellbar als schiefer Würfel, dessen Kanten durch die Spaltenvektoren gegeben sind. Die Seitenflächen eines Parallelepipeds sind Parallelogramme, gegenüber liegende Seiten sind

parallel zueinander. Es gilt:

*Das Volumen des Parallelepipeds, welches von den Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt wird, ist gleich  $|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$ .*

(Beachten Sie den Betrag, denn die Determinante kann durchaus auch negativ sein.)

- Für reelle  $(2 \times 2)$ -Matrizen sieht die Sache ganz ähnlich aus. Die zwei Spaltenvektoren spannen diesmal nur ein (zweidimensionales) Parallelogramm auf und ein zweidimensionales Volumen nennen wir normalerweise Flächeninhalt. Wiederum gilt:

*Der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von den Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  aufgespannt wird, ist gleich  $|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|$ .*

- Der Vollständigkeit halber soll hier noch der Fall der  $(1 \times 1)$ -Matrizen aufgelistet werden:

*Die Länge der Strecke, welche von dem Vektor  $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}$  aufgespannt wird, ist gleich  $|\det(\vec{v}_1)|$ .*

Auch für höhere Dimensionen kann ein analoger Sachverhalt formuliert werden, wird aber in der Praxis seltener benötigt. Dennoch ist es eine gute Übung, ein Parallelepipid im  $\mathbb{R}^4$  oder höher, das von entsprechend vielen Vektoren aufgespannt wird, als Menge aufzuschreiben. Linearkombinationen werden dabei behilflich sein.

### 18.3.2 Determinante und Orientierung

Das Vorzeichen der Determinante haben wir zur Volumenbestimmung nicht gebraucht. Wir können diese zusätzliche Information nutzen, um die Orientierung der Vektoren zu bestimmen. Im  $\mathbb{R}^2$  ist eine Orientierung durch den Uhrzeigersinn gegeben, im  $\mathbb{R}^3$  durch die Rechte-Hand-Regel (mehr dazu gleich). Um den Zusammenhang zwischen Orientierung und Vorzeichen der Determinante zu erkennen, berechnen wir zunächst das Vorzeichen einiger Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Bei der Matrix mit positiver Determinante kann der erste Spaltenvektor durch Drehung *entgegen* dem Uhrzeigersinn (das ist der mathematisch positive Drehsinn) schneller in Richtung des zweiten Spaltenvektors gedreht werden als mit dem Uhrzeigersinn. Bei negativer Determinante ist dies genau umgekehrt.

Anders ausgedrückt befinden sich bei festem ersten Spaltenvektor  $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  mit positiver Determinante  $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) > 0$  links von  $\vec{v}_1$ , (genauer links von der von  $\vec{v}_1$  aufgespannten Geraden, wenn man in Richtung  $\vec{v}_1$  schaut.) Alle  $\vec{v}_2$  mit negativer Determinante befinden sich rechts.

An  $(3 \times 3)$ -Matrizen testen wir einige mehr:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1, \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1. \end{array}$$

Sie können leicht überprüfen, dass die Spaltenvektoren der Matrizen mit positiver Determinante der Rechte-Hand-Regel genügen. D. h. die Lagen der drei Vektoren — von links nach rechts — können durch Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand dargestellt werden (vgl. hierzu die Bilder in Kapitel 19.4). Die Spaltenvektoren der Matrizen mit negativer Determinante genügen hingegen einer Linke-Hand-Regel.

Halten wir die ersten beiden Spaltenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  fest, befinden sich alle Vektoren  $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$  mit positiver Determinante  $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) > 0$  auf der gleichen Seite der durch  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  aufgespannten Ebene. Alle  $\vec{v}_3$  mit negativer Determinante auf der anderen Seite.

Diese Ergebnisse haben wir zwar nur durch einige wenige Beispielmatrizen hergeleitet, sie gelten aber für beliebige  $(2 \times 2)$ - bzw.  $(3 \times 3)$ -Matrizen. Somit haben wir mit der Determinante ein einheitliches Kriterium zur Charakterisierung der Orientierung an der Hand. Dies wollen wir nutzen, um die Orientierung etwas mathematischer zu definieren.

### Definition (positiv/negativ orientiert)

Die  $n$  Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  in angegebener Reihenfolge heißen

- *positiv orientiert*, falls  $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) > 0$  und
- *negativ orientiert*, falls  $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) < 0$  ist.



## 18.3.3 Determinante und lineare Unabhängigkeit

Die Beziehung zwischen der linearen (Un-)Abhängigkeit und dem Wert der Determinante werden wir ebenfalls mithilfe unserer Anschauung herleiten, zumindest in den wichtigen Fällen des zwei- und dreidimensionalen Raumes.

Wie kann die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren in der Ebene anschaulich charakterisiert werden?

Nun, die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie in die gleiche — oder entgegengesetzte — Richtung weisen, d. h. wenn sie Vielfache voneinander sind. Anderenfalls sind sie linear unabhängig und spannen somit die gesamte Ebene auf. Schauen wir uns an, welche Determinante eine Matrix hat, deren Spaltenvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{vmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{vmatrix} = a \cdot \lambda b - b \cdot \lambda a = 0 .$$

Umgekehrt sind Determinanten von Matrizen mit linear unabhängigen Spaltenvektoren ungleich Null. Erinnern wir uns an die Determinante als Maß des Flächeninhaltes des durch die beiden Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms, so macht dies durchaus Sinn. Linear abhängige Vektoren zeigen in die gleiche Richtung. Somit ist das von ihnen aufgespannte Parallelogramm degeneriert und hat einen Flächeninhalt von Null.

Und wie sieht die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  aus?

Hier sind die Vektoren genau dann linear abhängig, wenn sie in der gleichen Ursprungsebene liegen. (Dies schließt natürlich den Fall mit ein, dass alle drei Vektoren Vielfache voneinander sind.) Das von diesen drei Vektoren aufgespannte Parallelepipid liegt dann ebenfalls in der Ebene und hat ein Volumen von Null. Somit gilt auch hier, dass die Determinante von Matrizen mit linear abhängigen Spaltenvektoren Null ergibt. Bei linear unabhängigen Spaltenvektoren ist die Determinante hingegen ungleich Null.

Dieser Sachverhalt lässt sich auf beliebige Dimension und gar auf komplexwertige Matrizen erweitern. Der folgende Satz geht darauf ein. Er verbindet gleichzeitig viele der uns bereits bekannten Matrixgrößen und zeigt, wie eng die Beziehungen zwischen diesen sind.

### Satz

Es sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . Dann gelten folgende Äquivalenzen:

- $\det A \neq 0$
- $\Leftrightarrow$  Die Spalten (Zeilen) von  $A$  sind linear unabhängig.
- $\Leftrightarrow$   $\text{Rang } A = n$
- $\Leftrightarrow$   $\text{Kern } A = \{\vec{0}\}$
- $\Leftrightarrow$   $A^{-1}$  existiert.



## 18.4 Rechenregeln für die Determinante

Die Determinantenfunktion erfüllt weiterhin eine ganze Reihe brauchbarer Eigenschaften. Je mehr Sie davon beherrschen, desto leichter werden Determinantenberechnungen fallen, denn durch die Anwendung der folgenden Punkte zur rechten Zeit kann die Rechnung erheblich vereinfacht werden. Dementsprechend sind die aufgeführten Eigenschaften teilweise redundant, einige Eigenschaften folgen gar direkt aus anderen. Sie wurden dennoch genannt, um sie für Berechnungen besser verfügbar zu machen.

Teilweise kommen Determinanten von  $n$  Vektoren des  $\mathbb{K}^n$  vor. Gemeint ist dabei die Determinante der Matrix, die diese  $n$  Vektoren als Spaltenvektoren hat. Dank Punkt 5 gelten diese Punkte allerdings genauso, wenn anstelle der Spalten die Zeilen der Matrix betrachtet werden.

Seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  und  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in \mathbb{K}^n$  Spaltenvektoren. Seien ferner  $\vec{c} \in \mathbb{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

1.

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n);$$

das Vertauschen zweier Spalten — oder Zeilen — ändert lediglich das Vorzeichen. Die Determinante ist *alternierend*.

2.

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = 0,$$

gleiche Spalten — oder Zeilen — ergeben Null als Determinante. Dies ist eine direkte Folgerung des vorigen Punktes.

3.

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, (\vec{a}_k + \lambda \vec{c}), \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ & \quad + \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{c}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n), \end{aligned}$$

dies ist die Linearitätseigenschaft, allerdings für eine Spalte (oder Zeile), während die anderen nicht verändert werden. Die Determinante ist *in jeder Spalte — oder Zeile — linear*.

4.

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, (\vec{a}_k + \lambda \vec{a}_l), \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n). \end{aligned}$$

Addieren eines Vielfachen einer Spalte — oder Zeile — zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

5.

$$\det A = \det A^T,$$

wegen dieser Gleichheit können wir die Aussagen 1. bis 4. auch auf Zeilen übertragen, denn beim Transponieren werden ja aus Zeilen Spalten und aus Spalten Zeilen.

6.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

7.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad \text{falls } A \text{ invertierbar ist;}$$

dies ist eine direkte Folgerung aus dem vorigen Punkt und aus  $\det E = 1$ .

## 18.5 Das Kreuzprodukt

Bisher haben wir definiert, was die Summe zweier Vektoren und das Produkt eines Skalars mit einem Vektor ist. Das Kreuzprodukt gibt uns nun eine Möglichkeit, zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren. Es ist allerdings nur für Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  definiert, bietet dort aber eine schöne geometrische Interpretation. Später werden wir mit dem Skalarprodukt ein weiteres Produkt von Vektoren kennen lernen, das gänzlich anders aussieht als das Kreuzprodukt.

### **Definition** (Kreuzprodukt)

Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist das Kreuzprodukt definiert durch

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

oder durch

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \vec{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}.$$



Letzteres ist dabei nur als Rechenschema und Merkhilfe zu verstehen und soll den Bezug zur Determinante herstellen. Vektoren und Zahlen in derselben Matrix machen ansonsten keinen Sinn. Berechnen wir die Determinante beispielsweise mit der Regel von Sarrus, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \vec{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 \vec{e}_3 + x_3 y_1 \vec{e}_2 + x_2 y_3 \vec{e}_1 - x_3 y_2 \vec{e}_1 - x_1 y_3 \vec{e}_2 - x_2 y_1 \vec{e}_3,$$

was dem Kreuzprodukt aus der ersten Formel entspricht.

Was ergibt sich aus der Determinantendarstellung für  $\vec{y} \times \vec{x}$ ?

Da die Determinante alternierend ist, d. h. bei Vertauschen zweier Spalten ihr Vorzeichen ändert, muss dies auch für das Kreuzprodukt gelten:

$$\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}.$$

Die meisten der folgenden Fakten übertragen sich ebenso leicht von den Determinanteneigenschaften auf das Kreuzprodukt.

- $\vec{x} \times \vec{y}$  steht senkrecht auf  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ ;
- $|\vec{x} \times \vec{y}|$  ist der Flächeninhalt des von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aufgespannten Parallelogramms; (Definition und Einsichten hierzu im nächsten Kapitel)
- $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}$ ;  
das Kreuzprodukt ist alternierend;
- $(a\vec{x} + b\vec{y}) \times \vec{z} = a(\vec{x} \times \vec{z}) + b(\vec{y} \times \vec{z})$ ,  
 $\vec{x} \times (a\vec{y} + b\vec{z}) = a(\vec{x} \times \vec{y}) + b(\vec{x} \times \vec{z})$ ;  
das Kreuzprodukt ist in beiden Eingängen linear;
- $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$  genügen der Rechte-Hand-Regel.

Das Kreuzprodukt kommt in der Physik häufig vor. Bekannte Beispiele sind die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  mit der Gleichung  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  sowie die Lorentz-Kraft  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ .

## 18.6 Aufgaben

1. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Laplace-Entwicklung.

3. Beschreiben Sie die Menge aller Vektoren  $\vec{v}$ , welche die Gleichung

$$\vec{v} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lösen.

4. Bestimmen Sie alle Vektoren in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die zusammen mit den beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ein Parallelepiped mit einem Volumen von 3 aufspannen.

5. Überprüfen Sie mithilfe von Determinanten, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

linear abhängig oder linear unabhängig sind.

## 18.7 Lösungen

- 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \cdot 0 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 3 \\ &\quad - 2 \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-4) - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) \\ &= 0 \quad (\text{mit der Regel von Sarrus}) \end{aligned}$$

2. Um Rechenaufwand zu sparen, suchen wir uns eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen, hier die dritte Spalte. Nach dieser Spalte entwickeln wir die Determinante und alle Untermatrizen, die mit einer Null multipliziert werden, brauchen wir gar nicht erst hinzuschreiben. Die anderen  $3 \times 3$ -Untermatrizen werden wir ebenfalls nach Laplace entwickeln

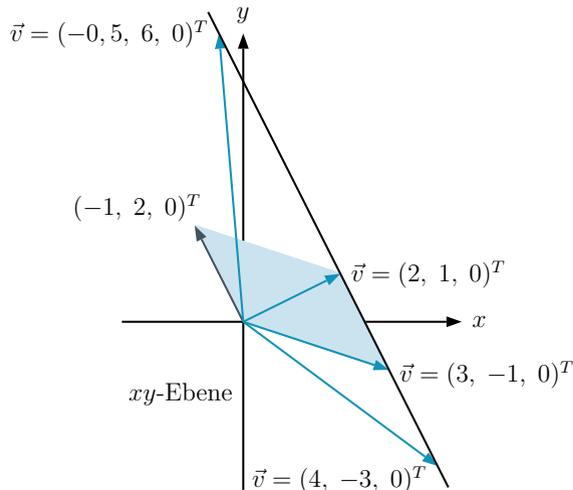
(die erste nach der ersten Spalte, die zweite nach der zweiten Zeile).

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -3 \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right) - 1 \left( -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 &= -3(1 \cdot 0 - 3 \cdot 3) - 1(-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7)) \\
 &= 27 + 16 = 43
 \end{aligned}$$

3. Bei dieser Aufgabe argumentieren wir mit den Eigenschaften des Kreuzproduktes.

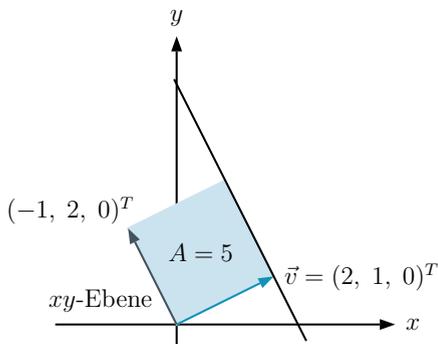
Zum einen steht der Ergebnisvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  des Kreuzproduktes senkrecht auf den beiden anderen Vektoren, also speziell senkrecht auf  $\vec{v}$ . Da der Ergebnisvektor in Richtung der  $z$ -Achse zeigt, muss  $\vec{v}$  in der  $xy$ -Ebene liegen.

Zum anderen gibt die Länge des Ergebnisvektors, hier 5, den Flächeninhalt des Parallelogramms an, welches von  $\vec{v}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird. Solche Parallelogramme gibt es unendlich viele, wie in der Skizze zu sehen. Die variable Seite, gegeben durch  $\vec{v}$ , endet jeweils auf einer fixen Geraden.



Einen Stützvektor dieser Geraden erhalten wir, indem wir den Vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  in der  $xy$ -Ebene um 90 Grad im Uhrzeigersinn (die Richtung er-

gibt sich daraus, dass das Kreuzprodukt der Rechte-Hand-Regel genügt) drehen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



Diese beiden Vektoren haben jeweils die Länge  $\sqrt{5}$ , womit das von ihnen aufgespannte Quadrat den richtigen Flächeninhalt hat. Somit ist die Lösungsmenge

$$\left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

4. Das Volumen eines Parallelepipeds können wir durch die Determinante der Matrix mit den drei Vektoren als Spalten bestimmen. Die gesuchten Vektoren sollen in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  zeigen, sie haben also die Gestalt  $\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Somit müssen wir lediglich die Gleichung

$$|\det(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)| = 3$$

nach  $\lambda$  auflösen. Es ist

$$\det(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(0 + (-1) + 0 - (-4) - 2 - 0) = \lambda .$$

Somit gibt es einzig die Lösungen  $\lambda = \pm 3$ , was zu den Lösungsvektoren  $\vec{v} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$  führt.

5. Die Determinante einer Matrix gibt uns Auskunft über die lineare (Un-)abhängigkeit ihrer Spalten bzw. Zeilen.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 0 - (-2) - 6 - 0 = -3 \neq 0 .$$

Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig. Bei Null als Ergebnis wären die Vektoren linear abhängig.

### Fragen

- Was besagt der Laplacesche Entwicklungssatz?
- Für welche Anwendungen lässt sich die Determinante verwenden und welche geometrische Interpretation lässt sich angeben?
- Wie berechnet man mit der Regel von Sarrus die Determinante von  $(3 \times 3)$ -Matrizen?
- Was können Sie folgern, wenn die Determinante einer Matrix  $A$  ungleich Null ist?
- Geben Sie Regeln für das Rechnen mit Determinanten an.
- Wie wird das Kreuzprodukt definiert?



# 19 Norm und Skalarprodukt

## 19.1 Motivation

Egal ob Ingenieur, Physiker oder Mathematiker: Längen- und Winkelmessungen sind von elementarer Bedeutung. Denken Sie nur an GPS-Navigation im Auto, das Navigieren von Schiffen und Flugzeugen, die Reichweite eines Radiosenders oder gar Lichtbrechung, bei der Einfallswinkel eine besondere Rolle spielen: Überall treten diese Begriffe auf. Klar, im Alltag können wir dafür teils Maßband und Geodreieck verwenden. Aber diese beiden Utensilien lassen sich nicht in einen beliebigen Vektorraum mitnehmen. Welche Länge ein Pfeil (Vektorbegriff aus der Schule) hat, kann leicht gemessen werden. Gleiches gilt für den Winkel zwischen zwei einfachen Vektoren, die auf das Papier gezeichnet wurden. Aber z. B. auch Polynome, die einen Vektorraum bilden, dürfen linear unabhängig sein. Anschaulich heißt das für uns, dass der „Winkel“ zwischen ihnen nicht Null ist. Aber wie messen wir diesen und welche Länge hat eigentlich ein Polynom? Mit Lineal und Winkelmesser in der Hand werden wir das nicht ermitteln können. Dazu brauchen wir also wieder etwas Theorie, die wir hier behandeln werden. Dabei wird uns beruhigen, dass die definierten und abgeleiteten Begriffe nach dem modelliert sind, was wir uns ohnehin als sinnvoll denken bzw. aus dem Alltag kennen.

## 19.2 Die Norm

Wir starten in diesem Teil mit der Norm:

### **Definition** (Norm)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

heißt Norm, wenn gilt:

1.  $\|\vec{v}\| \geq 0$  für alle  $\vec{v} \in V$  und  $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$  (positive Definitheit);
2.  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$  für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  (Dreiecksungleichung);
3.  $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  und alle  $\vec{v} \in V$ .

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar  $(V, \|\cdot\|)$ , bestehend aus einem Vektorraum und einer Norm. (Der Punkt zwischen den Normstrichen ist nur ein Platzhalter für die einzusetzenden Vektorraumelemente.) ◀

Wenn wir die einzelnen Forderungen an eine Norm ansehen, erkennen wir, dass diese in gewisser Weise verallgemeinert, was gewöhnlich unter „Länge“ verstanden wird. So besagt 1. im Wesentlichen, dass die Länge nicht negativ sein kann. Warum wir 2. Dreiecksungleichung nennen, ist im nächsten Beispiel sehr gut zu sehen. Dieses besagt grob formuliert, dass es auf direktem Wege schneller zum Ziel geht als über einen Umweg; dies wird aus der folgenden Skizze klar. Punkt 3 spricht eigentlich für sich. Hier überlassen wir es daher Ihnen, das ganze in Worte zu fassen.

Insgesamt steckt also in der Definition wirklich die Grundidee dessen, was von einer Längenmessung erwartet wird. Allerdings haben wir nun einen verallgemeinerten Begriff, der auch für beliebige Vektorräume funktioniert. Wir können aber nicht erwarten, dass die Norm eines Elementes des Vektorraumes der differenzierbaren Funktionen eine Länge ist, die sich in Metern ausdrücken lässt. Dennoch werden wir sehen, welche nützlichen Dinge sich mit der Norm anstellen lassen.

### Beispiel

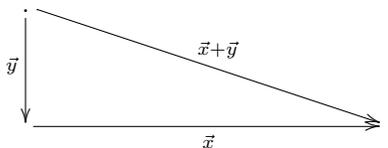
Die so genannte *Standardnorm*: Wir betrachten auf dem  $\mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Einheitskreis  $K$  im  $\mathbb{R}^2$  ist dann  $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ , denn nach dem Satz von Pythagoras ist  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , also  $\|\vec{x}\| = 1$ .

Ist das wirklich eine Norm? Ja, denn

1.  $\|\vec{x}\| \geq 0$  aufgrund der Quadrate;  
ferner ist offensichtlich nur für  $\vec{x} = (0 \dots 0)^T = \vec{0}$  die Norm  $\|\vec{x}\| = 0$ .
- 2.



Hier sehen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für den zweidimensionalen Fall und es ist leicht zu erkennen, woher sie ihren Namen hat. Aufgrund der Struktur ist klar, dass sich in höheren Dimensionen nichts ändert, was zur Ungültigkeit von 2. für die hier definierte Norm führen könnte. Es ist aber auch nicht schwer, einen formalen Beweis zu führen. Wir machen dies einfach für  $x, y \in \mathbb{R}$ , da hier die Beweisidee besonders gut sichtbar wird. Es ist zu zeigen, dass  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Wir wenden einen Trick an, denn mit den hinter der Norm verborgenen Wurzeln möchte niemand wirklich rechnen. Es gibt hierfür einfach keine hübschen Rechenregeln. Daher quadrieren wir beide Seiten und es bleibt zu zeigen

$$x^2 + y^2 \leq (\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2} .$$

Der letzte Term ist offensichtlich größer oder gleich Null, die rechte Seite ist also tatsächlich größer. Bitte denken Sie nicht, dass wir hier nur aus Gründen der Einfachheit einen Spezialfall bewiesen haben, denn das Verstehen von Mathematik läuft häufig über Prinzipien und Grundideen, die alles weitere einfach(er) machen. Die Grundidee haben wir hier gesehen. Nach unserer Überlegung kommen nämlich nach dem Potenzieren einfach auf der rechten Seite Terme dazu, die für ein Übergewicht sorgen.

3.

$$\begin{aligned} \|\alpha \vec{x}\| &= (\alpha^2 x_1^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \|\vec{x}\| . \end{aligned}$$



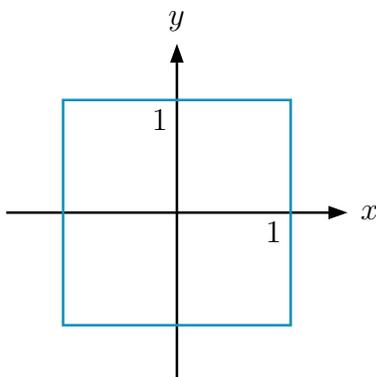
### Beispiel

Hier definieren wir die *Maximumsnorm* im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\vec{x}\|_{\max} := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} .$$

Es ist interessant sich zu überlegen, wie der „Einheitskreis“ bzgl. dieser Norm aussieht.

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\|_{\max} = 1\}$$



Bitte überlegen Sie selbst, warum das so ist; die Skizze sollte Tipp genug sein. Hier ist 1. erfüllt, denn bei der Definition wird jeweils das Maximum der Beträge der Komponenten genommen, weshalb keine Werte kleiner als Null möglich sind und Null selbst nur dann vorkommen kann, wenn alle Komponenten Null sind, was nur für den Nullvektor gilt. Da die Dreiecksungleichung für Beträge von reellen Zahlen gilt, gilt sie auch hier, womit 2. erfüllt ist. Weil sich aus den Beträgen das  $\alpha$  herausziehen lässt und dann auch vor das Maximum (max), ist 3. erfüllt. Es handelt sich also wirklich um eine Norm.  $\blacklozenge$

Wenn sich also in Zukunft (z. B. in einer Klausur) eine Abbildung darum bewirbt, eine Norm zu sein, müssen zur Überprüfung des Kandidaten strikt die Punkte 1.–3. untersucht werden, dann ist die Entscheidung gefallen. Wir haben die Erfahrung gemacht, dass in Klausuren oder bei Aufgaben lange auf die vermeintliche Norm gestarrt wird, ohne dass dies ein Ergebnis liefert. Es hilft also nur das wirkliche Prüfen und Aufschreiben; so schwer ist es meist wirklich nicht.

## 19.3 Das Skalarprodukt

Mit der Norm haben wir schon einen wichtigen Begriff kennen gelernt, mit dem wir Untersuchungen in normierten Vektorräumen durchführen können. Es gibt noch einen anderen wesentlichen Begriff, der uns einerseits die Winkelmessung ermöglicht, andererseits als eine Art Vorstufe zur Norm betrachtet werden kann. Wir merken uns schon jetzt, dass jedes Skalarprodukt eine Norm induziert (aber nicht umgekehrt). Bei den Skalarprodukten müssen wir unterscheiden, ob wir einen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum betrachten. Im ersten Fall heißt das Skalarprodukt euklidisch, im zweiten Fall unitär.

**Definition** (euklidisches Skalarprodukt)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (euklidisches) Skalarprodukt, wenn für alle  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
2.  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
3.  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$  und  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
4.  $\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , bestehend aus einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und einem euklidischen Skalarprodukt, heißt euklidischer Vektorraum. ◀

Aus 2. und 4. folgt:  $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ .

### Beispiel

Wir betrachten die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

heißt *Standardskalarprodukt*. Die Eigenschaften sind schnell geprüft:

1.  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = u_1(v_1 + w_1) + \dots + u_n(v_n + w_n)$   
 $= u_1 v_1 + u_1 w_1 + \dots + u_n v_n + u_n w_n = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n + u_1 w_1 + \dots + u_n w_n$   
 $= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
2. Die Gültigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass

$$v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = w_1 v_1 + \dots + w_n v_n$$

ist.

3. Es gilt  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$ , wodurch auch dieser Punkt klar ist.
4. Hier hilft, wie immer bei der Überprüfung der Eigenschaften von Skalarprodukten, das Ausschreiben:

$$\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = v_1 \lambda w_1 + \dots + v_n \lambda w_n = \lambda(v_1 w_1 + \dots + v_n w_n) = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$



$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , also  $\|\vec{x}\| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$ . Die Standardnorm wird also vom Standardskalarprodukt induziert.

Wie das Skalarprodukt im Komplexen aussieht, sehen wir in der folgenden Definition. Die Unterschiede zum euklidischen Fall sind nicht groß. Es ist interessant zu sehen, was beim Einsetzen ausschließlich reeller Größen in das unitäre Skalarprodukt passiert (wobei der letzte Satz als Aufforderung zu verstehen ist, dies auch wirklich selbst zu machen).

**Definition** (unitäres Skalarprodukt)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (unitäres) Skalarprodukt, wenn für alle  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Punkte 1., 3. und 4. wie zuvor in der Definition gelten, jedoch statt 2. gilt:

$$2.' \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} .$$

Ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , bestehend aus einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und einem unitären Skalarprodukt, heißt unitärer Vektorraum. ◀

Aus 2.' und 4. folgt diesmal:  $\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \lambda \vec{v} \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} = \bar{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ .

Wir hatten bereits zuvor bemerkt, dass sich aus jedem Skalarprodukt eine Norm basteln lässt. Dies geschieht (im euklidischen und unitären Fall) über folgende Gleichung:

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} .$$

Wenn wir die Definitionen von Skalarprodukt und Norm nochmals genau betrachten, erkennen wir schnell, dass das Skalarprodukt gerade dazu geschaffen scheint, zu einer Norm zu führen. Beachten Sie hierzu nochmals gesondert die Punkte 3. und 4. in der Definition des Skalarproduktes. Verwendung findet beim Nachweis auch die *Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung*, die wir allerdings nicht beweisen wollen:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

Aus dieser Ungleichung folgt für  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ :

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \leq 1$$

und wir können aus dem Skalarprodukt den Kosinus berechnen:

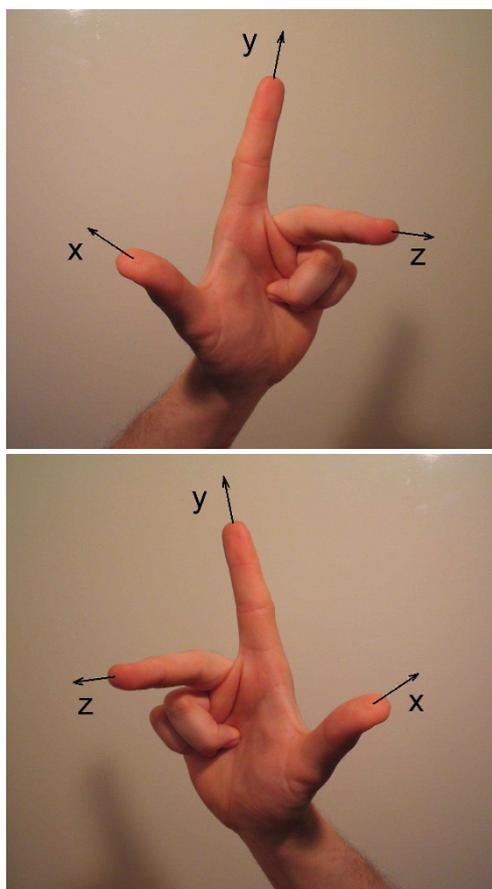
$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) .$$

Der in den Kosinus eingesetzte Winkel ist also der zwischen den Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$ . Die letzte Gleichung können wir nun nach dem Term mit dem Kosinus umstellen. Dann muss von beiden Seiten nur noch der Arcuskosinus genommen werden und es ergibt sich der Winkel; wir hatten ja am Anfang und in der Überschrift versprochen, dass wir hier das Berechnen von Winkeln und Längen lernen.

Anstatt  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  wird auch häufig die Schreibweise  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  verwendet. Einige Autoren lassen sogar den Punkt weg, was wir aber für etwas zu locker halten. Am Ende bleibt es Geschmackssache. Allerdings muss klar sein, was gemeint ist.

## 19.4 Orthonormalisierung nach Schmidt

Betrachten Sie bitte Daumen, Zeige- und Mittelfinger Ihrer rechten oder linken Hand. Diese drei Finger lassen sich so halten, dass zwischen ihnen ein Winkel von 90 Grad ist. Dies ist eine einfache Visualisierung eines kartesischen Koordinatensystems, in welchem wir gewöhnlich denken, wenn wir z.B. Punkte im Raum darstellen möchten. Die Festlegung der Achsenbezeichnungen in den Abbildungen ist allerdings willkürlich.



Alle anderen Koordinatensysteme — d. h. solche, bei denen die Achsen keine

rechten Winkel miteinander einschließen — scheinen uns irgendwie schief zu sein. Selbst durch die optischen Eindrücke des täglichen Lebens sind wir ein wenig auf rechte Winkel geeicht. Es ist leicht nachzurechnen, dass die zuvor behandelten Vektoren der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ , nämlich  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ , paarweise jeweils einen rechten Winkel einschließen. Sie bilden ja auch das Grundgerüst für ein kartesisches Koordinatensystem. Wir stellen hiermit fest, dass wir am liebsten an rechte Winkel denken, insbesondere, wenn wir Messungen vornehmen wollen und dafür ein einfaches Bezugssystem verwenden. Häufig richten sich Vektoren allerdings nicht nach unseren Wünschen und stehen in unschönen (nicht rechten) Winkeln zueinander, was es zu beheben gilt. Dabei denkt der Mathematiker nicht nur an Vorteile beim Zeichnen, es steckt viel mehr dahinter. So sind nicht nur die Geometer ganz verrückt danach, sich an jedem Punkt ein Koordinatensystem zu denken, dessen Achsen rechtwinklig (*orthogonal*) zueinander sind. Wenn wir nun an unsere Standardbasis im  $\mathbb{R}^3$  denken, so haben diese drei Vektoren noch eine schöne Eigenschaft: Sie haben alle die Norm (Länge) 1 bezüglich der Standardnorm, wie sich sofort nachrechnen lässt. Das ist noch luxuriöser, als einfach nur orthogonal zu sein. Wir sprechen dann von *orthonormal*, denn die Vektoren sind orthogonal und normiert. Zum Normieren muss ein Vektor durch seine Norm geteilt werden, wir sehen später mehr dazu. Nachdem wir Ihnen nun hoffentlich ausreichend erläutert haben, dass orthonormale Vektoren besonders schön sind, wollen Sie sicher auch wissen, ob nun auch beliebige Vektoren — und dazu braucht es wahrscheinlich etwas Gewalt — *orthonormiert* werden können. Wir können Sie beruhigen, denn dies macht das Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt (manchmal auch nach Gram und Schmidt benannt). Vor dem eigentlichen Verfahren benötigen wir allerdings noch etwas Theorie, durch die das zuvor Gesagte exakter wird.

### **Definition** (Orthogonalbasis, Orthonormalbasis)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einer Basis  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ . Diese heißt Orthogonalbasis, wenn gilt:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad \text{falls } i \neq j.$$

Sie heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn gilt:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$



Wenn  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  orthogonal zueinander sind, schreiben wir auch:  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

Das hier verwendete Symbol  $\delta_{ij}$  ist das bereits zuvor eingeführte Kronecker-Symbol. Wir werden es hier nicht weiter verwenden. Da es sich allerdings einer großen Beliebtheit unter Mathematikern erfreut (es wurde ihm sogar eine Internetseite gewidmet), sollte es hier seinen Auftritt haben.

Sind die  $\vec{b}_i$  orthogonal zueinander, aber so, dass nicht alle die Länge 1 haben, liegt eine *Orthogonalbasis* vor.

Es galt (und gilt noch immer)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) .$$

Daher:  $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ . Der Nullvektor  $\vec{0}$  ist zu allen Vektoren orthogonal.

### Beispiel

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

und

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 .$$



## 19.4.1 Das Verfahren

Seien die linear unabhängigen Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  gegeben.

- Der erste Vektor  $\vec{v}_1$  wird lediglich normiert:

$$\vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} .$$

- Der zweite Vektor  $\vec{v}_2$  wird bzgl. des ersten orthogonalisiert, also

$$\vec{u}_2^* := \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1$$

und wiederum normiert:

$$\vec{u}_2 := \frac{\vec{u}_2^*}{\|\vec{u}_2^*\|} .$$

- Für die nächsten Schritten verallgemeinern wir den vorigen Punkt lediglich: Seien dazu  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$  bereits konstruiert, so wird der nächste Vektor  $\vec{v}_{l+1}$  zu den bisher konstruierten orthogonalisiert:

$$\vec{u}_{l+1}^* := \vec{v}_{l+1} - \sum_{j=1}^l \langle \vec{v}_{l+1}, \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

und wiederum normiert:

$$\vec{u}_{l+1} := \frac{\vec{u}_{l+1}^*}{\|\vec{u}_{l+1}^*\|} .$$

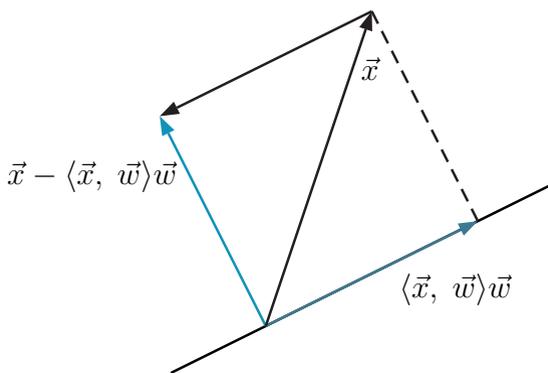
Wir wollen nun kurz zeigen, welche Idee hinter diesem Verfahren steckt: Für einen Vektor  $\vec{w}$  mit  $\|\vec{w}\| = 1$  gilt

$$\vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \vec{w} \perp \vec{w} \quad \text{für alle } \vec{x} \in V,$$

denn

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \vec{w}, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle - \langle \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle - \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \|\vec{w}\|^2}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

Einen anderen Weg zur Erleuchtung bietet (hoffentlich) die folgende Skizze:



Das in der Skizze eingezeichnete Geradenstück wird von  $\vec{w}$  aufgespannt. Aus der Kosinusformel

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle &= \|\vec{x}\| \|\vec{w}\| \cos \angle(\vec{x}, \vec{w}) \\ &= \|\vec{x}\| \cos \angle(\vec{x}, \vec{w}) \end{aligned}$$

ist ersichtlich, dass der auf dem Geradenstück eingezeichnete Vektor durch  $\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \vec{w}$  gegeben ist. Somit wird bei der Orthogonalisierung von  $\vec{x}$  bzgl.  $\vec{w}$  der Anteil von  $\vec{x}$ , welcher in Richtung von  $\vec{w}$  zeigt, gerade subtrahiert (also  $\vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \vec{w}$ ). Übrig bleibt der senkrecht zu  $\vec{w}$  stehende Anteil von  $\vec{x}$ .

### Beispiel

Orthonormalisiere

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nicht behaupten, dass dieses Beispiel schwierig ist. Schön daran ist allerdings, dass wir schon hier erahnen können, was das Ergebnis sein muss,

damit wir Vertrauen in das Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt fassen können. Mehr Aufwand wird in den Übungsaufgaben zu betreiben sein. Wenden wir nun aber zuerst hier an, was zuvor gelernt wurde:

- $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- Nun erfolgt die Orthogonalisierung

$$\begin{aligned} \vec{u}_2^* &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und schließlich das Normalisieren

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2^*}{\|\vec{u}_2^*\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das ist nun wirklich das, was zu erwarten war! ◆

## 19.5 Orthogonale Matrizen

In Kapitel 16.6 über besondere Matrizen hatten wir bereits kurz *orthogonale Matrizen* vorgestellt und über die Gleichung

$$A^T A = E_n$$

definiert. Diese wollen wir nun etwas genauer untersuchen. Zunächst bemerken wir, um die folgenden Überlegungen übersichtlicher zu gestalten, folgenden formalen Rechenzusammenhang zwischen dem Transponieren und dem Standardskalarprodukt:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^T \cdot \vec{w},$$

wobei die rechte Seite der Gleichung als Matrixmultiplikation der einzeiligen bzw. einspaltigen Matrizen zu verstehen ist. Damit können wir leicht berechnen, wie sich das Standardskalarprodukt zweier Vektoren ändert, wenn jene durch eine orthogonale Matrix  $A$  abgebildet werden:

$$\langle A\vec{v}, A\vec{w} \rangle = (A\vec{v})^T \cdot (A\vec{w}) = \vec{v}^T A^T A \vec{w} = \vec{v}^T E_n \vec{w} = \vec{v}^T \cdot \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Da das Standardskalarprodukt die Standardnorm induziert, werden also von orthogonalen Matrizen weder Winkel noch Längen verändert! Insbesondere ist das Bild einer ONB unter einer orthogonalen Matrix wieder eine ONB.

### Beispiel

Drehungen des  $\mathbb{R}^2$  erhalten Längen und Winkel (alle Vektoren werden ja gleich weit gedreht). Eine Drehung um einen Winkel  $\phi$  in mathematisch positivem Sinn ist gegeben durch die *Drehmatrix*

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Orthogonalitätsgleichung überprüfen:

$$\begin{aligned} R_\phi^T R_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi \\ -\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2. \end{aligned}$$



## 19.6 Aufgaben

1. (a) Normalisieren Sie die folgenden Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Orthonormalisieren Sie die Vektoren  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
3. Überprüfen Sie, dass

$$\left\{ \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  ist und berechnen Sie die Koeffizienten des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der Basisvektoren.

4. (a) Die so genannte *Betragssummennorm* für Vektoren  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\|\vec{v}\|_1 := \sum_{k=1}^n |v_k| .$$

Prüfen Sie dafür die Normeigenschaften.

- (b) Auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Standardskalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

Prüfen Sie, ob es sich hierbei wirklich um ein Skalarprodukt handelt.

5. (a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist.

- (b) Beschreiben Sie die Wirkung von  $R$  auf den  $\mathbb{R}^2$  (Hinweis:  $R$  ist keine Drehung).

6. Für das Volumen eines Parallelepipeds, aufgespannt von den Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ,$$

kennen wir bereits die Formel

$$V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| .$$

Zeigen Sie, dass das Volumen außerdem mittels

$$V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\langle \vec{u}, (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle|$$

berechnet werden kann.

## 19.7 Lösungen

1. (a) Zur Normalisierung eines Vektors müssen wir diesen lediglich durch seine Norm teilen.

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_1\| &= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} & , & \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \|\vec{v}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} & , & \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \|\vec{v}_3\| &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} & , & \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

- (b) Wir verwenden die Kosinusformel zur Winkelbestimmung.

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Somit ist der Winkel

$$\alpha = 30^\circ .$$

2. Zunächst wird der erste Vektor normiert:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der zweite Vektor ergibt sich nach Schmidt, indem wir  $\vec{v}_2$  in die Ebene senkrecht zu  $\vec{u}_1$  projizieren:

$$\vec{u}_2^* = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und anschließend normieren:

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2^*}{\|\vec{u}_2^*\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

$\vec{v}_3$  muss senkrecht zu  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  projiziert werden:

$$\begin{aligned}\vec{u}_3^* &= \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und wiederum normiert werden:

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{u}_3^*}{\|\vec{u}_3^*\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt bildet

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis.

3. Um eine Basis als Orthonormalbasis zu identifizieren, müssen wir zeigen, dass die Vektoren die Länge 1 haben und paarweise senkrecht zueinander sind. Aus Letzterem ergibt sich automatisch die lineare Unabhängigkeit der Vektoren und drei linear unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  bilden stets eine Basis dieses Vektorraumes. Die Längen- bzw. Normberechnung war bereits Gegenstand von Aufgabe 1 und soll hier nicht nochmals ausgeführt werden. Auch sollte offensichtlich sein, dass die Skalarprodukte  $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$ ,  $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_3 \rangle$ ,  $\langle \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle$  jeweils Null sind, was die rechten Winkel zwischen den Vektoren beweist.

Nun können wir sehr einfach den Vektor  $\vec{v}$  als Linearkombination der  $\vec{b}_i$  schreiben, denn die Koeffizienten ergeben sich durch  $\langle \vec{v}, \vec{b}_i \rangle$ :

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 + \langle \vec{v}, \vec{b}_3 \rangle \vec{b}_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{b}_1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \vec{b}_2 + \frac{-4}{\sqrt{6}} \vec{b}_3.$$

4. (a) Wir prüfen die drei Normeigenschaften für  $\|\vec{v}\|_1 := \sum_{k=1}^n |v_k|$  nach.  $\|\vec{v}\|_1 \geq 0$  ist für alle  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  erfüllt, da durch die Beträge nur nicht-negative Zahlen addiert werden. Sobald auch nur eine Komponente von  $\vec{v}$  ungleich Null ist, steht in der Summe ein positiver Summand; somit ist  $\|\vec{v}\|_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$  erfüllt.

Die Dreiecksungleichung überträgt sich von der Dreiecksungleichung für den Betrag:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|_1 &= \sum_{k=1}^n |v_k + w_k| \leq \sum_{k=1}^n (|v_k| + |w_k|) = \sum_{k=1}^n |v_k| + \sum_{k=1}^n |w_k| \\ &= \|\vec{v}\|_1 + \|\vec{w}\|_1. \end{aligned}$$

Und schließlich gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle  $\vec{v} \in V$

$$\|\alpha \vec{v}\|_1 = \sum_{k=1}^n |\alpha v_k| = \sum_{k=1}^n |\alpha| |v_k| = |\alpha| \|\vec{v}\|_1.$$

- (b) Nun müssen wir für  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx$  die Skalarprodukteigenschaften nachweisen.

$$\begin{aligned} \langle f, g+h \rangle &= \int_0^1 f(x)(g+h)(x) dx = \int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)h(x)) dx \\ &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)h(x) dx = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \\ \langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle \\ \langle f, f \rangle &= \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq 0 \\ \langle f, \lambda g \rangle &= \int_0^1 f(x)\lambda g(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x)g(x) dx = \lambda \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Soweit, so gut. Das größte Problem — und das ist häufig der Fall — bereitet die Eigenschaft  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ , also

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0.$$

Könnte es nicht eine Funktion ungleich der Nullfunktion geben, deren Abweichungen von Null so gering sind, dass sie keine Auswirkung bei der Integration haben? Solche Funktionen gibt es in der Tat, beispielsweise ist für  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(0) = 1$  und  $f(x) = 0$  für  $x > 0$  das obige Integral Null. Wir haben uns aber in der Aufgabenstellung auf *stetige* Funktionen eingeschränkt und für solche funktioniert dieser Trick nicht. Ein „Ausreißer“ wie  $f(0) = 1$  bedeutet nämlich bei stetigen Funktionen, dass die Funktion in einer ganzen Umgebung um den Urbildpunkt — hier 0 — ähnliche Werte annimmt wie beim Urbildpunkt selbst und damit, sei diese Umgebung auch noch so klein, wird das Integral in jedem Fall ein positives Ergebnis liefern, es sei denn,  $f$  ist wirklich überall Null.

5. (a)

$$R^T R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

- (b)  $R$  ist eine Spiegelung des  $\mathbb{R}^2$  an der Winkelhalbierenden:

$R$  bildet einen Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  auf den Vektor  $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$  ab. Einzig Vielfache des Vektors  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  werden auf sich selbst abgebildet. Weiterhin liegt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  senkrecht auf der Differenz  $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 1(b-a) + 1(a-b) = 0.$$

6. Bei dieser Aufgabe müssen wir lediglich die Gleichheit

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle$$

nachweisen. Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \end{aligned}$$

und die linke Seite nach Sarrus

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= u_1 v_2 w_3 + u_3 v_1 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 . \end{aligned}$$

Nun ist zu sehen, dass beide Seiten gleich sind.

### Fragen

- Welche Eigenschaften hat eine Norm?
- Geben Sie (wenigstens) zwei Beispiele für eine Norm auf einem entsprechend von Ihnen gewählten Vektorraum an.
- Wie lautet das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  und wie erhält man auf dessen Basis die Standardnorm?
- Wie lassen sich Winkel zwischen Elementen eines Vektorraumes berechnen?
- Verdeutlichen Sie mit der Hilfe einer Skizze die Funktionsweise des Orthonormalisierungsverfahrens von Schmidt.
- Welche besonderen Eigenschaften haben orthogonale Matrizen?



# 20 Basiswechsel und darstellende Matrizen

## 20.1 Motivation

Wir haben gelernt, dass ein Vektor stets aus den Elementen einer Basis linear kombiniert, also bezüglich einer Basis dargestellt werden kann. Häufig wird dafür im  $\mathbb{R}^n$  die Standardbasis verwendet. Ihre Elemente sind zueinander orthogonal und haben alle die Länge 1 bezüglich der Standardnorm, sie bilden also eine ONB. Mit ihnen haben wir ein komfortables und einfaches Grundgerüst für ein Koordinatensystem, in welchem dann Skizzen angefertigt und Koordinaten von Vektoren angegeben werden können.

Wir können aber nicht immer davon ausgehen, dass diese freundliche Standardbasis für den  $\mathbb{R}^n$  gegeben ist, es haben ja auch andere Basen ihre Berechtigung. Ferner ist der  $\mathbb{R}^n$  nicht der einzige Vektorraum, den es zu untersuchen gilt. Beim Vektorraum der Polynome z. B. können wir nicht mehr aus der Anschauung heraus sagen, welche Basis denn nun am besten ist, denn wir können uns diese nicht einfach vorstellen. Natürlich sind wir in der Lage, nach dem zuvor Gelernten alle möglichen Basen durch das Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt zu einer ONB zu machen, aber das ist teils auch ein gehöriger Aufwand. Beispielsweise muss ein Ingenieur damit rechnen, dass ein Kollege seine Messungen in einem bestimmten Koordinatensystem durchführt, welches ihm am besten gefällt. Wir können seine Ergebnisse nicht ohne weiteres für unsere Rechnungen übernehmen, wenn wir nicht sicher sind, dass er das gleiche Koordinatensystem verwendet. Wir müssen also ohne Informationsverluste die Basis (und damit das Koordinatensystem) wechseln können. Dieses Beispiel ist recht grob gestrikt, beleuchtet aber doch im Kern die Notwendigkeit, nach Belieben die Basen wechseln zu können. Dies macht uns unabhängig vom Diktat einer zuvor fixierten Basis.

Nachfolgend wird die Forderung nach dem Wechsel zu vermeintlich nicht attraktiven Basen besonders deutlich. Es wird sich nämlich herausstellen, dass Matrizen teils dann sehr schön — d. h. hier zu Diagonalmatrizen — werden,

wenn wir sie bzgl. der Basis darstellen, die von ihren Eigenvektoren gebildet wird. Das ist im Moment noch Zukunftsmusik, allerdings ein wesentlicher Grund dafür, dass es sich wirklich lohnt, die Basis ab und an zu wechseln.

Beim Thema Matrizen haben wir nun gleich wieder einen Grund, uns über die gewählte Basis Gedanken zu machen. Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis, dass wir eine lineare Abbildung bezüglich einer festen Basis stets eindeutig als Matrix darstellen können. Wenn wir die gleiche lineare Abbildung nun aber bezüglich einer anderen Basis darstellen? Dann müssen wir wiederum etwas ändern.

## 20.2 Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren

Bevor wir zum Kern der Sache vordringen, starten wir mit einer kurzen Erinnerung. Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\dim V = n$ ,  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  eine Basis von  $V$ . Dann gilt für alle  $\vec{v} \in V$ :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i$$

mit eindeutig bestimmten  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ . Daher lässt sich  $V$  auf  $\mathbb{K}^n$  abbilden: Für  $B$  wie zuvor heißt

$$K_B: V \rightarrow \mathbb{K}^n \quad , \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =: \vec{\lambda}$$

die *Koordinatenabbildung* von  $V$  bzgl.  $B$ . Der Vorteil der Koordinatenabbildung sollte bereits jetzt klar sein: Jedes Element eines Vektorraumes mit gegebener Basis kann mit der Hilfe dieser Abbildung zu einem einfachen *Koordinatenvektor*, nämlich dem gerade eingeführten  $\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^n$ , gemacht werden, egal wie kompliziert oder abstrakt der Vektorraum sein mag. Mit dem  $\mathbb{K}^n$  befinden wir uns dann in einem recht vertrauten Gebiet.

Wählen wir den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  jedoch zu  $\mathbb{K}^n$  selbst, so funktioniert das Verfahren natürlich auch, aber dann muss besonders exakt darauf geachtet werden, bzgl. welcher Basis ein Vektor dargestellt ist. Weiteres in Abschnitt 20.4.

**Beispiel**

Seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  ein Element des Vektorraumes  $M(2 \times 2, \mathbb{R})$  und

$$B := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis desselben. Was ist  $K_B(A)$ ?

Es ist

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^4 \lambda_k \vec{b}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \lambda_2 + \lambda_3 = 3, \lambda_1 = 3, \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -3 \\ \Rightarrow K_B(A) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für eine andere Basis, z. B.

$$B' := \left\{ \vec{b}'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}'_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}'_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}'_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ist

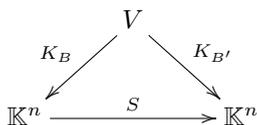
$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^4 \lambda'_k \vec{b}'_k = \begin{pmatrix} \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 & \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 \\ \lambda'_3 + \lambda'_4 & \lambda'_4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 &= 1, \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 = 3, \lambda'_3 + \lambda'_4 = 3, \lambda'_4 = 2 \\ \Rightarrow \lambda'_1 &= -2, \lambda'_2 = 0, \lambda'_3 = 1, \lambda'_4 = 2 \\ \Rightarrow K_{B'}(A) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist  $K_B(A) \neq K_{B'}(A)$  und es wird deutlich, dass das Ergebnis von der jeweils gewählten Basis abhängt.  $\blacklozenge$

**20.2.1 Das Geschehen im Diagramm**

Selbstverständlich wollen wir solch eine Rechnung wie im vorigen Beispiel nicht für jeden zu betrachtenden Vektor durchführen. Vielmehr suchen wir im Folgenden die Abbildungsvorschrift, welche den Koordinatenvektor bzgl. der einen Basis  $B$  auf den Koordinatenvektor bzgl. der anderen Basis  $B'$  abbildet. Auch

diese Abbildung ist wieder linear, wie dem folgenden Diagramm zu entnehmen ist:



Die gesuchte Abbildung  $S$  ist nämlich die Hintereinanderausführung der linearen Koordinatenabbildungen:

$$S = K_{B'} \circ K_B^{-1} .$$

Dabei können wir  $S$  leicht bestimmen, indem wir die Basisvektoren  $\vec{b}_k$  von  $B$  bzgl. der Basis  $B'$  darstellen, also  $K_{B'}(\vec{b}_k)$  berechnen. Denn wegen  $K_B(\vec{b}_k) = \vec{e}_k$  ist

$$S(\vec{e}_k) = K_{B'}(K_B^{-1}(\vec{e}_k)) = K_{B'}(\vec{b}_k)$$

und jeden anderen Vektor können wir wiederum als Linearkombination der  $\vec{e}_k$  abbilden.

### Beispiel

Als Fortsetzung des vorigen Beispiels erhalten wir für  $K_{B'}(\vec{b}_k)$

$$K_{B'}(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_{B'}(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_{B'}(\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_{B'}(\vec{b}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Demnach wird  $S$  bzgl. der Standardbasis des  $\mathbb{R}^4$  von folgender Matrix repräsentiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir testen dies kurz an den beiden Koordinatenvektoren von  $A$ :

$$S(K_B(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = K_{B'}(A) .$$



## 20.3 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

Wir haben bereits im Kapitel über lineare Abbildungen gelernt, wie wir zu einer gegebenen linearen Abbildung die Matrixdarstellung finden. Wir wollen dies hier unter Verwendung der Koordinatenabbildung nochmals beleuchten und definieren, was genau unter der darstellenden Matrix verstanden wird. Dies bringt uns zuerst nichts dramatisch Neues, ist aber ein erster Schritt, wenn wir lineare Abbildungen bzgl. verschiedener Basen darstellen wollen.

### Definition (darstellende Matrix)

Seien  $L: V \rightarrow V$ ,  $\dim V = n$  und  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  Basis von  $V$ . Dann heißt

$$L_B := K_B \circ L \circ K_B^{-1}$$

die darstellende Matrix von  $L$  bzgl.  $B$ . ◀

Dies fällt nicht vom Himmel, sondern basiert auf dem folgenden einfachen Diagramm, aus dem sich alles ablesen lässt:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{L} & V \\
 \downarrow K_B & \dashrightarrow & \downarrow K_B \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_B} & \mathbb{K}^n
 \end{array}$$

### Beispiel

Als  $V$  betrachten wir  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ , den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellwertigen Polynome maximal zweiten Grades. Dies ist ein dreidimensionaler Vektorraum; eine Basis ist beispielsweise

$$B := \left\{ \vec{b}_1 = 1, \vec{b}_2 = x + 1, \vec{b}_3 = x^2 + x \right\} .$$

Bezüglich  $B$  wollen wir nun die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$L := \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \quad p(x) \mapsto x \cdot \frac{dp}{dx}(x)$$

ermitteln.

Aus dem Diagramm zur darstellenden Matrix wird nun

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_{<2}[x] & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}_{<2}[x] \\
 \downarrow K_B & & \downarrow K_B \\
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_B} & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

wobei die Koordinatenabbildung  $K_B$  die Basisvektoren von  $B$  in gegebener Reihenfolge auf die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  abbildet. Als Umkehrabbildung macht  $K_B^{-1}$  genau das Gegenteil:

$$K_B(\vec{b}_i) = \vec{e}_i \quad \text{bzw.} \quad K_B^{-1}(\vec{e}_i) = \vec{b}_i .$$

Nun sind die Spaltenvektoren einer Matrix genau die Bilder der Standardbasisvektoren. Um  $L_B := K_B \circ L \circ K_B^{-1}$  zu berechnen, brauchen wir somit nur jene Vektoren durch die Hintereinanderausführungen zu schicken: Zunächst werden die Standardbasisvektoren durch  $K_B^{-1}$  auf die  $\vec{b}_i$  abgebildet (siehe oben). Die  $\vec{b}_i$  werden dann von  $L$  folgendermaßen verarbeitet:

$$L(\vec{b}_1) = L(1) = x \cdot (1)' = 0 ,$$

$$L(\vec{b}_2) = L(x + 1) = x \cdot (x + 1)' = x ,$$

$$L(\vec{b}_3) = L(x^2 + x) = x \cdot (x^2 + x)' = 2x^2 + x .$$

Um letztlich zu berechnen, worauf diese Polynome von  $K_B$  abgebildet werden, stellen wir sie als Linearkombination der  $\vec{b}_i$  dar, denn  $K_B(\vec{b}_i)$  kennen wir:

$$0 = 0 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \xrightarrow{K_B} 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$x = -1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \xrightarrow{K_B} -1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$2x^2 + x = 1 \cdot \vec{b}_1 - 1 \cdot \vec{b}_2 + 2 \cdot \vec{b}_3 \xrightarrow{K_B} 1 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Zusammengesetzt erhalten wir für die darstellende Matrix

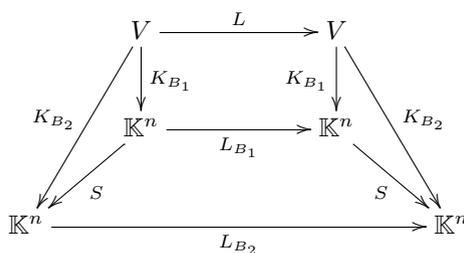
$$L_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$



## 20.4 Matrixtransformation bei einem Basiswechsel

Wir sind in gewisser Weise beim Finale, denn wir sehen auf der Grundlage der bisherigen mühevollen Arbeit gleich, wie der Basiswechsel konkret durch-

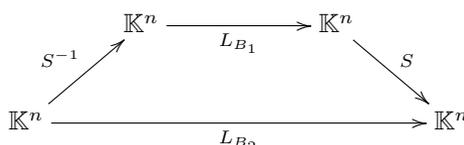
geführt wird. Wir fassen dazu die Diagramme aus 20.2.1 und 20.3 zusammen und vervollständigen das Ergebnis noch. Wir erhalten:



Offensichtlich ist wie zuvor

$$S = K_{B_2} \circ K_{B_1}^{-1} ,$$

was sich sofort aus dem Diagramm ansehen lässt. Aus dem unteren Teil



lesen wir ab:

$$L_{B_2} = S \circ L_{B_1} \circ S^{-1} .$$

Ist nun eine Matrix  $X$  als lineare Abbildung bzgl. einer Basis  $B_1$  gegeben und wollen wir sehen, wie die entsprechende Matrix  $Y$  für eine Basis  $B_2$  aussieht, so haben wir

$$Y = SXS^{-1} .$$

Die Verknüpfung linearer Abbildungen wird ja gerade durch das Matrixprodukt ausgedrückt.

### Beispiel

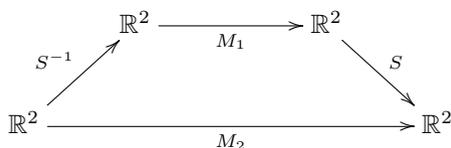
Sei eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch ihre darstellende Matrix

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis  $B_1$  des  $\mathbb{R}^2$ . Wie lautet die darstellende Matrix  $M_2$  von  $L$  bzgl. der Basis

$$B_2 := \left\{ \vec{b}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ?$$

Obiges Diagramm wird zu



und  $M_2$  werden wir durch das Matrixprodukt  $M_2 = SM_1S^{-1}$  berechnen, zunächst aber zu den Matrizen  $S$  und  $S^{-1}$ :

Ein Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  bzgl. der Basis  $B_2$  entspricht bzgl. der Standardbasis  $B_1$  dem Koordinatenvektor

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung der Koordinatenvektoren bzgl. der unterschiedlichen Basen wird gerade von  $S^{-1}$  bewirkt, wir erhalten also

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

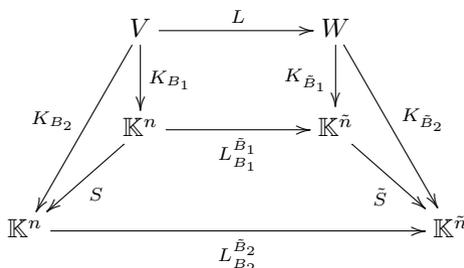
Schließlich erhalten wir

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$



Wir können also ohne Probleme die Basis verwenden, die sinnvoll ist oder uns aufgezwungen wird. Damit haben wir das Wesentliche geschafft und auch bereits einiges an Rechnungen zu diesem Thema gesehen. Insbesondere haben wir die Matrix  $S$  schon in einem konkreten Fall ermittelt. Alle Zutaten sind vorhanden. Allerdings erscheint der Patient (die letzte Gleichung) noch etwas blutleer. In diesem Zustand wollen wir ihn an dieser Stelle — ohne böse Absicht — belassen, denn schon im nächsten Abschnitt geht es um die bereits versprochene Diagonalisierung, womit wir dann frisches Leben in die zuletzt gesehene Gleichung bringen.

In Ihnen regt sich vielleicht die Frage, warum unsere Abbildung  $L$  in den Diagrammen stets von  $V$  nach  $V$  — jeweils mit der gleichen Basis versehen — geht. Dies muss nicht so sein! Sie kann auch durchaus von  $V$  in einen anderen Vektorraum  $W$  abbilden. Wir werden daher abschließend das entsprechende Diagramm für den allgemeineren Fall vorstellen. Mit dem bisher Gelernten ist es kein Problem, die entsprechenden Gleichungen für einen Basiswechsel aufzustellen. Sie müssen nur wie zuvor den Abbildungspfeilen folgen.



Dabei ist  $L_{B_i}^{\tilde{B}_i}$  die darstellende Matrix der Abbildung  $L: V \rightarrow W$  für den Fall, dass  $V$  die Basis  $B_i$  und  $W$  die Basis  $\tilde{B}_i$  hat. Ferner lesen wir mit Freude und Leichtigkeit ab:

$$L_{B_2}^{\tilde{B}_2} = \tilde{S} L_{B_1}^{\tilde{B}_1} S^{-1} .$$

## 20.5 Aufgaben

- Bestimmen Sie jeweils den Koordinatenvektor von

$$p: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \quad , \quad p(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

(aufgefasst als Vektor im Vektorraum der Polynome maximal zweiten Grades) bezüglich der Basis

- $B_1 = \{q_1(x) = x^2, q_2(x) = x, q_3(x) = 1\}$ ,
- $B_2 = \{q_1(x) = (x+1)^2, q_2(x) = x, q_3(x) = 1\}$ ,
- $B_3 = \{q_1(x) = x^2 + x, q_2(x) = x + 1, q_3(x) = 1 + x^2\}$ .

- Bestimmen Sie die darstellende Matrix  $L_{B_i}$  der linearen Abbildung

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad L(x, y) = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

bezüglich folgender Basen

- $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  (Standardbasis),
- $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,
- $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Berechnen Sie weiterhin die Determinanten dieser darstellenden Matrizen.

- Eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch ihre darstellende Matrix

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Basis } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Auf welche Vektoren werden die Standardbasisvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  durch  $L$  abgebildet?

Wie lautet die Abbildungsvorschrift von  $L$ ?

4. Die Drehung im  $\mathbb{R}^3$  um einen Winkel  $\alpha$  um die  $z$ -Achse ist eine lineare Abbildung. Diese ist gegeben durch die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis}).$$

Bestimmen Sie eine Drehung um den gleichen Winkel um die Achse, deren Richtung durch den Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben ist.

## 20.6 Lösungen

1. Zur Berechnung des Koordinatenvektors müssen wir  $p$  als Linearkombination der jeweiligen Basisvektoren darstellen.

- (a) In diesem Fall ist die Linearkombination offensichtlich:

$$p(x) = 3 \cdot x^2 + (-4) \cdot x + 2 \cdot 1.$$

Somit ist der Koordinatenvektor  $K_{B_1}(p) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (b) Wir suchen die Darstellung

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot x^2 + (-4) \cdot x + 2 \cdot 1 \\ &\stackrel{!}{=} a \cdot (x+1)^2 + b \cdot x + c \cdot 1 \\ &= a \cdot x^2 + (2a+b) \cdot x + (a+c) \cdot 1. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ b &= -4 - 2a = -10, \\ c &= 2 - a = -1, \end{aligned}$$

und der Koordinatenvektor lautet  $K_{B_2}(p) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (c)

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot x^2 + (-4) \cdot x + 2 \cdot 1 \\ &\stackrel{!}{=} a \cdot (x^2 + x) + b \cdot (x+1) + c \cdot (1+x^2) \\ &= (a+c) \cdot x^2 + (a+b) \cdot x + (b+c) \cdot 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} a + c &= 3 & a &= -\frac{3}{2} \\ a + b &= -4 & \Rightarrow b &= -\frac{5}{2} \\ b + c &= 2 & c &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

und der Koordinatenvektor lautet  $K_{B_3}(p) = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ .

2. Wir bearbeiten alle drei Fälle gleichzeitig.

Die *erste* Spalte der darstellenden Matrix erhalten wir, indem wir den *ersten* Basisvektor durch  $L$  abbilden und das Ergebnis als Koordinatenvektor schreiben:

(a)  $L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $L(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $L(-1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Die *zweite* Spalte der darstellenden Matrix erhalten wir, indem wir den *zweiten* Basisvektor durch  $L$  abbilden und das Ergebnis als Koordinatenvektor schreiben:

(a)  $L(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $L(2,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $L(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , das entspricht dem Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Nun müssen wir nur noch die darstellenden Matrizen aus den jeweiligen Koordinatenvektoren zusammensetzen:

(a)  $L_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , mit  $\det(L_{B_1}) = -7$ ;

(b)  $L_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , mit  $\det(L_{B_2}) = -7$ ;

(c)  $L_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ , ebenfalls mit  $\det(L_{B_3}) = -7$ .

Die Determinante hat in allen drei Fällen den gleichen Wert. Dieses Phänomen lässt sich verallgemeinern: Die Determinante der darstellenden Matrix ist unabhängig von der Wahl der Basis, bezüglich der die darstellende Matrix angegeben wird. Die Determinante ist vielmehr eine Größe der linearen Abbildung selbst.

3. Die Koordinatenvektoren zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bezüglich der Basis  $B$  sind  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Diese werden durch die darstellende Matrix auf die Koordinatenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

abgebildet. Daraus erhalten wir schließlich die gesuchten Bildvektoren:

$$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zusammengefasst ist

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L(0,1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und wegen der Linearität von  $L$  können wir daraus die gesamte Abbildungsvorschrift ableiten:

$$L(x, y) = x \cdot L(1,0) + y \cdot L(0,1) = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

4. Für diese Aufgabe wählen wir uns zunächst ein passendes Koordinatensystem (bzw. eine geeignete Basis), indem wir das alte Koordinatensystem derart kippen, dass die  $z$ -Achse auf die neue Drehachse fällt. Dabei müssen sowohl die Orientierung der Basisvektoren als auch die Eigenschaft, orthonormal zu sein, erhalten bleiben. Und welche Methode wäre geeigneter zur Konstruktion einer solchen als das Orthonormalisierungsverfahren nach Schmidt aus dem vorigen Kapitel? Wir verwenden das Verfahren wie dort beschrieben, allerdings drehen wir die Nummerierung um, da in der Aufgabenstellung der letzte Basisvektor vorgegeben ist und nicht der erste. Als neue Basis ergibt sich dann

$$B := \left\{ \vec{b}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bitte rechnen sie dies als Übung selbst noch einmal nach und überzeugen Sie sich davon, dass diese Basis wirklich positiv orientiert ist. (Wäre dies nicht so, müssten wir noch die Reihenfolge der letzten beiden Basisvektoren vertauschen.)

Die gesuchte Drehmatrix wird recht kompliziert aussehen. Relativ einfach ist hingegen die darstellende Matrix bezüglich der Basis  $B$ . Diese hat nämlich die gleiche Gestalt wie die Matrix, welche um die  $z$ -Achse dreht, denn die  $\vec{e}_i$  sind ja die Koordinatenvektoren der  $\vec{b}_i$  bzgl.  $B$ . Somit ist  $L_B = R$ .

Nun müssen wir nur noch die Abbildungsvorschrift von  $L_B = R$  bezüglich der Basis  $B$  bestimmen. Im entsprechenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_E=?} & \mathbb{R}^3 \\ \swarrow S & & \nwarrow S^{-1} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_B=R} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

ist dies  $S^{-1}RS$ , wobei sich  $S^{-1}$  aus den  $\vec{b}_i$  zusammensetzt, da unsere Ausgangsbasis die Standardbasis ist:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$S$  muss hier glücklicherweise nicht durch Invertieren von  $S^{-1}$  berechnet werden, sondern lediglich durch Transponieren, denn  $S^{-1}$  ist aufgrund unserer Konstruktion eine orthogonale Matrix (siehe Kapitel 16.6).

Schließlich ist

$$\begin{aligned} L_E &= S^{-1}RS \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha + 1 & -\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 1 & -\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 1 \\ -\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 1 & 2 \cos \alpha + 1 & -\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 1 \\ -\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 1 & -\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 1 & 2 \cos \alpha + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und  $L(x, y, z) = L_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  die gesuchte Drehung.

### Fragen

- Was ist ein Koordinatenvektor, wie berechnet man einen solchen und was ist zu seiner Berechnung überhaupt im Vorfeld nötig?
- Zeigen Sie anhand eines Diagramms, wie die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $L: V \rightarrow V$  berechnet wird.
- Wie ergibt sich jeweils eine der in diesem Diagramm vorkommenden Abbildungen als Komposition der anderen Abbildungen?
- Verdeutlichen Sie Ihr beschriebenes Vorgehen an einem Beispiel.
- Wie ändert sich die darstellende Matrix bei einem Basiswechsel?



# 21 Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit

## 21.1 Motivation

Neben der Determinante sind Eigenwerte und Eigenvektoren die wichtigsten Charakteristika linearer Abbildungen. Auf Eigenvektoren wirken lineare Abbildungen besonders einfach, nämlich lediglich als Streckung oder Stauchung. Dies macht es uns möglich, eine lineare Abbildung durch die Bestimmung ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren sehr einfach zu veranschaulichen.

Entsprechend vereinfacht sich auch die Matrixrepräsentation einer linearen Abbildung, wenn wir eine Basistransformation bezüglich ihrer Eigenvektoren vornehmen. Beispielsweise wird durch die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die gleiche lineare Abbildung dargestellt, wobei Matrix  $B$  bezüglich ihrer Eigenvektoren dargestellt ist. Die genaue Vorgehensweise dieser Transformation werden wir im Abschnitt über Diagonalisierung notieren. Dazu empfehlen wir allerdings, sich die Erkenntnisse aus dem Kapitel über Basiswechsel und darstellende Matrizen wieder ins Gedächtnis zu rufen.

## 21.2 Grundlagen

### **Definition** (Eigenwert, Eigenvektor)

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $L: V \rightarrow V$  linear. Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{K}$  heißt Eigenwert (EW) von  $L$  zum Eigenvektor (EV)  $\vec{v}$ , wobei  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ist, wenn

$$L\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (\text{Eigenwertgleichung})$$

ist, also wenn  $\vec{v}$  durch  $L$  auf das  $\lambda$ -Fache von sich selbst abgebildet wird. ◀

Der Nullvektor wird bei der Eigenvektordefinition ausgenommen, denn er würde obige Eigenwertgleichung für jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  erfüllen. Es ist jedoch für die nachfolgende Theorie wichtig, dass jedem Eigenvektor ein eindeutiger Eigenwert zugeordnet werden kann.

### Beispiel

$\mathbb{R}_{\leq n}[x]$  haben wir bereits als den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellwertigen Polynome vom maximalen Grad  $n$  kennen gelernt. Seine Vektoren haben die Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Die Standardbasis des  $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$  wird von den Monomen  $p_k(x) = x^k$  gebildet. Sei auf diesem Vektorraum eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq n}[x]$  definiert durch

$$L(p) := x \cdot \frac{dp}{dx}, \quad p \in \mathbb{R}_{\leq n}[x].$$

Bitte überprüfen Sie kurz die Linearitätseigenschaften sowie die Abgeschlossenheit der Abbildung (d. h., dass jedes Polynom maximal  $n$ -ten Grades auf ein Polynom maximal  $n$ -ten Grades abgebildet wird). Zur Erinnerung:  $\frac{dp}{dx}$  ist lediglich eine andere Schreibweise für  $p'$ .

Wir untersuchen nun die Abbildung  $L$  auf Eigenvektoren und betrachten dazu die Monome  $p_k(x) = x^k$ :

$$L(p_k) = x(kx^{k-1}) = kx^k = kp_k \quad \text{für } k > 0, \quad \text{und} \quad L(p_0) = x \cdot 0 = 0 \cdot p_0.$$

Somit ist  $p_k$  Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $k$ . Wie wir später genauer sehen werden, hat die Matrix zu  $L$  bezüglich dieser Standardbasis die besonders einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$



Natürlich ist mit  $\vec{v}$  auch  $\alpha\vec{v}$ ,  $\alpha \neq 0$ , Eigenvektor zum gleichen Eigenwert, denn auch dafür gilt aufgrund der Linearität obige Gleichung

$$L(\alpha\vec{v}) = \alpha L\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v}).$$

Somit gehört zu einem Eigenwert  $\lambda$  gleich ein ganzer Untervektorraum von Eigenvektoren, der so genannte *Eigenraum* zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Definition** (Eigenraum)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $L: V \rightarrow V$  linear und  $\lambda$  Eigenwert von  $L$ . Dann heißt

$$V_\lambda := \{\vec{v} \in V \mid L\vec{v} = \lambda\vec{v}\} \subset V$$

Eigenraum von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Die Dimension  $\dim(V_\lambda)$  des Eigenraumes wird als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  bezeichnet. ◀

Wir werden später erneut etwas zur geometrischen Vielfachheit sagen.

Gibt es gar mehrere linear unabhängige Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  zum gleichen Eigenwert  $\lambda$ , so sind sämtliche Linearkombinationen dieser Vektoren ebenfalls Eigenvektoren zu  $\lambda$  und der Eigenraum ist gleich dem Spann der  $\vec{v}_i$ . Anders herum sind Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig.

Geometrisch bedeutet die Eigenwertgleichung nichts anderes als eine Streckung bzw. Stauchung von  $\vec{v}$  um den Faktor  $\lambda$ . Hat  $\lambda$  ein negatives Vorzeichen, kommt noch eine Richtungsumkehr hinzu. All dies überträgt sich auf den gesamten Eigenraum von  $\lambda$ .

**Beispiel**

Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum, also ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Standardskalarprodukt. Lineare Abbildungen  $L: V \rightarrow V$  mit der Eigenschaft

$$\langle L\vec{v}, L\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \quad \text{für alle } \vec{v} \in V$$

werden als so genannte *orthogonale Abbildungen* bezeichnet. Definieren wir wie üblich durch das Skalarprodukt eine Norm  $\|\vec{v}\|^2 := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ , so wird aus dieser Eigenschaft die Längenerhaltung

$$\|L\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad \text{für alle } \vec{v} \in V.$$

Anschaulich erfüllen sowohl Drehungen als auch Spiegelungen diese Bedingung. Die Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Drehung des  $\mathbb{R}^3$  um die  $z$ -Achse haben wir bereits in den Aufgaben zum Kapitel über Matrizen kennen gelernt. Wir wollen nun zeigen, dass als Eigenwerte für orthogonale Abbildungen nur  $\lambda = \pm 1$  in Frage kommen:

Sei  $\lambda$  ein beliebiger Eigenwert einer orthogonalen Abbildungen  $L$  und sei  $\vec{v}$  zugehöriger Eigenvektor. Dann ist

$$\langle L\vec{v}, L\vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle,$$

also  $\lambda^2 = 1$ , bzw.  $\lambda = \pm 1$ .

Bei obiger Drehmatrix  $R$  wäre beispielsweise  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = +1$ . Andere reelle Eigenwerte hat  $R$  nicht.

Wir bemerken hier noch, dass eine Abbildung genau dann orthogonal ist, wenn sie linear und ihre Matrixdarstellung bezüglich einer Orthonormalbasis eine orthogonale Matrix ist. ◆

## 21.3 Berechnung der Eigenwerte

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die zu untersuchende lineare Abbildung durch eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  dargestellt wird. Die Eigenwertgleichung lautet dann

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

und ist ein lineares Gleichungssystem. Mit solchen kennen wir uns bereits bestens aus, ein wenig problematisch ist lediglich der Parameter  $\lambda$  in der Gleichung. Diesen gilt es zunächst zu ermitteln, ehe wir mit dem Gauß-Algorithmus Lösungsvektoren — in diesem Fall also Eigenvektoren — berechnen.

Für welche  $\lambda$  hat die Eigenwertgleichung Lösungen neben dem Nullvektor?

Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir die Eigenwertgleichung ein wenig um:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}.$$

(Im letzten Schritt musste die Einheitsmatrix  $E$  hinzugefügt werden, damit der Term innerhalb der Klammern definiert ist.)

Wir suchen also jene Parameter  $\lambda$ , für welche die Matrix  $(A - \lambda E)$  einen Kern hat, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Dies ist beispielsweise äquivalent zu  $\text{Rang}(A - \lambda E) < n$  oder auch — und damit können wir weiterarbeiten — zu

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Der Determinantenterm  $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$  wird *charakteristisches Polynom* genannt und ergibt ausgerechnet tatsächlich ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$ . Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms liefern also die Eigenwerte von  $A$ .

### Beispiel

Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det(A - \lambda E) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1.$$

Seine Nullstellen, und damit die Eigenwerte von  $A$ , sind  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . ◆

Koordinatentransformationen haben auf die Eigenwertberechnung keinen Einfluss, denn die charakteristischen Polynome der Matrizen  $A$  und  $B = SAS^{-1}$  sind gleich

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(SAS^{-1} - \lambda E) \\ &= \det(SAS^{-1} - \lambda SES^{-1}) \\ &= \det(S(A - \lambda E)S^{-1}) \\ &= \det S \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S^{-1} \\ &= \det(A - \lambda E) \\ &= P_A(\lambda) . \end{aligned}$$

Das sollte auch so sein, denn  $A$  und  $B = SAS^{-1}$  stellen schließlich die gleiche lineare Abbildung dar und Eigenwerte sind über die lineare Abbildung definiert.

Auch durch Transponieren der Matrix ändert sich das charakteristische Polynom nicht:

$$P_A(\lambda) = P_{A^T}(\lambda) .$$

## 21.4 Berechnung der Eigenvektoren

Ist ein Eigenwert  $\lambda$  gefunden, so berechnen sich die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}$  über

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0} .$$

### Beispiel

Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  haben wir im vorigen Beispiel die Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = \pm 1$  ermittelt. Für  $\lambda_1 = +1$  wollen wir noch den zugehörigen Eigenvektor berechnen. Aus dem Gleichungssystem  $(A - 1E)\vec{v} = \vec{0}$  wird mithilfe des Gauß-Algorithmus

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Die Lösungen haben die Form  $x = y$  oder  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , sodass der Lösungsraum also von einem Vektor aufgespannt wird. Als Eigenvektor erhalten wir  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bzw. alle Vielfachen davon. ◆

Die Dimension des Eigenraumes kann man bei quadratischen Matrizen sehr einfach anhand der Nullzeilen nach Anwendung des Gauß-Algorithmus ablesen,

denn jede Nullzeile bedeutet, dass ein Parameter frei gewählt werden kann, was wiederum unmittelbar zu einem (weiteren) Basisvektor führt. Somit ist die Anzahl der Nullzeilen gleich der Dimension des Eigenraumes. Eine Nullzeile bedeutet, dass der Lösungsraum, also der Eigenraum, eindimensional ist. Die geometrische Vielfachheit ist somit 1. Entstehen durch Anwendung des Gauß-Algorithmus  $k$  Nullzeilen, so gibt es auch  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren zum entsprechenden Eigenwert.

## 21.5 Vielfachheiten

Wir wissen bereits, dass Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig sind und dass es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert geben kann. Wünschenswert ist der Fall, dass wir eine ganze Basis finden, die nur aus Eigenvektoren besteht. In einem solchen Fall wäre die lineare Abbildung lediglich aus Skalierungen unterschiedlicher Stärke zusammengesetzt.

Wir werden nun etwas genauer untersuchen, was über die Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren ausgesagt werden kann.

Ist  $\lambda_0$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so kann letzteres — durch Ausklammern von  $(\lambda - \lambda_0)$  so oft wie möglich — in die Form

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$$

überführt werden.  $q(\lambda)$  ist dabei wieder ein Polynom, allerdings ohne  $\lambda_0$  als Nullstelle, sonst könnte  $(\lambda - \lambda_0)$  noch einmal ausgeklammert werden. Der auf diese Weise bestimmte Exponent  $k$  heißt *algebraische Vielfachheit* von  $\lambda$ . Sind auch komplexe Eigenwerte zugelassen, so kann jedes Polynom in lineare Faktoren zerlegt werden und die Summe aller Eigenwerte, entsprechend ihrer Vielfachheiten gezählt, ist genau  $n$ . Im Reellen können allenfalls quadratische Faktoren wie beispielsweise  $(\lambda^2 + 1)$  als nicht mehr weiter zu faktorisierende Reste übrig bleiben.

### Beispiel

Das charakteristische Polynom von  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ist

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Im Reellen ist dies nicht zu faktorisieren und es gibt keine Eigenwerte. Im Komplexen hingegen ist  $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$  und  $A$  hat die komplexen Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . ◆

Generell gilt, dass bei *reellwertigen* Matrizen komplexe Eigenwerte stets mit ihrem konjugiert komplexen Partner (in obigem Beispiel  $\pm i$ ) auftreten.

Weiter gibt es zu jedem Eigenwert mindestens einen linear unabhängigen Eigenvektor. Die Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren kann anhand der Nullzeilen nach Anwendung des Gauß-Algorithmus zur Eigenvektorberechnung abgelesen werden. Diese (bereits zuvor schon definierte) Zahl heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  und ist gemäß dem folgenden Satz beschränkt:

### Satz

Sei  $g$  die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes und  $k$  dessen algebraische Vielfachheit. Dann ist

$$1 \leq g \leq k .$$



Gibt es also  $n$  verschiedene Eigenwerte, so gibt es auch  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren, einen zu jedem Eigenwert. Insgesamt ergibt das also eine Basis des Ausgangsvektorraumes aus Eigenvektoren.

Für Eigenwerte  $\lambda$  mit algebraischer Vielfachheit  $k > 1$  können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Der Gauß-Algorithmus liefert  $k$  Nullzeilen und somit auch  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann ist der  $k$ -fache Eigenwert  $\lambda$  „so gut wie“  $k$  verschiedene Eigenwerte.
2. Die Eigenwertgleichung liefert zu  $\lambda$  weniger als  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren. Diesen Fall betrachten wir im nächsten Abschnitt genauer.

### Beispiel

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 .$$

Also ist  $\lambda = 2$  ein zweifacher Eigenwert (algebraische Vielfachheit ist 2). Aber

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nur eine Nullzeile. Deshalb gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zu  $\lambda = 2$ , nämlich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  oder Vielfache davon. ◆

## 21.6 Hauptvektoren

Ist für einen Eigenwert die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische, so wird es keine Basis aus Eigenvektoren geben. Allerdings können sie durch Hinzunahme anderer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden. Die fehlenden Eigenvektoren müssen durch andere Vektoren ersetzt werden. Solche „Ersatzvektoren“ finden wir, indem wir die Eigenwertgleichung verallgemeinern, wie im Folgenden beschrieben.

Jeder Eigenvektor  $\vec{v}$  von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  erfüllt nicht nur die Eigenwertgleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0},$$

sondern damit erst recht die Gleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{Hauptvektorgleichung}),$$

wobei  $k$  die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  ist. Lösungen der Hauptvektorgleichung heißen *Hauptvektoren*. Ein Eigenvektor  $\vec{v}$  wird bereits bei Exponent 1 von  $(A - \lambda E)$  auf den Nullvektor abgebildet, also auch für  $k > 1$ , denn

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = (A - \lambda E)^{k-1} (A - \lambda E) \vec{v} = (A - \lambda E)^{k-1} \vec{0} = \vec{0}.$$

Somit sind Eigenvektoren unter anderem Hauptvektoren (oder Hauptvektoren eine Verallgemeinerung von Eigenvektoren). Des Weiteren kann es aber noch Lösungen der Hauptvektorgleichung geben, die nicht Eigenvektoren sind. Der folgende Satz gibt uns darüber Gewissheit, dass es — zumindest im Komplexen — stets eine Basis aus Hauptvektoren gibt.

### Satz

Zu einer  $k$ -fachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms existieren genau  $k$  linear unabhängige Hauptvektoren. Diese sind allesamt Lösungen der Hauptvektorgleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = \vec{0}.$$

■

Die Berechnung einer Basis aus Hauptvektoren geschieht folgendermaßen: Für jeden Eigenwert  $\lambda$  berechnen wir die Eigenvektoren mithilfe der Eigenwertgleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}.$$

Ist die algebraische Vielfachheit  $k$  von  $\lambda$  größer als die geometrische, heben wir den Exponenten von  $(A - \lambda E)$  um eins an und lösen das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)^2 \vec{v} = \vec{0}.$$

Neben den bereits gefundenen Eigenvektoren kann es hierzu weitere Hauptvektoren geben. Dies ist dann der Fall, wenn die Anzahl der Nullzeilen nach Anwendung des Gauß-Algorithmus im Vergleich zum vorigen Gleichungssystem (mit Exponent 1) angestiegen ist. Für jede hinzugekommene Nullzeile können wir unsere Basis um einen Hauptvektor ergänzen, wobei wir lediglich beachten müssen, dass sie mit den bisherigen Basisvektoren linear unabhängig sind. Insgesamt benötigen wir zum Eigenwert  $\lambda$  so viele Basisvektoren wie die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  beträgt. Haben wir noch nicht genug, erhöhen wir den Exponenten von  $(A - \lambda E)$  weiter und lösen nacheinander

$$(A - \lambda E)^l \vec{v} = \vec{0},$$

für  $l = 3, 4, \dots, k$ , bis wir genug Hauptvektoren für die Basis gefunden haben. Obiger Satz gibt uns dabei die Versicherung, dass wir bis zum Exponenten  $k$  fündig werden sollten.

### Beispiel

Wir wollen die Eigen- und Hauptvektoren der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnen:

Das charakteristische Polynom ist  $(2 - \lambda)^3$ , womit wir mit  $\lambda = 2$  einen dreifachen Eigenwert vorliegen haben. Zur Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren benötigen wir nicht einmal den Gauß-Algorithmus:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

führt zu einem linear unabhängigen Eigenvektor, nämlich, mit der Wahl  $x = 1$ , zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Für die Hauptvektoren bilden wir das Quadrat von  $A - 2E$ :

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

liefert uns sämtliche Linearkombinationen von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als mögliche Hauptvektoren.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  haben wir aber schon als Eigenvektor identifiziert, womit  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als ein gesuchter Hauptvektor bleibt. Wir brauchen insgesamt drei linear unabhängige Eigen- und Hauptvektoren (da 2 ein dreifacher Eigenwert

ist), also müssen wir noch  $(A - 2E)^3$  berechnen:

$$(A-2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hier ist jeder Vektor eine Lösung, linear unabhängig zu den bisherigen zweien ist beispielsweise  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Somit besteht also die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  aus Eigen- und Hauptvektoren von  $M$ . ◆

## 21.7 Diagonalisierbarkeit

Wie sieht aber nun der günstige Fall aus, in dem es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, und welche Vorteile liefert dies?

Dazu sei kurz an das Kapitel zur Koordinaten- und Basistransformation erinnert. Dort haben wir erkannt, dass eine Matrix eine lineare Abbildung immer bezüglich einer gewählten Basis darstellt. Ein und dieselbe lineare Abbildung kann durch unterschiedliche Matrizen repräsentiert werden, indem wir die zugrunde liegende Basis wechseln.

Ist die betrachtete Basis ausschließlich aus Eigenvektoren aufgebaut, hat die Matrix eine besonders einfache Gestalt, nämlich

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

eine *Diagonalmatrix*. Die Eigenwerte stehen dabei auf der Diagonalen und zwar mit der Häufigkeit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Dem Eigenvektor  $\vec{v}_k$ , welchen wir als  $k$ -ten Basisvektor gewählt haben, entspricht bzgl. der Eigenvektorbasis der Koordinatenvektor  $\vec{e}_k$ . Der Koordinatenvektor wird durch die Diagonalmatrix auf den Koordinatenvektor

$$D\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$$

abgebildet, welcher dem Vektor  $\lambda_k \vec{v}_k$  entspricht. Somit ist trotz des zwischenzeitlichen Basiswechsels immer noch die Eigenvektoreigenschaft erfüllt und das für die gesamte Basis.

Einige offensichtliche Vorteile von Diagonalmatrizen bestehen darin, dass Multiplikation, Addition und Determinantenbildung sehr einfach sind. Leider ist eine Diagonalisierung aber nicht immer möglich, immerhin wird eine Basis aus Eigenvektoren benötigt und die gibt es, wie wir gelernt haben, nicht immer.

**Definition** (diagonalisierbar)

Eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  heißt diagonalisierbar, falls ein invertierbares  $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$  existiert, sodass die Matrix

$$D = SAS^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist. (Offenbar ist dann umgekehrt  $A = S^{-1}DS$ .) ◀

Diese Definition mag etwas kompliziert erscheinen, sie entspricht aber lediglich der Existenz einer Basistransformation wie oben beschrieben.

Ist die betrachtete Matrix  $A$  bereits diagonal, können  $S$  und  $S^{-1}$  als Einheitsmatrix gewählt werden. Dann ist  $D = A$  und die Bedingung in der Definition erfüllt. Somit sind diagonale Matrizen diagonalisierbar – dies war natürlich zu erwarten, jedoch aus der Definition nicht ganz offensichtlich.

Um eine Diagonalisierung durchzuführen, benötigen wir die Transformationsmatrizen.  $S^{-1}$  setzt sich dabei aus der neuen Basis — aufgefasst als Spaltenvektoren — zusammen und  $S$  ist die Inverse von  $S^{-1}$ . Dazu sehen wir uns noch einmal das entsprechende Diagramm aus dem Kapitel über Basistransformationen an:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n & \\ & \nearrow^{S^{-1}} & & \searrow^S & \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{D} & & \mathbb{K}^n & \end{array}$$

Starten wir mit  $\vec{e}_k$  — das entspricht dem Koordinatenvektor des  $k$ -ten Eigenvektors bzgl. der Eigenvektorbasis — unten links und folgen dem oberen Diagrammverlauf, so wird dieser Vektor zunächst durch  $S^{-1}$  auf die  $k$ -te Spalte von  $S^{-1}$ , also auf den  $k$ -ten Eigenvektor  $\vec{v}_k$ , abgebildet.  $\vec{v}_k$  wird weiter von  $A$  auf  $\lambda_k \vec{v}_k$  abgebildet und jener Vektor durch  $S$  auf  $\lambda_k \vec{e}_k$  — was wiederum dem Koordinatenvektor von  $\lambda_k \vec{v}_k$  bzgl. der Eigenvektorbasis entspricht. Entlang des kürzeren, unteren Weges wird  $\vec{e}_k$  einfach durch die Diagonalmatrix  $D$  auf  $\lambda_k \vec{e}_k$  abgebildet und wir gelangen zum gleichen Ergebnis.

**Beispiel**

Wir führen das Beispiel aus dem Abschnitt zur Berechnung von Eigenvektoren fort. Dort hatten wir  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  als Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  von  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  berechnet.  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = -1$ . Somit hätten wir eine Basis aus Eigenvektoren. Diese schreiben wir als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und nach kurzer Invertierung

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} SAS^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bitte überlegen Sie, zu welchem Ergebnis wir gekommen wären, hätten wir die Spalten von  $S^{-1}$  vertauscht. Kehrt sich in der Diagonalmatrix ebenfalls die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonalen um oder hebt sich der Effekt auf, weil sich mit  $S^{-1}$  auch  $S$  ändert? ◆

Wir wollen noch auf eine Besonderheit von symmetrischen bzw. selbstadjungierten Matrizen in Bezug auf Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit eingehen.

### Satz

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix (d. h.  $A = A^T$ ) bzw.  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  eine selbstadjungierte Matrix (d. h.  $A = A^* := \overline{A^T}$ ). Dann gibt es im  $\mathbb{R}^n$  eine ONB aus Eigenvektoren von  $A$  bzw.  $B$ . Ferner sind alle Eigenwerte reell. ■

Symmetrische bzw. selbstadjungierte Matrizen sind somit nicht nur diagonalisierbar, die Eigenräume liegen bezüglich des Standardskalarproduktes des  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^n$  sogar noch senkrecht zueinander. Nach den letzten Überlegungen können wir Kriterien für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix zusammenfassen.

### Satz

Eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Dies ist unter anderem der Fall, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $A$  hat  $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte,
  2.  $A = A^T$  (symmetrisch),
  3.  $A = A^* := \overline{A^T}$  (selbstadjungiert).
- 

Dies sind allerdings nur hinreichende Bedingungen. Ist keiner der drei Punkte erfüllt, kann die Matrix dennoch diagonalisierbar sein — oder auch nicht.

### 21.7.1 Diagonalisierung am Beispiel

Sei die zu diagonalisierende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

**Bestimmen der Eigenwerte:** Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 .$$

Nullstellen — und somit Eigenwerte von  $A$  — sind  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$ , also  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Die algebraischen Vielfachheiten sind jeweils 1. Zu erwarten ist damit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

als Diagonalmatrix.

**Berechnen der Eigenvektoren:**

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 E &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) , \end{aligned}$$

also ist  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zu  $\lambda_1$ .

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) , \end{aligned}$$

also ist  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zu  $\lambda_2$ .

**Koordinatentransformation:** Die beiden Eigenvektoren ergeben, als Spaltenvektoren geschrieben, die Transformationsmatrix

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Deren inverse Matrix ist

$$S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich ergibt die Transformation

$$\begin{aligned} D &= SAS^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 21.8 Aufgaben

1. (a) Bestimmen Sie von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte mitsamt deren algebraischen Vielfachheiten.

- (b) Welche Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren können direkt aus den folgenden Matrizen abgelesen werden? Bei welchen Eigenwerten könnte es neben zugehörigen Eigenvektoren noch Hauptvektoren geben?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte mit deren zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Wir haben bereits die Ableitungsabbildung  $f \mapsto f'$  als lineare Abbildung auf dem Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen kennen gelernt. Finden Sie ein Beispiel für einen Eigenvektor (oder besser „Eigenfunktion“) dieser Abbildung.

4. Berechnen Sie folgende Matrixprodukte

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

5. (a) Diagonalisieren Sie, falls möglich, folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie in den entsprechenden Fällen das Produkt  $D = SAS^{-1}$ .

- (b) Welche der folgenden Matrizen können bereits durch bloßes Hinsehen als diagonalisierbar eingeordnet werden?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Wahl.

6. Bestimmen Sie alle reellen Werte  $\alpha$ , für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

## 21.9 Lösungen

1. (a)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 7, \end{aligned}$$

somit hat  $A$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = -\sqrt{7}$  und  $\lambda_2 = +\sqrt{7}$ , jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = (-3 - \lambda)\lambda(\lambda - 3), \end{aligned}$$

also hat  $B$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 0$  und  $\lambda_3 = 3$ , ebenfalls mit algebraischer Vielfachheit 1.

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = (2 - \lambda)^2(2 + \lambda), \end{aligned}$$

die Eigenwerte von  $C$  sind demnach  $\lambda_{1,2} = 2$  mit algebraischer Vielfachheit 2 sowie  $\lambda_3 = -2$  mit algebraischer Vielfachheit 1.

(b) Die Matrizen  $A$  und  $B$  sind untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Bei diesen stehen die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen. Die Häufigkeit, mit der diese Werte dort stehen, gibt die algebraische Vielfachheit an.

- Somit hat die Matrix  $A$  lediglich den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Weiterhin ist der Standardbasisvektor  $e_2$  ein Eigenvektor, da in der zweiten Matrixspalte alle Nichtdiagonalelemente Null sind. Über die Existenz eines zweiten, zu  $e_2$  linear unabhängigen Eigenvektors können wir ohne weitere Untersuchungen noch nichts sagen. Es könnte also noch einen Hauptvektor geben.
- Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte 1,  $-3$  und 2, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Mit dem gleichen Argument wie bei  $A$  können wir den Standardbasisvektor  $e_1$  als Eigenvektor zum Eigenwert 1 identifizieren. Andere Eigenvektoren kennen wir noch nicht. Allerdings gibt es ja zu jedem Eigenwert mindestens einen (linear unabhängigen) Eigenvektor. Es kann aber auch nicht mehr als einen geben, da die algebraische Vielfachheit 1 ist. Hauptvektoren, die keine Eigenvektoren sind, gibt es somit für  $B$  nicht.
- $C$  ist keine Dreiecksmatrix. Konzentrieren wir uns also zunächst auf die zweite und vierte Spalte. Dort sind wiederum alle Einträge bis auf die Diagonaleinträge Null, wonach die Standardbasisvektoren  $e_2$  und  $e_4$  Eigenvektoren sind, jeweils zum Eigenwert  $-2$ . Dieser Eigenwert hat also mindestens eine algebraische Vielfachheit von 2. Weiterhin gibt es noch eine komplette Nullzeile,  $C$  hat also nicht vollen Rang. Anders ausgedrückt ist der Kern von  $C$  mindestens eindimensional, es gibt also neben dem Nullvektor noch weitere Vektoren  $\vec{v}$ , die auf den Nullvektor, also auf  $0 \cdot \vec{v}$  abgebildet werden. 0 ist somit ein weiterer Eigenwert und  $\vec{v}$  dessen Eigenvektor. Die algebraische Vielfachheit ist mindestens 1. Über den vierten Eigenwert können wir nichts aussagen. Wäre er 0 oder  $-2$ , so wäre die entsprechende algebraische Vielfachheit um 1 größer als oben angegeben und es könnte sogar noch einen Hauptvektor geben.

2. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) + \underbrace{2 - (3 - \lambda)}_{-(1-\lambda)} - (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1 - \lambda)^2(4 - \lambda). \end{aligned}$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 4 mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Mit der Wahl  $z = 1$  erhalten wir als Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnung der ein bis zwei linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Da es nur eine Nullzeile gibt, werden wir auch nur einen linear unabhängigen Eigenvektor finden, nämlich mit  $z = 2$  den Eigenvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Als Letztes muss noch der Hauptvektor zum Eigenwert 1 bestimmt werden. Dazu lösen wir das Gleichungssystem  $(A - 1E)^2 \vec{w} = \vec{0}$ :

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Mit der Wahl  $z = 1$  ist ein zu  $\vec{v}$  linear unabhängiger Hauptvektor gegeben durch  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Beliebige Linearkombinationen von  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind ebenfalls Hauptvektoren zum Eigenwert 1.

Insgesamt bilden die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis aus Hauptvektoren.

3. Ein Eigenvektor wird auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet. Wir suchen also eine Funktion  $f$ , deren Ableitung ein Vielfaches der Funktion selbst ist:  $f' = \lambda f$ . Ein solches Beispiel liefert die Exponentialfunktion, denn dafür gilt

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

Somit ist bzgl. der Ableitungsabbildung die Funktion  $f(x) = e^{\lambda x}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

4. Multiplikation von links entspricht einer zeilenweisen Multiplikation mit den Diagonalelementen:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{pmatrix}.$$

Multiplikation von rechts entspricht einer spaltenweisen Multiplikation mit den Diagonalelementen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}.$$

5. (a)A) Das charakteristische Polynom von  $A$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

liefert den Eigenwert  $\lambda_{1,2} = 2$  mit algebraischer Vielfachheit 2. Doch

$$A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich Rang 1 und damit gibt es zu diesem Eigenwert nur einen linear unabhängigen Eigenvektor. Zur Diagonalisierbarkeit bräuchten wir allerdings zwei linear unabhängige Eigenvektoren (eine Basis).

- B) Das charakteristische Polynom von  $B$

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

liefert die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$ , jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Demnach ist  $B$  diagonalisierbar, zu jedem Eigenwert gibt es ja mindestens einen Eigenvektor und bei zwei Eigenwerten liefert uns das bereits eine Basis. Wir wissen auch schon, dass die Diagonalmatrix die Gestalt  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  haben wird (je nach der Reihenfolge der Eigenvektoren in den Spalten von  $S$ ), wollen dies zur Übung aber noch genauer berechnen. Den Eigenvektor  $\vec{v}_1$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}.$$

Somit ist  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor. Der Eigenvektor  $\vec{v}_2$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = 2$  ist Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0},$$

also  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Beide Eigenvektoren, als Spaltenvektoren aufgefasst, ergeben die Matrix  $S^{-1}$ , woraus wir durch Invertieren die Matrix  $S$  berechnen

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Diagonalmatrix ergibt sich durch folgendes Produkt

$$D = SBS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

C) Das charakteristische Polynom von  $C$

$$\det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

liefert die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = +1$ . Demnach ist auch  $C$  diagonalisierbar und die Diagonalmatrix hat die Gestalt  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Der Eigenwert  $\lambda_1 = -1$  hat den Eigenvektor  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , der Eigenwert  $\lambda_2 = 1$  hat den Eigenvektor  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Somit ergeben sich

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und als Diagonalmatrix

$$D = SCS^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)  $A$  und  $\tilde{A}$  müssen nicht diagonalisierbar sein, es könnte nämlich zum doppelten Eigenwert 1 bzw. 2 ein Hauptvektor existieren.

$B$  hat zwei verschiedene Eigenwerte (1 und 2),  $\tilde{B}$  drei verschiedene (2, 3 und 4), jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Demnach gibt es keine Hauptvektoren; die beiden Matrizen sind diagonalisierbar.

$C$  und  $\tilde{C}$  sind reellwertige, symmetrische Matrizen. Diese haben stets eine Basis aus Eigenvektoren und sind somit diagonalisierbar.

6. Da  $A$  eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 direkt von der Diagonalen von  $A$  ablesen. Damit  $A$  diagonalisierbar ist, muss es zu diesem Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenvektoren geben. Das bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem  $(A - 1 \cdot E)\vec{v} = \vec{0}$  einen zweidimensionalen Lösungsraum hat, also jeder Vektor  $\vec{v}$  des  $\mathbb{R}^2$  auf den Nullvektor abgebildet wird. Demnach muss  $(A - 1 \cdot E)$  bereits die Nullmatrix sein. Somit ist nur für  $\alpha = 0$  die Matrix  $A$  diagonalisierbar bzw.  $A$  liegt dann bereits in Diagonalgestalt vor.

### Fragen

- Wie lautet die Eigenwertgleichung?
- Wie wird das charakteristische Polynom berechnet und woher kommt die dazu verwendete Gleichung?
- Wie berechnet man den Eigenraum zu einem Eigenwert?
- Was ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes?
- Lässt sich ein Beispiel angeben, für das die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes größer ist als die algebraische?
- Wie werden Hauptvektoren berechnet?
- Erklären Sie das Diagonalisieren mit der Hilfe eines Diagramms.
- Unter welchen Voraussetzungen ist eine quadratische Matrix diagonalisierbar?



# 22 Differenzialgleichungen

## 22.1 Motivation

Differenzialgleichungen sind von großer Bedeutung, um die verschiedensten Vorgänge in Natur und Technik zu beschreiben. Dazu gehören

- Schwingungen und Wellen,
- Diffusionsprozesse,
- Wachstumsprozesse,
- Wärmeleitungsvorgänge,
- Strömungsphänomene
- und vieles mehr.

Eigentlich ist das tatsächlich Motivation genug. Diese besonderen Gleichungen zeichnen sich allgemein dadurch aus, dass neben einer Funktion selbst auch ihre Ableitungen (oder nur diese) auftreten.

Wir haben gesehen, dass sich hinter dem Differenzieren eine lineare Abbildung verbirgt. Dies bedeutet dann aber auch, dass die Strukturen der Linearen Algebra erneut auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen auftauchen müssen und genau das machen sie. Wir werden sehen, dass die Struktur der Lösungsmenge einer Differenzialgleichung der von linearen Gleichungssystemen entspricht. Verschiedene Akteure — Analysis und Lineare Algebra — treten also auf die Bühne der Mathematik und spielen das gleiche Stück; wunderbar!

Die ganze Tragweite der Theorie der Differenzialgleichungen in den Anwendungen wird sicher erst klar, wenn Sie die speziellen Veranstaltungen Ihres Studienganges besuchen, in denen physikalische oder z. B. wirtschaftstheoretische Themen behandelt werden. Auch die gesonderten Kurse zu Differenzialgleichungen

enthalten zumeist viel über die Anwendungen, denn wichtige Beispiele entstammen einfach aus dem Studium der Natur. Viele Teile der Mathematik fließen dann bei der theoretischen Behandlung der Differenzialgleichungen zusammen, denn sie repräsentieren unwegsames Gelände, für dessen Durchquerung teils schwerstes Gerät verwendet werden muss. Dafür gibt es jedoch spezielle Vorlesungen und auch Computeralgebrasysteme können helfen.

Vor dem Behandeln der Grundlagen wollen wir allerdings dennoch andeutend klären, woher der Zusammenhang zur Natur (aber auch Technik) kommt. Es zeugt wohl nicht von einem Hang zur Übertreibung, wenn wir die Zeit als zentrale Größe betrachten, deren Fortschreiten die wesentlichen Phänomene überhaupt erst erfahrbar macht. Haben wir eine Funktion  $y(t)$ , die von der Zeit abhängt und einen Vorgang in der Natur beschreibt, können wir für alle Zeiten  $t$  voraussagen bzw. zurückrechnen, was passiert (ist), sofern  $y(t)$  für diese  $t$  definiert ist. Die Natur liefert uns aber nur in den seltensten Fällen direkt Informationen über die Abläufe in ihr. Das meiste teilt sie uns über Änderungen in der Zeit mit. So zerfällt radioaktives Material im Laufe der Zeit und ein Fadenpendel ändert seine Lage und Geschwindigkeit. Änderungen werden nun aber gerade durch die Ableitung einer Funktion ausgedrückt. Hier müssen wir also nach der Variablen  $t$  ableiten, was mit  $\frac{dy}{dt}(t)$  bezeichnet wird, wofür dann meist kurz  $\dot{y}(t)$  geschrieben wird, sofern  $t$  wirklich als Zeit verstanden wird. Auch höhere Ableitungen können auftreten. So ist für eine den Ort in Abhängigkeit von der Zeit beschreibende Funktion  $x(t)$  der Ausdruck  $\dot{x}(t)$  die Änderung des Ortes, also die Geschwindigkeit.  $\ddot{x}(t)$  ist die Änderung der Änderung des Ortes, also die Änderung der Geschwindigkeit, die dann als Beschleunigung bekannt ist. So wusste bereits Newton, dass für die Kraft  $F$  und die Masse  $m$  eines Probeteilchens die Gleichung  $F(t) = m\ddot{x}(t)$  gilt; eine einfache Differenzialgleichung.

Natürlich gibt es auch Funktionen, die von mehr Variablen als einer (z. B. derjenigen der Zeit) abhängen. Überlegungen zu dieser Thematik überlassen wir allerdings anderen Kursen.

Unser Ansatz hier ist besonders pragmatisch, denn gerade Anfängern auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen hilft es mehr, wenn die Methoden am Beispiel gesehen werden.

## 22.2 Grundlagen

Wir werden hier mit einem allgemein formulierten Fall gewöhnlicher linearer Differenzialgleichungen beginnen. Dies dient dazu, diesen Typ in Zukunft sofort zu erkennen. Das ist wichtig, denn nur bei solchen Differenzialgleichungen greifen unsere Lösungsmethoden. Andere Typen sind meist deutlich komplizierter. Beim ersten Teil der Definition werden wir bereits bekannte Elemente

der Linearen Algebra verwenden, um eine kompakte Formulierung zu ermöglichen. Bitte beachten Sie, dass bei der Definition unsere  $y$  — und auch deren Ableitungen — nirgends mit Potenzen ungleich 1 versehen sind oder gar der Sinus oder ähnliches auf sie wirkt. Sie sind in gewisser Weise nackt. Das macht die Linearität aus. Lassen sie sich nicht von Termen der Art  $y^{(k)}$  irritieren. Dies ist nichts weiter als die bereits in der Analysis behandelte  $k$ -te Ableitung der entsprechenden Funktion.

Bitte beachten Sie, dass wir im weiteren Text für die gesuchte Funktion mal  $y(t)$ ,  $y(x)$  oder z. B. auch  $x(t)$  verwenden. Alle möglichen anderen Bezeichnungen sind natürlich auch möglich und werden in der Literatur je nach Bedarf, Lust und Laune verwendet. Wichtig ist jedoch: Unsere Funktionen hängen stets nur von *einer* Variablen ab.

Nachfolgend werden wir die Abkürzung DGL für Differentialgleichung verwenden.

**Definition** (DGL, Differentialgleichungssystem, homogen, Inhomogenität, Koeffizienten)

Sei  $A(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine  $(n \times n)$ -Matrix mit Einträgen aus  $\mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\dot{\vec{y}} = \frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t),$$

also

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung,  $\vec{b}(t)$  ist die Inhomogenität und  $A(t)$  (bestehend aus reellen Funktionen) wird Koeffizientenmatrix genannt. Ferner heißt

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = b(t) \quad (22.1)$$

gewöhnliche lineare DGL  $n$ -ter Ordnung. Ist  $\vec{b}$  überall  $\vec{0}$  bzw.  $b$  überall 0, so heißt das System bzw. die DGL homogen. Die reellen Funktionen  $a_1(t), \dots, a_n(t)$  heißen Koeffizienten. ◀

Die Ableitung eines Vektors (also hier die Ableitung von  $\vec{y}(t)$ ) ist so definiert, dass einfach alle seine Komponenten abgeleitet werden — wir werden dies bald in einem Beispiel sehen. Für höhere Ableitungen ist dies analog definiert.

Eine DGL der zuletzt genannten Form lässt sich stets in ein System wie im ersten Teil der Definition umschreiben, d. h. ein zu 22.1 gehörendes System

können wir immer untersuchen, wenn uns dies lieber ist. Wir werden allerdings primär 22.1 selbst betrachten und das zugehörige System erster Ordnung nur aus theoretischen Gründen. Bitte beachten Sie, wo das  $n$  vorkommt: Aus der DGL  $n$ -ter Ordnung wird ein System erster Ordnung mit  $n$ -Zeilen! Es geht also weder etwas verloren, noch kommt etwas dazu.

Natürlich kommen, z. B. in der Regelungstechnik, Systeme von DGLen erster Ordnung auch direkt vor.

## 22.3 Umschreiben in ein System am Beispiel

Wir haben bereits erwähnt, dass sich lineare gewöhnliche DGLen  $n$ -ter Ordnung in ein System erster Ordnung umschreiben lassen. Wir wollen dies hier an einem Beispiel durchführen, denn die vermittelte Grundidee ist so besonders gut erkennbar und lässt sich auf Differenzialgleichungen höherer Ordnung ohne jegliche Probleme verallgemeinern. Wer das Prinzip verstanden hat, wird mit dem Verallgemeinern keine Probleme mehr haben.

### Beispiel

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und sei als Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$

gegeben. Schreiben wir nun  $x =: y_1$  und  $\dot{x} =: y_2$  als die Komponenten eines Vektors

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

und leiten diesen ab, so erhalten wir

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -a\dot{x} - bx \end{pmatrix}.$$

Dies formen wir weiter so um, dass ein Differenzialgleichungssystem für  $\vec{y}$  entsteht

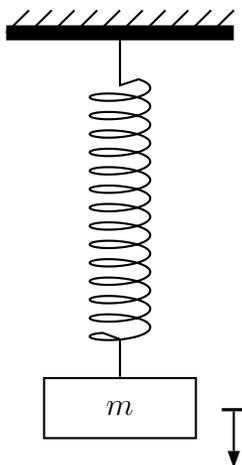
$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -ay_2 - by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\vec{y}.$$



Nach diesem Muster wird das immer gemacht.

Die hier behandelte DGL ist nicht einfach ausgedacht, sie hat eine tiefere Bedeutung. DGLen wie diese, also zweiter Ordnung, beschreiben Schwingungsphänomene. Ferner ist erkennbar, dass sie einen Term ohne Ableitung, einen mit

erster Ableitung und einen mit zweiter Ableitung enthält, jeweils mit einem konstanten Faktor davor, der bei  $\ddot{x}(t)$  einfach 1 ist. Nach dem, was wir bereits in der Motivation gesehen haben, sind also in dieser DGL Beschleunigung ( $\ddot{x}(t)$ ), Geschwindigkeit ( $\dot{x}(t)$ ) und Ort ( $x(t)$ ) enthalten. Dies passt z. B. sehr gut auf ein Federpendel, bei dem gerade diese Größen bestimmend sind: Die Masse am Ende eines Federpendels wird nämlich beschleunigt, hat eine bestimmte Geschwindigkeit und der Ort wird durch die jeweilige Auslenkung beschrieben.



Wundern Sie sich darüber, dass die Masse,  $m$  genannt, gar nicht in der Gleichung vorkommt? Sie ist aber doch da, wenn auch verborgen. Wir hätten nämlich auch

$$m\ddot{x}(t) + \tilde{a}\dot{x}(t) + \tilde{b}x(t) = 0$$

für obige DGL schreiben können, woraus dann nach dem Teilen durch  $m \neq 0$  die obige Gleichung entsteht mit  $a = \frac{\tilde{a}}{m}$  und  $b = \frac{\tilde{b}}{m}$ . Nach unserer Definition am Anfang dieses Kapitels wollten wir aber vor der höchsten Ableitung eine 1 haben. Wenn nicht, so haben wir hier gesehen, passiert auch nichts Schlimmes, wir können ja ohne Probleme die gesamte DGL durch den Faktor vor der höchsten Ableitung teilen und haben dann die gewünschte Form.

## 22.4 Einige Fragestellungen und erste Antworten

Nachdem sich die DGLen nun erstmals in Ihr Leben gedrängt haben und Sie auch wissen, wozu diese gut sind, wollen wir nun einige Fragen aufwerfen, die eigentlich zwingend sind. Dies insbesondere, wenn wir an die DGLen als Beschreibung von Vorgängen in Natur und Technik denken. (Dabei sei bemerkt,

dass in innermathematischen Problemen auch wahrlich furchtbare DGLen auftauchen können.)

Wir stehen vor folgenden wesentlichen Fragen:

- Wie ist die Beschreibung eines Vorgangs durch eine DGL bzw. ein System? (Diese Beschreibung steht ganz am Anfang und ist die wesentliche Vorleistung des Intellekts.)
- Existieren überhaupt Lösungen?
- Unter welchen Voraussetzungen sind diese Lösungen eindeutig?
- Welche Eigenschaften haben die Lösungen?

Wir werden, zumindest für den Typ der gewöhnlichen linearen DGLen, einige Antworten geben, wenn diese auch zumeist nicht durch einen Beweis begründet werden. Wir formulieren nun wesentliche Resultate in einem Satz. Um die Vertrautheit mit allen Formulierungen gewöhnlicher linearer Differenzialgleichungen zu fördern, wird der Satz unter Verwendung von Differenzialgleichungssystemen aufgeschrieben. Wir erinnern uns, dass sich jede Differenzialgleichung  $n$ -ter Ordnung als System aus  $n$  Gleichungen erster Ordnung schreiben lässt.

### Satz

Der Lösungsraum des homogenen Differenzialgleichungssystems

$$\dot{\vec{y}} = A(t)\vec{y} \quad , \quad A(t) \in M(n \times n, \mathbb{R}) \text{ (nicht die Nullmatrix)}$$

ist ein Vektorraum der Dimension  $n$ , d. h.

- Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen;
- es gibt  $n$  linear unabhängige Lösungen;
- sind  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  linear unabhängige Lösungen, so hat jede weitere Lösung die Gestalt  $c_1\vec{y}_1 + \dots + c_n\vec{y}_n$  (mit Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  aus  $\mathbb{K}$ ).



Die Vektoren  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  bilden eine so genannte *Lösungsbasis* (auch *Fundamentalsystem* genannt). Wir betonen, dass sich nichts ändert, wenn wir anstatt des Systems direkt die DGL der Ordnung  $n$  betrachten, die zu dem System geführt hat. Es kommen dann einfach keine Vektoren mehr vor und wir haben  $n$  linear unabhängige  $y_1, \dots, y_n$ . Wenn wir demnach mal mehr oder weniger linear unabhängige Lösungen finden als es durch die Ordnung der DGL garantiert

wird, haben wir mit Sicherheit etwas falsch gemacht oder übersehen! Über die bereits mehrfach erwähnte lineare Unabhängigkeit von Funktionen informiert uns später der so genannte *Wronski-Test*.

## 22.5 Lösen durch Integration

Wir betrachten ein — bedeutendes aber zugleich einfaches — Beispiel. Es repräsentiert die Art gewöhnlicher DGLen, welche sich durch Integration lösen lassen. Das ist so ziemlich das Beste, was uns passieren kann.

### Beispiel

Wir betrachten  $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$  (Newton im einfachen Fall) bzw.  $\ddot{x} = \frac{F}{m}$  in der bisher verwendeten Schreibweise für DGLen. Wir nehmen an, dass  $F$  und  $m$  zeitlich konstant sind. Durch Integration erhalten wir

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + v_0 .$$

Eine weitere Integration liefert

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + v_0t + x_0 .$$

Es klappt somit alles ganz einfach, wenn nur die Funktion, mit welcher Ableitung auch immer, isoliert vorkommt. Sie sehen an der Rechnung oben, dass die Integration unbestimmt ist. Klar, wir haben ja keine Grenzen gegeben. Dadurch taucht allerdings stets eine Integrationskonstante auf, die wohl beachtet werden muss. Wird diese vergessen, leidet auch der physikalische Inhalt gewaltig. So haben wir nach der ersten Integration  $v_0$  für die Anfangsgeschwindigkeit und im nächsten Schritt  $x_0$  für den Ort, um zu berücksichtigen, dass sich unser Probeteilchen der Masse  $m$  an einem beliebigen Ort befinden kann. Ohne diese Integrationskonstanten wäre die Beschreibung einer möglichen Realität also unvollständig. Sie sehen daher, wie gut die Mathematik über die Realität Bescheid weiß. ◆

## 22.6 Standardlösungsansatz I

Wir betrachten nun *die* Lösungsmethode für gewöhnliche, lineare DGLen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche homogen sind. Wenn wir von konstanten Koeffizienten sprechen meinen wir damit stets, dass die  $a_i(t)$  konstant sind, also gleich einer Zahl  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Dies zeigen wir beispielhaft für eine DGL dritter Ordnung

$$y'''(x) + a_1y''(x) + a_2y'(x) + a_3y(x) = 0 ,$$

allerdings ist das Verfahren für alle Ordnungen  $n \in \mathbb{N}$  gleich. Als Ansatz verwenden wir den so genannten *Exponentialansatz*

$$y(x) = e^{\lambda x} , \quad \lambda \in \mathbb{C} .$$

Dieser, in die DGL eingesetzt, liefert

$$\lambda^3 e^{\lambda x} + a_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_2 \lambda e^{\lambda x} + a_3 e^{\lambda x} = 0 .$$

Nach Division durch  $e^{\lambda x}$  — dies ist erlaubt, da  $e^{\lambda x}$  nie Null werden kann — erhalten wir das so genannte *charakteristische Polynom* der DGL auf der linken Seite:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 .$$

Im Komplexen hat ein Polynom 3. Grades genau drei Nullstellen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ . Lösungen der betrachteten DGL sind demnach

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} , \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} , \quad y_3 = e^{\lambda_3 x} .$$

Setzen wir also eine der Funktionen in die DGL ein, bekommen wir auf der rechten Seite tatsächlich Null als Ergebnis. Die auf diese Weise erhaltenen Funktionen sind sogar linear unabhängig, solange die  $\lambda_i$  verschieden sind. Zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit von Funktionen brauchen wir keine neue Theorie, denn die von uns betrachteten Funktionen sind stets wieder Elemente eines Vektorraumes und alles bleibt wie gehabt.

Die Bezeichnung *charakteristisches Polynom* ist bereits bei der Berechnung von Eigenwerten aufgetaucht. (Die doppelte Verwendung der Bezeichnung ist nicht zufällig.)

Nun kommen wir zu einem sehr wichtigen Punkt: Die Ableitung war nach unseren Überlegungen eine lineare Abbildung. D. h. im vorliegenden Fall der homogenen DGL, dass auch Linearkombinationen der drei Lösungen wieder Lösungen sein müssen:

$$y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} .$$

Das gleiche Prinzip kennen wir bereits von homogenen linearen Gleichungssystemen. Entsprechend haben wir die Lösung  $y_H$  genannt, weil es sich um die allgemeine Lösung der *homogenen* DGL handelt.

Wir gingen hier davon aus, dass für unser charakteristisches Polynom wirklich nur Nullstellen mit der Vielfachheit 1 vorkommen. Das muss jedoch nicht sein. Die Lösungen sehen dann etwas komplizierter aus, wir kommen im nächsten Abschnitt auf diesen Fall zurück.

**Beispiel**

Wir untersuchen hier

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 2y(t) = 0 .$$

Diese DGL ist linear, homogen und hat nur konstante Koeffizienten, sie kann durch den Exponentialansatz gelöst werden. Es folgt (mit  $\frac{d^2}{dt^2}$  für die zweite Ableitung nach der Zeit)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) + 5\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) + 2e^{\lambda t} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} &= 0 . \end{aligned}$$

Teilen durch  $e^{\lambda t}$  ergibt

$$\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

und Auflösen liefert

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( -5 + \sqrt{17} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( -5 - \sqrt{17} \right) . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung  $y_H$  folgt dann wieder aus dem Bilden aller Linearkombinationen der beiden Lösungen:

$$y_H = c_1 e^{\frac{1}{2}(-5+\sqrt{17})t} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-5-\sqrt{17})t} .$$

**22.7 Standardlösungsansatz II**

Wir wollen unseren Standardlösungsansatz für lineare homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten weiter ausbauen. Zuvor haben wir bemerkt, dass es auch Fälle gibt, bei denen es in gewisser Weise nicht genügend Nullstellen des charakteristischen Polynoms gibt. Damit ist gemeint, dass Nullstellen mehrfach vorkommen. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn das charakteristische Polynom  $(\lambda - 1)^2$  wäre, bei dem dann  $\lambda_1 = 1$  eine doppelte Nullstelle sein würde. Bei dieser Problematik hilft der folgende Satz, den wir im Anschluss insbesondere deshalb beweisen, weil Ideen aus der Linearen Algebra eingehen, die wir bereits kennen.

**Satz**

Ist  $\lambda_1$  eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, welches nach Einsetzen von  $y(t) = e^{\lambda t}$  in die DGL

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten entsteht, so sind die Funktionen

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = t e^{\lambda_1 t}, \dots, y_k = t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$$

linear unabhängige Lösungen. ■

Den Beweis dieses Satzes teilen wir in zwei Teile auf: die lineare Unabhängigkeit und die Lösungseigenschaft.

- Sei  $c_0 e^{\lambda_1 t} + c_1 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{k-1} t^{k-1} e^{\lambda_1 t} = 0$ . Diese Gleichung ist äquivalent zu  $c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1} t^{k-1} = 0$ . Da dieses Polynom höchstens  $k - 1$  Nullstellen hat, diese Gleichung aber für alle  $t$  gelten muss, folgt  $c_0 = \dots = c_{k-1} = 0$ . Also sind  $e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$  linear unabhängig.
- Zur besseren Übersicht bei den folgenden Rechnungen nehmen wir das Bilden der Ableitung als lineare Abbildung  $D$  wahr:

$$D: y \mapsto \dot{y}, \quad D - \lambda: y \mapsto \dot{y} - \lambda y.$$

Dann ist  $D^j y = y^{(j)}$  und unsere DGL wird zu

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0.$$

Das charakteristische Polynom der DGL kann nach der Voraussetzung des Satzes in

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m)$$

zerlegt werden. Die gleiche Zerlegung können wir auf den DGL-Ausdruck übertragen:

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n = (D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_m),$$

sodass die DGL nun

$$(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_m) y = 0$$

lautet. Wir berechnen nun exemplarisch  $(D - \lambda_1)^k y_k$ , woraus klar wird, was der Ausdruck selbst ergibt:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)(t^{k-1} e^{\lambda_1 t}) &= (k-1)t^{k-2} e^{\lambda_1 t} + t^{k-1} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 t^{k-1} e^{\lambda_1 t} \\ &= (k-1)t^{k-2} e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)^2(t^{k-1} e^{\lambda_1 t}) &= (D - \lambda_1)((k-1)t^{k-2} e^{\lambda_1 t}) \\ &= (k-2)(k-1)t^{k-3} e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)^{k-1}(t^{k-1} e^{\lambda_1 t}) &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2)(k-1)t^0 e^{\lambda_1 t} \\ &= c e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)^k(t^{k-1} e^{\lambda_1 t}) &= (D - \lambda_1)(c e^{\lambda_1 t}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die zusätzlichen Faktoren  $(D - \lambda_2)$  bis  $(D - \lambda_m)$  werden an diesem Ergebnis nichts ändern, womit wir  $y_k$  als Lösung identifiziert hätten. Ist der Exponent des Faktors  $t$  kleiner als  $k - 1$ , so wird der Ausdruck nur noch schneller Null, womit auch die Lösungseigenschaft der anderen  $y_j$  gezeigt wäre.

## 22.8 Finden einer partikulären Lösung

Was passiert aber nun bei *inhomogenen* DGLen? Diese erscheinen in der Praxis sehr häufig. Denken Sie z. B. an einen Schwingkreis, der in jedem Radio und jeder Quarzuhr vorhanden ist, um nur wenige Beispiele zu nennen. Dieser wird durch eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung beschrieben und der Schwingkreis wird z. B. durch den aus der Physik sicher bekannten Term  $\sin(\omega t)$  angeregt, wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz bezeichnet. Wir haben dann eine DGL der Form

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = \sin(\omega t) .$$

### Satz

Sei  $\vec{y}_P$  eine Lösung der inhomogenen DGL

$$\dot{\vec{y}} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$$

und  $\vec{y}_H$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$\dot{\vec{y}} = A(t)\vec{y} .$$

Dann ist die allgemeine Lösung dieser inhomogenen DGL gegeben durch

$$\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_P .$$

$\vec{y}_P$  wird auch *partikuläre* oder *spezielle Lösung* genannt. ■

Auch hier können wir wieder die zum System führende DGL der Ordnung  $n$  betrachten und erhalten  $y = y_H + y_P$ .

Wir werden uns zum Finden einer partikulären Lösung mit einem einfach zu durchschauenden Verfahren vertraut machen, welches allerdings sehr wirkungsvoll ist. Es wird als *intelligentes Raten* oder auch *Ansatz vom Typ der rechten Seite* bezeichnet. Zuvor erinnern wir uns noch an das, was gesucht wird: Die Lösung einer inhomogenen DGL hatte die Form

$$y = \underbrace{y_H}_{\text{allg. homog. Lsg.}} + \underbrace{y_P}_{\text{eine partik. Lsg.}} .$$

Die allgemeine homogene Lösung können wir bereits finden; widmen wir uns daher der Suche nach  $y_P$ .

Betrachten wir eine DGL

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b(t) \quad (22.2)$$

mit konstanten Koeffizienten, so lässt sich Folgendes beobachten: Setzen wir in die linke Seite von 22.2 die folgenden Formen für  $y(t)$  ein

- Polynom  $p(t)$ ,
- $p(t)e^{rt}$ ,
- $p(t) \sin t$  oder  $p(t) \cos t$ ,

so ergibt sich als Resultat wieder eine derartige Form. Entspricht also  $b(t)$  in 22.2 selbst eine dieser Formen, so setzen wir  $y(t)$  gleichfalls so an.

### Beispiel

Für eine partikuläre Lösung der DGL  $\ddot{y} - y = t$  verwenden wir als Ansatz ein allgemeines Polynom ersten Grades

$$y(t) = at + b, \quad \dot{y} = a, \quad \ddot{y} = 0.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$0 - (at + b) = t,$$

somit ist  $a = -1$  und  $b = 0$  und

$$y_P(t) = -t$$

ist eine partikuläre Lösung. ◆

## 22.9 Anfangswertprobleme

Betrachten wir ein Pendel, so hängt seine Position nach einer Zeit  $t$  mit Sicherheit auch davon ab, welche Anfangsgeschwindigkeit und Position es zum Start gehabt hat. Wir benötigen somit offensichtlich weitere Informationen, wenn wir eine Lösung einer DGL — welche unser Problem beschreibt — geeignet angeben wollen. Denken wir erneut an die Schwingungsgleichung, so enthält die allgemeine homogene Lösung die beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ . Möchten wir diese bestimmen, so benötigen wir dafür zwei geeignete Gleichungen. Diese liefert gerade die Festlegung von zwei Anfangswerten.

**Definition** (Anfangswertproblem, AWP)

Sei wie zuvor

$$\dot{\vec{y}}(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

gegeben. Sei ferner für  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

gegeben. Wir sprechen insgesamt von einem Anfangswertproblem (AWP). ◀

**Satz**

Wenn nun  $A(t)$  und  $\vec{b}(t)$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ausschließlich stetige Einträge  $a_{ij}(t)$  und  $b_i(t)$  haben und  $t_0 \in I$  ist, so hat das AWP für jedes  $\vec{y}_0$  genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung. ■

In der homogenen Lösung der DGL tauchten Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  auf. Diese werden nun durch  $\vec{y}_0$  bestimmt. Daher wird als Ergebnis eine eindeutige Lösung gefunden. Die Theorie wurde wieder für Systeme erster Ordnung angegeben. Alles gilt aber natürlich auch für die von uns behandelten DGLen  $n$ -ter Ordnung.

**Beispiel**

Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad \text{für reelles } \omega \neq 0.$$

Der Exponentialansatz liefert:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) + \omega^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm i\omega. \end{aligned}$$

Wir betrachten die folgenden Anfangsbedingungen:

$$t_0 = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Nach obiger Rechnung haben wir als Lösung

$$y(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t},$$

also

$$y(0) = A + B = 1$$

und

$$\dot{y}(0) = i\omega A e^{i\omega 0} - i\omega B e^{-i\omega 0} = 0 ,$$

damit  $A - B = 0$ . Insgesamt folgt also  $A = B = \frac{1}{2}$  und daraus:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\cos \omega t + \frac{1}{2}i\sin \omega t + \frac{1}{2}\cos \omega t - \frac{1}{2}i\sin \omega t \\ &= \cos \omega t . \end{aligned}$$

Im letzten Teil der Rechnung verwendeten wir die Euler-Formel. ◆

## 22.10 Wronski-Test

Bei den Lösungen einer DGL  $n$ -ter Ordnung wissen wir, dass  $n$  linear unabhängige Lösungen zu erwarten sind. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit lässt sich direkt mithilfe der Definition durchführen, allerdings ist das meist etwas mühsam. Es gibt jedoch einen einfachen Test (*Wronski-Test* genannt), den wir nun vorstellen.

### Satz

Seien  $y_1, \dots, y_n$  auf dem Intervall  $I$  mindestens  $(n-1)$  mal differenzierbar und sei  $x_0 \in I$ . Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig bzw. die Determinante der  $(n \times n)$ -Matrix

$$W := \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ungleich Null, so sind die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  auf  $I$  linear unabhängig. Die aus den Vektoren gebildete Matrix  $W$  heißt *Wronski-Matrix*. ■

Bitte beachten Sie, dass das  $x_0$  eine besondere Rolle spielt, die häufig falsch verstanden wird; es genügt wirklich *ein* solches  $x_0$ , um mit dem obigen Satz eine Aussage über die lineare Unabhängigkeit zu bekommen.

Der Beweis verwendet nochmals einige schöne Ideen, mit denen wir bereits vertraut sind: Wir betrachten zuerst die Linearkombination der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$

$$\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0,$$

die für alle  $x \in I$  gelten soll. Für die lineare Unabhängigkeit müssen wir wie üblich zeigen, dass aus dieser Gleichung folgt, dass alle  $\lambda_i = 0$  sind. Um eine Beziehung zur Wronski-Matrix zu bekommen, liegt es nahe, diese Gleichung  $(n-1)$ -mal zu differenzieren:

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) &= 0, \\ \lambda_1 y_1''(x) + \dots + \lambda_n y_n''(x) &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Alle diese Gleichungen lassen sich zu einem homogenen Gleichungssystem zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix auf der linken Seite gerade die Wronski-Matrix ist.

Sind nun die Spaltenvektoren der Matrix an einer Stelle  $x_0$  linear unabhängig, so hat die Wronski-Matrix maximalen Rang  $n$ . Das zuvor aufgestellte LGS besitzt somit die eindeutige Lösung  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Dies bedeutet die lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$ .

### Beispiel

Seien  $y_1(x) = \sin x$  und  $y_2(x) = \cos x$ .

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2(x) - \cos^2(x) = -1 \neq 0.$$

Somit sind die Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  linear unabhängig. Dafür hätte allerdings auch schon das Finden eines  $x_0$ , an dem die Determinante ungleich Null ist, ausgereicht, was die Kenntnis der Eulergleichung nicht einmal verlangt hätte. Ein Beispiel wäre hier  $x_0 = 0$ . ◆

## 22.11 Beispiel für nicht-lineare Differenzialgleichungen

Zum Abschluss wollen wir noch einen Blick hinter den Horizont der Welt der linearen DGLen werfen. Der folgende Teil behandelt in elementarer Weise in Form von DGLen das Verhalten eines Systems, in welchem sich eine Beute- (z. B. Kaninchen, mit  $x(t)$  bezeichnet) und eine Räuberpopulation (z. B. Füchse, mit  $y(t)$  bezeichnet) begegnen. Es handelt sich hier um einen klassischen Fall, bei dem ein Geschehen in der Natur mittels DGLen modelliert wird. Die Realität ist komplexer als hier idealisiert angenommen. Dennoch bekommen wir einen lehrreichen Einblick in ein weiteres (und sehr aktuelles) Gebiet der Mathematik und ihrer Anwendung.

Was wird in einem solchen Räuber-Beute-System passieren: Die Kaninchen werden sich munter vermehren, wenn sie ordentlich Futter haben und sie keiner daran hindert. Das Wachstum ist dann exponentiell, genügt also der Differenzialgleichung

$$\dot{x}(t) = wx(t),$$

wobei  $w$  eine Konstante ist, die als Wachstumsrate beschrieben werden kann. Kommen nun Füchse ins Spiel, werden diese sich das eine oder andere Kaninchen zu Gemüte führen, was eine Verminderung von  $x(t)$  zur Folge hat, welche direkt mit der Anzahl der Begegnungen mit den Räubern zusammenhängt. Dies schlägt sich in folgender DGL nieder:

$$\dot{x}(t) = wx(t) - bx(t)y(t).$$

Die Konstante  $b$  spiegelt dabei die Häufigkeit der Begegnungen zwischen Kaninchen und Füchsen wider. Nun kann es passieren, dass sich die Kaninchen z. B. selbst in Rankämpfe verstricken, wodurch es Todesfälle geben kann; dies führt dann unter Verwendung der Konstanten  $d$  zur DGL

$$\dot{x}(t) = wx(t) - bx(t)y(t) - dx^2(t),$$

denn es begegnen sich Kaninchen untereinander, und  $d$  gibt Auskunft darüber, wie gefährlich sie für einander sind. Nun ist es kein Problem mehr, die entsprechende DGL für die Fuchspopulation aufzustellen:

$$\dot{y}(t) = -\tilde{w}y(t) + \tilde{b}x(t)y(t) - \tilde{d}y^2(t).$$

Hier sind  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{b}$  und  $\tilde{d}$  wieder Konstanten (deren Bedeutung bereits nach den vorigen Ausführungen klar sein sollte). Der Term  $-\tilde{w}y(t)$  entsteht aufgrund der Tatsache, dass die Füchse ohne Nahrung von ihrer Anzahl her exponentiell abnehmen, sich allerdings durch ausreichend Futter vermehren, woraus der Term  $\tilde{b}x(t)y(t)$  resultiert. Der letzte Ausdruck erklärt sich wie sein Pendant für die Kaninchen, denn auch Füchse sind nicht immer nett zueinander.

Was fällt uns auf? Beide DGLen enthalten sowohl  $x(t)$  als auch  $y(t)$ , bilden also ein gekoppeltes System. Das hatten wir noch nicht (es ist auch nicht wirklich einfach zu behandeln ...). Des Weiteren tauchen hier Quadrate auf, also liegt ein Beispiel für einen nicht-linearen Fall vor. Die DGLen entsprechen somit gar nicht dem, was bisher behandelt wurde. Wir wollten ja auch über den Horizont hinaus. An diesem System lassen sich noch viele weitere Dinge über DGLen lernen, aber dies sehen Sie in einer zukünftigen mathematischen Reise.

## 22.12 Aufgaben

- Schreiben Sie jeweils die Differenzialgleichung in ein System 1. Ordnung um.

(a)  $y' = e^{x-x_0}(y'' - y) + (x - x_0)^2 y$  ;

(b)  $x^2 (y + y' + y'' + y''') = 1$ .

- Betrachten Sie die Differenzialgleichung

$$y'' + y' = 0 .$$

- Um welche Art von Differenzialgleichung handelt es sich und was können Sie bereits über die Menge ihrer Lösungen sagen?
- Finden Sie eine Lösungsbasis der DGL und nennen Sie den gesamten Lösungsraum.

- Betrachten Sie die Differenzialgleichung

$$y' + y = e^x .$$

- Um welche Art von Differenzialgleichung handelt es sich und was können Sie bereits über die Menge ihrer Lösungen sagen?
- Finden Sie die allgemeine Lösung der *homogenen* DGL.
- Erraten Sie eine Lösung der *inhomogenen* DGL und nennen Sie ihren gesamten Lösungsraum.

- Betrachten Sie die DGL  $y'' + ay' + by = 0$  mit Konstanten  $a$  und  $b$ .

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom dieser DGL.
- Formen Sie die DGL in ein System der Gestalt  $\vec{y}' = A\vec{y}$  um und berechnen Sie dann das charakteristische Polynom der Matrix  $A$ .

Was fällt Ihnen dabei auf?

- Finden Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender homogener DGLen:

(a)  $3y'' + 6y' + 3y = 0$ ,

- (b)  $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ ,  
 (c)  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

6. Finden Sie zu der Differenzialgleichung

$$2y'' + y' + 3y = \sin 2x$$

eine partikuläre Lösung mithilfe des Ansatzes vom Typ der rechten Seite. Wie ist der entsprechende Ansatz bei folgenden rechten Seiten?

- (a)  $\dots = x^2 e^{3x}$   
 (b)  $\dots = 3$   
 (c)  $\dots = \sin x - 2x \cos x$

7. Lösen Sie folgendes AWP:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = -2.$$

8. Überprüfen Sie folgende Funktionen auf lineare (Un-)abhängigkeit:

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^x \sin x, \quad f_3(x) = e^x \cos x.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass die konstante Nullfunktion ( $f(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ) zu jeder anderen Funktion linear abhängig ist.

## 22.13 Lösungen

1. (a)

$$\begin{aligned} y' &= e^{x-x_0}(y'' - y) + (x - x_0)^2 y \\ \Leftrightarrow y'' &= e^{x_0-x} y' + (1 - e^{x_0-x}(x_0 - x)^2) y \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - e^{x_0-x}(x_0 - x)^2 & e^{x_0-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^2 (y + y' + y'' + y''') &= 1 \\ \Leftrightarrow y''' &= -y'' - y' - y + \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (a) Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und der Lösungsraum ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

- (b) Der Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$  liefert nach dem Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = -1 \\ \Rightarrow \{y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = 1, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}\} \text{ ist Lösungsbasis.} \end{aligned}$$

Lösungsraum ist  $L = \{a + be^{-x} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

3. (a) Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung. Der Lösungsraum hat die Form  $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ , wobei  $y_H$  die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist (ein eindimensionaler Vektorraum) und  $y_P$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

- (b) Der Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  führt, eingesetzt in die homogene DGL, zur Gleichung

$$e^{\lambda x}(\lambda + 1) = 0,$$

was  $\lambda = -1$  impliziert. Also ist  $y_H(x) = ae^{-x}$  die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

- (c) Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist  $y_P(x) = \frac{1}{2}e^x$ . Der gesamte Lösungsraum ergibt sich damit zu  $\{ae^{-x} + \frac{1}{2}e^x \mid a \in \mathbb{R}\}$ .

4. (a) Das charakteristische Polynom der DGL erhalten wir durch Einsetzen des Exponentialansatzes in die DGL:

$$\lambda^2 + a\lambda + b.$$

- (b) In ein System 1. Ordnung umgeformt lautet die DGL

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-a - \lambda) - (-b) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Beide Polynome sind gleich.

5. Die charakteristischen Polynome erhalten wir durch Einsetzen des Exponentialansatzes  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Sie und ihre Nullstellen lauten:

- (a)  $3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ,  
 (b)  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ,  
 (c)  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

Somit erhalten wir als allgemeine Lösungen

- (a)  $y_H(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$ ,  
 (b)  $y_H(x) = a + be^{2x} + cxe^{2x}$ ,  
 (c)  $y_H(x) = ae^x + bxe^x + cx^2e^x$ .

6. Der entsprechende Ansatz (mit Ableitungen) für  $\sin 2x$  als rechte Seite ist

$$\begin{aligned} y(x) &= a \sin 2x + b \cos 2x, \\ y'(x) &= -2b \sin 2x + 2a \cos 2x, \\ y''(x) &= -4a \sin 2x - 4b \cos 2x. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$(-8a - 2b + 3a) \sin 2x + (-8b + 2a + 3b) \cos 2x = \sin 2x.$$

Koeffizientenvergleich führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} -5a - 2b &= 1 \\ 2a - 5b &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= -\frac{5}{29} \\ b &= -\frac{2}{29}. \end{aligned}$$

Somit ist  $y_p(x) = -\frac{5}{29} \sin 2x - \frac{2}{29} \cos 2x$  eine partikuläre Lösung der DGL.

- (a) Ansatz  $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$   
 (b) Ansatz  $y(x) = a$   
 (c) Ansatz  $y(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x$

7. Die DGL  $y'' + 3y' + 2y = 0$  kann wieder mit dem Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  gelöst werden. Für  $\lambda$  ergibt sich die Gleichung (links steht das charakteristische Polynom)  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ , also  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -2$ . Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_H(x) = ae^{-x} + be^{-2x}.$$

Die Anfangswerte  $y(2) = 3$  und  $y'(2) = -2$  setzen wir in  $x_H$  ein:

$$\begin{aligned} y(2) &= ae^{-2} + be^{-4} = 3, \\ y'(2) &= -ae^{-2} - 2be^{-4} = -2. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist  $a = 4e^2$  und  $b = -e^4$ . Somit ist die Lösung des AWP

$$y(x) = 4e^{2-x} - e^{4-2x}.$$

8.

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^x \sin x & e^x \cos x \\ e^x & e^x(\sin x + \cos x) & e^x(\cos x - \sin x) \\ e^x & e^x(2 \cos x) & e^x(-2 \sin x) \end{vmatrix}$$

An der Stelle  $x = 0$  wird dies zu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Also sind die  $f_i$  linear unabhängig.

*Achtung:* Wäre die Determinante für  $x = 0$  Null gewesen, hätte uns das noch nichts über lineare (Un-)Abhängigkeit gesagt, denn für ein anderes  $x$  könnte die Determinante wieder ungleich Null sein.

Die konstante Nullfunktion und eine beliebige andere Funktion  $g$  sind linear abhängig, denn es gilt

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot g = 0 ,$$

womit wir eine Linearkombination der beiden Funktionen hätten, deren Koeffizienten nicht alle Null sind und die als Ergebnis Null ergibt.

### Fragen

- Was ist ein gewöhnliches lineares inhomogenes Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten?
- Schreiben Sie die Schwingungsgleichung für ein Federpendel in ein System erster Ordnung um.
- Wie lautet der Exponentialansatz?
- Können Sie Differenzialgleichungen aufschreiben, die sich durch Integration lösen lassen?
- Was ist eine partikuläre Lösung im Zusammenhang mit Differenzialgleichungen?
- Was ist ein Fundamentalsystem?
- Was können Sie über Linearkombinationen von Lösungen einer gewöhnlichen homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten sagen?
- Was passiert, wenn bei den hier behandelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms vorkommt?
- Wie (und für welche Typen der Inhomogenität) findet man eine partikuläre Lösung?
- Was ist ein Anfangswertproblem und wie formuliert man ein solches mathematisch exakt?
- Wie lautet der Satz über den Wronski-Test?
- Leiten Sie die Differenzialgleichungen für ein Räuber-Beute-System her.

# Klausuraufgaben



# 23 Analysis

## 23.1 Aufgaben

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 .$$

2. Vereinfachen Sie folgende Terme bis zur Form  $a + bi$ :

$$(3 + 4i)(1 - i) , \quad i^3 + i^2 + i + 1 , \quad \frac{i + 1}{2 + i} .$$

3. Berechnen Sie alle drei Lösungen von  $z^3 = 1 + i$  mit Hilfe der dritten Einheitswurzeln.
4. Zeigen Sie für beliebige komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$ , dass

$$\overline{z^2} = \bar{z}^2$$

gilt.

5. Zeigen Sie, dass für streng monoton wachsende Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch  $f + g$  streng monoton wachsend ist.
6. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktion sowie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an sämtlichen Randpunkten:

$$f(x) := \ln(\sin x) .$$

7. Zeigen Sie, dass die Ableitung einer  $\pi$ -periodischen, differenzierbaren Funktion wieder  $\pi$ -periodisch ist.
8. Bestimmen Sie den Definitions- und den minimalen Wertebereich (Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) von

$$f(x) := \sin^2(\sqrt{x})$$

und differenzieren Sie die Funktion.

9. Berechnen Sie alle (reellen und komplexen) Nullstellen von

$$P(x) := x^3 - x^2 + x - 1 .$$

10. Zeigen Sie ohne Berechnung von Grenzwerten, dass die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-x^2 - x + 6}$$

in den Nullstellen des Nenners stetig ergänzt werden kann und berechnen Sie die entsprechenden Funktionswerte der stetigen Ergänzung.

11. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung des folgenden Bruches durch:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} .$$

12. Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - \ln(x + a))$  für beliebige  $a \in \mathbb{R}$ .

13. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

über ihre Partialsummen.

*Hinweis:* Ein hilfreicher Trick ist, die Summanden wie bei der Partialbruchzerlegung in mehrere Brüche zu zerlegen.

14. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie die Aussage, wenn sie wahr ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an, wenn die Aussage falsch ist.

- „Beliebige Teilfolgen konvergenter Folgen sind wiederum konvergent gegen den gleichen Grenzwert.“
- „Beliebige Teilfolgen divergenter Folgen sind wiederum divergent.“

15. Zeigen Sie, dass die Folge  $\left(\sin\left(\frac{\pi k}{2k-2}\right)\right)$  konvergiert und bestimmen Sie deren Grenzwert.

16. Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und  $(b_k)$  eine Nullfolge. Was lässt sich über die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

aussagen?

17. Untersuchen Sie folgende Reihen mit geeigneten Konvergenzkriterien:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k!} .$$

18. Setzen Sie die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{e^x - 1}$$

mit Hilfe des Satzes von l'Hospital in  $x_0 := 0$  stetig fort und berechnen Sie die Ableitung der fortgesetzten Funktion in  $x_0$ .

19. Setzen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := x \ln x$$

im Punkt  $x_0 := 0$  stetig fort. (Es ist  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .) *Hinweis:* Hier hilft Ihnen der Satz von l'Hospital.

20. Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für den Satz von l'Hospital erfüllt sind und berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} .$$

21. Untersuchen Sie die reelle Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{k^2}$$

auf Konvergenz.

22. Leiten Sie die Quotientenregel aus der Produktregel her.

23. Berechnen Sie die Taylorreihe von  $f(x) := \sinh x$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

24. Berechnen Sie, wenn möglich,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx .$$

25. Berechnen Sie die Stammfunktionen von  $e^x \cos x$ .

26. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 x \ln(3x) dx .$$

## 23.2 Lösungen

1. Für  $k = 1$  ist

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left( \sum_{k=1}^1 k \right)^2,$$

womit wir den Induktionsanfang gezeigt hätten. Für den Induktionsschritt nehmen wir  $A(n)$  an, also  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$  für eine beliebige, aber feste Zahl  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Wir zeigen für die Summe bis  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 &\stackrel{IV}{=} (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 + (n + 1)^3 \\ &= \left( \frac{n(n + 1)}{2} \right)^2 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{n^2}{4}(n + 1)^2 + (n + 1)(n + 1)^2 \\ &= \frac{1}{4}(n^2 + 4(n + 1))(n + 1)^2 \\ &= \frac{1}{4}(n + 2)^2(n + 1)^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1))^2 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} (3 + 4i)(1 - i) &= 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 3 - 3i + 4i + 4 = 7 + i, \\ i^3 + i^2 + i + 1 &= -i - 1 + i + 1 = 0, \\ \frac{i + 1}{2 + i} &= \frac{(i + 1)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2i - i^2 + 2 - i}{4 - i^2} = \frac{3 + i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

3. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$a_k = e^{i \frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 1, \dots, 3.$$

Mit ihrer Hilfe können wir aus einer dritten Wurzel von  $1 + i$ , nennen wir sie  $b_1$ , alle weiteren berechnen. Denn mit  $b_1$  erfüllen auch  $b_2 := a_1 b_1$  und  $b_3 := a_2 b_1$  die zu lösende Gleichung:

$$b_1^3 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad b_2^3 = a_1^3 \cdot b_1^3 = 1 \cdot (1 + i) \quad \text{und} \quad b_3^3 = a_2^3 \cdot b_1^3 = 1 \cdot (1 + i).$$

$b_1$  müssen wir aber zu Fuß berechnen, am besten über die Polarkoordinaten von  $1 + i$ .

Der Betrag von  $1 + i$  ist  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , der von  $b_1$  also  $r = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ . Der Winkel von  $1 + i$  ist  $45^\circ$ , also  $\frac{\pi}{4}$ , der von  $b_1$  also  $\varphi = \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ . Insgesamt ist

$$b_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad b_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}+i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}},$$

$$b_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}+i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

4. Wir schreiben  $z := a + bi$  und erhalten:

$$\overline{z^2} = \overline{(a + bi)^2} = \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi = (a - bi)^2 = \overline{z}^2.$$

5. Streng monoton wachsende Funktionen sind durch

$$x > y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$$

für alle  $x, y$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  charakterisiert. Setzen wir also  $x > y$  voraus, so gilt nach unserer Voraussetzung

$$f(x) > f(y) \quad \text{und} \quad g(x) > g(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und somit

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) > f(y) + g(x) > f(y) + g(y) = (f + g)(y).$$

6. Definiert ist  $f(x) := \ln(\sin x)$  überall dort, wo der Sinus positive Werte annimmt, also auf

$$D := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, (2k + 1)\pi[.$$

Die Randpunkte des Definitionsbereichs sind die Randpunkte dieser Intervalle:

$$R := \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Grenzwerte an den Randpunkten sind sämtlich  $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$ , also für  $x_r = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ :

$$\lim_{x \searrow x_r} f(x) = -\infty$$

und für  $x_r = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \nearrow x_r} f(x) = -\infty.$$

7. Eine  $\pi$ -periodische Funktion  $f$  ist durch die Gleichung  $f(x + \pi) = f(x)$  charakterisiert. Differenzieren wir diese Gleichung, wobei wir auf der linken Seite die Kettenregel anwenden, ergibt sich für  $f'$ :

$$f'(x + \pi) \cdot 1 = f'(x).$$

Somit erfüllt auch  $f'$  die Gleichung  $\pi$ -periodischer Funktionen.

8. Wegen der Wurzel ist  $f$  nur auf dem Intervall  $[0, \infty[$  definiert, der Wertebereich ist wegen des Sinus'  $[0,1]$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2(\sqrt{x}))' \\ &= 2 \sin(\sqrt{x}) (\sin(\sqrt{x}))' = 2 \sin(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

9. Der höchste Exponent ist drei, sodass wir die erste Nullstelle erraten müssen. Wir setzen nacheinander leicht zu prüfende Zahlen ( $0, 1, -1, \pm i$  und  $\pm 2$ ) in das Polynom ein, bis wir die erste Nullstelle gefunden haben:

$$\begin{aligned} P(0) &= 0^3 - 0^2 + 0 - 1 = -1 \\ P(1) &= 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist 1 eine Nullstelle von  $P$ . Polynomdivision von  $P$  durch  $(x - 1)$  ergibt:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x - 1) : (x - 1) = x^2 + 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{+ 1} \\ \phantom{(x^3 - x^2)} x - 1 \\ \phantom{(x^3 - x^2)} \underline{-(x - 1)} \\ \phantom{(x^3 - x^2)} \phantom{x - 1} 0 \end{array}$$

Auf das Ergebnis wenden wir die  $p$ - $q$ -Formel (mit  $p = 0, q = 1$ ) an:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 0 \pm \sqrt{0 - 1} = \pm i.$$

Damit sind  $1, i$  und  $-i$  die Nullstellen von  $P$ .

10. Die Nullstellen des Nenners sind  $x_1 = -3$  und  $x_2 = 2$ :

$$-x^2 - x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Setzen wir diese in den Zähler ein

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \Big|_{x=-3} = 0, \quad x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \Big|_{x=2} = 0,$$

so sehen wir, dass es auch Nullstellen des Zählers sind. Eine Polynomdivision wird also ohne Rest möglich sein und ein Polynom  $P(x)$  ergeben. Damit stimmt  $f(x)$  in allen Punkten seines Definitionsbereiches mit einem Polynom  $P(x)$  übereinstimmt. Da Polynome auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig sind, können wir somit auch den Bruch in  $x_1$  und  $x_2$  stetig ergänzen, indem wir  $f(x_1) := P(x_1)$  und  $f(x_2) := P(x_2)$  definieren. Es ist

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (-x^2 - x + 6) = -x - 1,$$

also  $f(x_1) = -x_1 - 1 = 2$  und  $f(x_2) = -x_2 - 1 = -3$ .

11. Bei diesem Bruch müssen wir zunächst eine Polynomdivision durchführen, da Zähler- und Nennerpolynom den gleichen Grad haben:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x^3 - 2x^2 + x) = 2 + \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \\ \underline{-(2x^3 - 4x^2 + 2x)} \\ 3x^2 + x - 1 \end{array}$$

Das Nennerpolynom faktorisieren wir zu

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2.$$

Den Restterm zerlegen wir mit dem Ansatz

$$\frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

und rechnen weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x-1)^2}{x(x-1)^2} + \frac{Bx(x-1)}{x(x-1)^2} + \frac{Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} A + B &= 3, & -2A - B + C &= 1, & A &= -1 \\ \Rightarrow A &= -1, & B &= 4, & C &= 3, \end{aligned}$$

womit wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

erhalten und die Zerlegung der anfänglichen rationalen Funktion lautet

$$\frac{2x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

12. Wir formen um, sodass wir den Grenzwert besser bilden können:

$$\ln x - \ln(x+a) = \ln\left(\frac{x}{x+a}\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{x+a}\right).$$

Somit ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - \ln(x+a)) = \ln\left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x+a}\right) = \ln 1 = 0.$$

13. Zunächst die im Hinweis erwähnte Partialbruchzerlegung der Summanden:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Eingesetzt, werden aus den Partialsummen Teleskopsummen:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Der Wert der Reihe ist schließlich der Grenzwert der Partialsummen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

14. Für konvergente Folgen gilt definitionsgemäß, dass in jedem noch so kleinen Intervall um den Grenzwert fast alle Folgenglieder (d. h. alle ab einem bestimmten Index) enthalten sind. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf Teilfolgen, womit auch alle Teilfolgen gegen diesen Grenzwert konvergieren. Bei divergenten Folgen können wir keine pauschalen Aussagen treffen. Teilfolgen von Folgen, die gegen  $\pm\infty$  gehen, werden sich ebenso verhalten. Jedoch gibt es auch andere divergente Folgen, beispielsweise  $((-1)^k)$ . Von dieser Folge gibt es Teilfolgen, bei denen fast alle Folgenglieder  $-1$  sind und die dementsprechend gegen  $-1$  konvergieren. Ebenso gibt es Teilfolgen mit  $+1$  als Grenzwert, aber auch solche, die wiederum divergieren, weil sie sich nicht zwischen  $-1$  und  $+1$  entscheiden können wie  $((-1)^{3k})$ .
15. Da die Sinusfunktion stetig ist, dürfen wir den Limes in das Funktionsargument hineinziehen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\pi k}{2k-2} \right) = \sin \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi k}{2k-2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} \right).$$

16. Da  $(b_k)$  eine Nullfolge ist, befinden sich sämtliche  $b_k$  ab einem bestimmten Index, sagen wir  $k_0$ , im Intervall  $] -1, +1[$ . Anders ausgedrückt, gilt:

$$|b_k| < 1 \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Damit ist auch

$$|a_k b_k| < |a_k| \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  ist eine konvergente Majorante von  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k|$ , was letztere ebenfalls konvergent macht. Somit ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$  absolut konvergent.

17. Bei

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k^k}$$

verwenden wir das Wurzelkriterium. Der Ausdruck

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{e^k}{k^k}} = \frac{e}{k}$$

konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $0 < 1$ . Somit konvergiert die Reihe absolut. Bei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k!}$$

verwenden wir das Quotientenkriterium. Die Voraussetzung  $a_k = \frac{\ln k}{k!} \neq 0$  ist zumindest für  $k > 1$  erfüllt, was uns aber genügt. Nun zum Quotienten:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{\ln(k+1)}{(k+1)!}}{\frac{\ln k}{k!}} = \frac{k! \ln(k+1)}{(k+1)! \ln(k)} = \frac{\ln(k+1)}{(k+1) \ln(k)}.$$

Dies konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $0 < 1$ , da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)} = 1$  ist. Nach dem Quotientenkriterium muss dann die Reihe absolut konvergieren.

18. Für die stetige Fortsetzung berechnen wir den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Somit kann  $f$  in  $x_0 = 0$  durch 1 stetig fortgesetzt werden. Die fortgesetzte Funktion lautet also:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ 1 & x = x_0 \end{cases}$$

Nun zur Ableitung von  $\tilde{f}$  in  $x_0$ . Hier müssen wir gleich zweimal hintereinander l' Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{e^h - 1} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - e^h + 1}{h(e^h - 1)} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{e^h - 1 + he^h} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-e^h}{2e^h + he^h} \\ &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

19. Um den Satz von l'Hospital anwenden zu können, formen wir  $f$  in einen Bruch um:

$$f(x) = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Hier gehen sowohl Zähler als auch Nenner für  $x \searrow 0$  gegen  $\pm\infty$ . Es gilt nach l'Hospital

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0 .$$

Somit kann  $f$  durch  $f(0) := 0$  in 0 stetig fortgesetzt werden.

20. Um die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital zu prüfen, vergleichen wir jeweils die Grenzwerte von Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x - e = e - e = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 .$$

Demnach sind die Voraussetzungen erfüllt und wir dürfen versuchen, die Grenzwerte über die Ableitungen von Zähler und Nenner zu bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x e^x = e .$$

21. Der Entwicklungspunkt von  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{k^2}$  ist  $x_0 = -3$  und  $a_k = \frac{1}{k^2}$ , sodass sich ein Konvergenzradius von

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2} = 1$$

ergibt. Die Potenzreihe konvergiert also schonmal im Intervall  $] -4, -2[$  absolut und divergiert außerhalb auf  $] -\infty, -4[ \cup ] -2, \infty[$ . Die Randpunkte  $x = -4$  und  $x = -2$  müssen wir extra untersuchen: Eingesetzt ergeben sich die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-4)+3)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-2)+3)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(+1)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} ,$$

die beide absolut konvergieren. Somit ist die Potenzreihe auf dem abgeschlossenen Intervall  $[-4, -2]$  absolut konvergent.

22. Dazu schreiben wir den Quotienten  $\frac{f}{g}$  zweier Funktionen als Produkt  $f \cdot \frac{1}{g}$ , wobei  $\left(\frac{1}{g}\right)' = (g^{-1})' = -g^{-2} \cdot g' = -\frac{g'}{g^2}$  ist. Nach der Produktregel folgt dann

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

23. Die Ableitungen von  $f$ , ausgewertet am Entwicklungspunkt, sind

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x &\Rightarrow & f(0) = 0, \\ f'(x) &= \cosh x &\Rightarrow & f'(0) = 1, \\ f''(x) &= \sinh x &\Rightarrow & f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= \cosh x &\Rightarrow & f'''(0) = 1, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(2k)}(x) = \sinh x \quad \text{und} \quad f^{(2k+1)}(x) = \cosh x :$$

Den Induktionsanfang haben wir oben schon gemacht. Seien für den Induktionsschritt beide Gleichungen für ein  $k \in \mathbb{N}$  vorausgesetzt. Für  $k + 1$  ergibt sich dann

$$f^{(2(k+1))}(x) = \left( f^{(2k+1)} \right)'(x) = \cosh'(x) = \sinh x$$

und

$$f^{(2(k+1)+1)}(x) = \left( f^{(2k+2)} \right)'(x) = \sinh'(x) = \cosh x .$$

Daraus folgt im Entwicklungspunkt  $f^{(2k)}(0) = 0$  und  $f^{(2k+1)}(0) = 1$  und die Taylorreihe von  $f$  ist

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

24. Wir beginnen mit der Substitution:  $y := \frac{1}{x}$ ,  $dy = -\frac{1}{x^2} dx$ ,  $dx = -\frac{1}{y^2} dy$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx &= \int_{\infty}^1 -\frac{1}{y^2} y^2 \sin y dy \\ &= \int_1^{\infty} \sin y dy \end{aligned}$$

(Hier sehen wir, dass es sich in Wirklichkeit um ein uneigentliches Integral handelt.)

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \sin y dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (-\cos y|_1^a) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (\cos 1 - \cos a) \end{aligned}$$

Da  $\lim_{a \rightarrow \infty} \cos a$  nicht definiert ist, ist das Integral ebenfalls nicht definiert.

25. Da sich der Faktor  $e^x$  beim Ableiten und Integrieren nicht ändert, bietet sich hier die partielle Integration an.

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx .$$

Der neue Integrand sieht ungefähr wie der alte aus, was normalerweise ein schlechtes Zeichen ist. Allerdings wird der Integrand bei nochmaliger partieller Integration bis auf das Vorzeichen *genau* wie der alte aussehen:

$$\begin{aligned} e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx . \end{aligned}$$

Dies können wir ausnutzen. Anfang und Ende der Gleichungskette lösen wir nach dem gesuchten Ausdruck auf:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ \Leftrightarrow 2 \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x + \tilde{c} \\ \Leftrightarrow \int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c . \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung steht rechts und links eine Stammfunktion der gleichen Funktion. Diese können sich um eine Konstante  $\tilde{c}$  unterscheiden, was wir beim Umformen der Gleichung nicht vergessen dürfen.

- 26.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln(3x) dx &= \left. \frac{x^2}{2} \ln(3x) \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{3}{x} dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \ln(3x) \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{3x}{2} dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \ln(3x) - \frac{3x^2}{4} \right|_1^2 \\ &= \frac{4}{2} \ln 6 - \frac{3 \cdot 4}{4} - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{3}{4} \\ &= 2 \ln 6 - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{9}{4} . \end{aligned}$$



# 24 Lineare Algebra

## 24.1 Aufgaben

1. Testen Sie, ob es sich bei

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

um einen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$  handelt.

2. Finden Sie eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$$

und überprüfen Sie für Ihre Wahl die entsprechenden Eigenschaften.

3. Überprüfen Sie die folgende Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$L(x, y) := \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \end{pmatrix}$$

auf Linearität.

4. Eine Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei linear und bilde den Vektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und den Vektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ab. Bestimmen Sie  $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ .

5. Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$L(x, y) := \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

6. Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$L(x, y, z) := \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis.

7. Bestimmen Sie  $\alpha$  so, dass  $B$  die Inverse von  $A$  ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & \alpha \\ 6 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Bestimmen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußalgorithmus und berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Laplace-Entwicklung.

10. Überprüfen Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

auf lineare Unabhängigkeit.

11. Normalisieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$ .

12. Orthonormalisieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. Bestimmen Sie die Eigenwerte mit deren zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Matrixprodukte  $A \cdot B$  und  $B \cdot A$ .

16. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + 2y = x .$$

Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich?

17. Finden Sie eine Lösungsbasis zur Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}y''' - 3y'' + 6y' = 4y .$$

## 24.2 Lösungen

1. Zunächst einmal ist  $W \subset \mathbb{R}^2$ . Seien weiter  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , d. h. es gilt:

$$x_1 + y_1 = 0 \quad \text{sowie} \quad x_2 + y_2 = 0 .$$

Es ist  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$ , denn  $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ . Und weiter  $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in W$ , denn  $(\lambda x_1) + (\lambda y_1) = \lambda(x_1 + y_1) = \lambda \cdot 0 = 0$ .

- 2.

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$$

Da wir aus der definierenden Gleichung  $x + y = z$  zwei Parameter (z. B.  $x$  und  $y$ ) frei wählen können, erwarten wir auch eine Basis aus zwei Vektoren. Es sind  $\vec{v}_1 := (1, 0, 1)$  und  $\vec{v}_2 := (0, 1, 1) \in W$ . Diese sind linear unabhängig, denn aus  $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$  folgt  $\lambda = 0$  aus der ersten Komponente, aber  $\lambda = 1$  aus der dritten. Weiterhin spannen  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$   $W$  auf: Dazu stellen wir einen beliebigen Vektor  $(x, y, z) \in W$  als Linearkombination der beiden Vektoren dar.

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) \\ &= x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 . \end{aligned}$$

3.  $L$  operiert auf einem Vektorraum ( $\mathbb{R}^2$ ). Wir prüfen die Eigenschaften

$$\begin{aligned} L(\vec{v} + \vec{w}) &= L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \\ L(\lambda \vec{v}) &= \lambda L(\vec{v}) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} L(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}) &= \begin{pmatrix} 3(x + \tilde{x}) \\ (x + \tilde{x}) - (y + \tilde{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + 3\tilde{x} \\ x - y + \tilde{x} - \tilde{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x \\ x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\tilde{x} \\ \tilde{x} - \tilde{y} \end{pmatrix} \\ &= L(x, y) + L(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{und} \\ L(\lambda x, \lambda y) &= \begin{pmatrix} 3(\lambda x) \\ \lambda x - \lambda y \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 3x \\ x - y \end{pmatrix} \\ &= \lambda L(x, y) . \end{aligned}$$

Die beiden Eigenschaften sind für alle  $x, \tilde{x}, y$  und  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$  erfüllt. Somit ist  $L$  linear.

4. Wir stellen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Als Gleichungssystem

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

folgt  $b = \frac{7}{6}$  und  $3a = 1 - 3b$ , also  $a = \frac{1}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$ . Für das Bild von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  unter  $L$  folgt dementsprechend

$$\begin{aligned} L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= L\left(a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= aL\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + bL\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{5}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

5. Für das Bild von  $L$  stellen wir den Ergebnisvektor um:

$$\begin{pmatrix} 3x \\ x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Somit ist das Bild von  $L$  der von den Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannte Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$ .

Der Kern von  $L$  ist

$$\text{Kern } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 3x \\ x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Aus der ersten Komponente folgt  $x = 0$ , aus der zweiten  $y = x$ , also insgesamt

$$\text{Kern } L = \vec{0} \subset \mathbb{R}^2 .$$

6. Es ist

$$\begin{aligned} L(\vec{e}_1) &= L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{31} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

also  $a_{11} = 3$ ,  $a_{21} = 1$  und  $a_{31} = 1$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} L(\vec{e}_2) &= L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{32} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = -1$  und  $a_{32} = 0$  sowie

$$\begin{aligned} L(\vec{e}_3) &= L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also  $a_{13} = 0$ ,  $a_{23} = 0$  und  $a_{33} = 0$ . Insgesamt folgt, dass die lineare Abbildung  $L$  durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird.

7. Matrixmultiplikation ergibt:

$$AB = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2\alpha + 1 \\ 0 & 0 & 4\alpha + 4 \end{pmatrix}.$$

Es muss also  $-2\alpha + 1 = 0$  und  $4\alpha + 4 = 6$  gelten, woraus  $\alpha = \frac{1}{2}$  folgt.

8.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

hat die eindeutige Lösung

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

9. Wir entwickeln die Determinante nach der dritten Spalte, da dort die meisten Einträge null sind:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right) - \left( 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3(1 \cdot 12 - 3 \cdot (-21)) - (3 \cdot (-8) - 2 \cdot (-2)) \\ &= -225 + 20 = -205. \end{aligned}$$

10. Wir prüfen die lineare Unabhängigkeit mithilfe der Determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1^2 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 3 + 3 + 4 + 2 - 3 + 6 = 15 \neq 0. \end{aligned}$$

Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

11. Zur Normalisierung eines Vektors teilen wir diesen durch seine Norm:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5, & \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \|\vec{v}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9} = 3, & \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Kosinusformel zur Winkelbestimmung.

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \frac{-10}{5 \cdot 3} = -\frac{2}{3}.$$

12. Der erste Vektor ist bereits normiert:  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ . Der zweite Vektor ergibt sich nach Schmidt, indem wir  $\vec{v}_2$  in die Ebene senkrecht zu  $\vec{u}_1$  projizieren:

$$\vec{u}_2^* = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch dieser ist schon normiert:  $\vec{u}_2 = \vec{u}_2^*$ .

$\vec{v}_3$  muss senkrecht zu  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  projiziert werden:

$$\begin{aligned} \vec{u}_3^* &= \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieser ist ebenfalls normiert und wir erhalten als Orthonormalbasis die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^3$ , allerdings in umgekehrter Reihenfolge.

13. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-3 - \lambda)(6 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6 - \lambda \\ &= (6 - \lambda)((-3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1) \\ &= (6 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \\ &= (6 - \lambda)(-2 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Die Matrix hat also die Eigenwerte 6 und  $-2$ . Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 6 mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} A - 6E &= \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} -9 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -9 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $y = 1$  erhalten wir als Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Berechnung der ein bis zwei linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert  $-2$ :

$$A + 2E = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da es nur eine Nullzeile gibt, werden wir auch nur einen linear unabhängigen Eigenvektor finden, nämlich mit  $z = 1$  den Eigenvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Als Letztes muss noch der Hauptvektor zum Eigenwert  $-2$  bestimmt werden. Dazu lösen wir das Gleichungssystem  $(A + 2E)^2 \vec{w} = \vec{0}$ :

$$(A + 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 64 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mit der Wahl  $z = 1$  ist ein zu  $\vec{v}$  linear unabhängiger Hauptvektor gegeben durch  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Beliebige Linearkombinationen von  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind ebenfalls Hauptvektoren zum Eigenwert 1.

Insgesamt bilden die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis aus Hauptvektoren.

14. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 25 \\ &= -21 + 4\lambda + \lambda^2 \\ &= (\lambda + 7)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert  $-7$  mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} A + 7E &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $y = 1$  erhalten wir als Eigenvektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 3 mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} A - 3E &= \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $y = 1$  erhalten wir als Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Damit haben wir

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit der Inversen} \quad S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich als diagonalisierte Matrix

$$\begin{aligned} D = SAS^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

15. Es ist

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A := \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung. Zum Lösen des homogenen Teils  $y' + 2y = 0$  verwenden wir den Exponentialansatz. Dieser liefert nach dem Einsetzen von  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$  in die DGL:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}(\lambda + 2) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= -2 \\ \Rightarrow \{y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x}\} &\text{ ist Lösungsbasis.} \end{aligned}$$

Zum Finden einer partikulären Lösung wählen wir den Ansatz  $y_p(x) = ax + b$  mit Ableitung  $y_p'(x) = a$ . Einsetzen in die inhomogene DGL ergibt:

$$\begin{aligned} a + 2ax + 2b &= x \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow y_p(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + ce^{-2x} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

17. Das charakteristische Polynom von

$$\frac{1}{2}y''' - 3y'' + 6y' = 4y.$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda &= 4 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 2)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Es hat also die dreifache Null  $\lambda = 2$  und somit bildet  $y_1(x) = e^{2x}$ ,  $y_2(x) = xe^{2x}$ ,  $y_3(x) = x^2e^{2x}$  eine Lösungsbasis der Differenzialgleichung.

# Vom Umgang mit Prüfungen

Irgendwann in Laufe eines Semesters schwindet die Freude am Studentenleben und Prüfungen stehen vor der Tür, sei es als Klausur oder als mündliche Prüfung. An vielen Institutionen ist es insbesondere bei den Ingenieuren so, dass zuerst einmal Klausuren geschrieben werden. Wenn Sie dort — hinreichend oft — durchgefallen sind, steht dann meist als letzte Chance eine mündliche Prüfung an. Nachstehend wollen wir darauf eingehen, was Sie machen können, um auch nach der Prüfung und sei es auch die letzte Chance gewesen, mit einem entspannten Lächeln durch die Gegend zu laufen.

Bitte lesen Sie diesen Abschnitt genau, denn wir haben die Erfahrung aus hunderten mündlicher Prüfungen aller Art, durch unsere Klausuren wurden bereits mehrere tausend Studierende geprüft und studiert haben wir ja auch. Wir wissen also, worauf es ankommt und wo die vermeintlichen Fallen sind. Nun genug der strengen Worte, aber unsere Erfahrung zeigt, dass zu viele gute Ratschläge gerne überhört werden, was dann oft zu großer Frustration — oder gar einer Zwangsbeendigung des Studiums — führt, was wir Ihnen sehr gerne ersparen möchten.

Der grundlegende Tipp lautet:

*Bereiten Sie sich ordentlich und gewissenhaft vor!* Das klingt vielleicht banal und hat sich im Laufe vieler Studentenleben sicher etwas abgenutzt, wird aber tatsächlich gerne übersehen. Es gibt sehr viele Studierende, die als Löwe mit wenig Vorbereitung (aber viel Selbstvertrauen) in die Prüfung gehen und dann als Maus um eine letzte Chance bitten . . .

Sie sind selbst in der Lage zu erkennen, ob Sie gut vorbereitet sind! Dazu können Sie sich folgende Fragen stellen:

- Habe ich die Hausaufgaben so gut wie möglich eigenständig gelöst?
- Habe ich Skript und Vorlesungsmitschrift, wenn ja, nur in der Tasche oder aktiv damit gearbeitet?
- Habe ich alte Klausuren aus vorherigen Kursen und Beispielaufgaben zur

Vorbereitung gelöst?

- Kann ich Verständnisfragen beantworten (die in einigen Klausuren in einem gesonderten Teil abgefragt werden)?
- Kenne ich die Modalitäten für die Prüfung (wie lange wird geschrieben; welche Hilfsmittel dürfen verwendet werden; wie kann ich mich gefahrlos abmelden, wenn ich merke, es nicht zu schaffen oder krank werde; kann die Prüfung unterbrochen werden, wenn ich nach fünf Minuten merke, dass ich trotz meiner Kenntnisse einen Blackout habe ...)?
- Habe ich mich vorschriftsgemäß für die Prüfung angemeldet (Sie glauben gar nicht, wie viele Studierende eine Prüfung einfach so verbummeln. Und Prüfungsämter sind meist nicht der nette Kumpel, der es Sonderregelungen regnen lässt)?

Natürlich, es gibt Prüfungen und Prüfer, die einem gar nicht liegen. So what? Dann nochmal. *Fallen ist keine Schande, aber Liegenbleiben.* Die größte Verantwortung liegt bei Ihnen. Lassen Sie sich von (wenn möglich guten) anderen Studierenden abfragen und verbringen Sie auch gerne in einer Lerngruppe einige Zeit. Und bitte, fragen Sie die für Ihren Kurs Verantwortlichen aus. Diese haben immer eine Sprechstunde, die ein einzigartiges Angebot für eine Art Gratisfragestunde ist.

## Welcher Prüfer?

Wir betonen: Sie können grundsätzlich davon ausgehen, dass alle Prüfer fair und objektiv sind, das Ergebnis also von Ihnen abhängt. Ja, wir wissen, dass es auch unter uns ein paar schwarze — oder zumindest dunkler erscheinende — Schafe gibt. Wenn Sie eine Klausur schreiben müssen, dann haben Sie zumeist keine Wahl, denn der Chef der Veranstaltung ist für die Klausur verantwortlich. U. a. aus Zeitgründen macht es meist wenig Sinn, einfach ein Semester zu warten, bis ein anderer Chef die Klausur stellt, der könnte Ihnen dann am Ende auch gar nicht liegen ... Bei mündlichen Prüfungen ist das anders, da stehen meist mehrere Prüfer zur Verfügung. Dort ist dann gewöhnlich auch ein Beisitzer dabei, der u. a. die abgefragten Themen protokolliert, um gewisse Nachvollziehbarkeit der Prüfung zu gewährleisten. *Niemand, der ordentlich vorbereitet ist, wird durchfallen, auch wenn die studentische Gerüchteküche so etwas behaupten mag.*

Wählen Sie *so früh wie möglich* einen Prüfer aus und gehen in seine Sprechstunde. Achten Sie darauf, ob Sie mit dem Prüfer gut und ungezwungen ins Gespräch kommen (z. B. über den Ablauf der Prüfung) oder ob seine Art die sowieso schon vorhandene Aufgeregtheit in der Prüfung noch verstärken würde.

## Die Vorbereitung

Grundlegende Regeln haben wir bereits oben genannt und gehen daher nochmals gesondert auf den Fall ein, dass Sie ihre letzte Chance wahrnehmen müssen. Nachdem Sie durch die entsprechenden Prüfungsklausuren gefallen sind, gibt Ihnen die mündliche Prüfung nun die Möglichkeit zu zeigen, dass Sie den Stoff doch beherrschen. Fallen Sie auch durch dieses Netz, so ist im Regelfall jeglicher Hochschulstudiengang mit ähnlichen (oder höheren) Mathematikanprüchen in Deutschland verwehrt. Wollen Sie in Ihrem Studiengang bleiben, machen Sie sich bewusst, dass Sie diese Herausforderung meistern müssen und nehmen dies als Motivation, zu lernen wie noch nie zuvor.

Eine mündliche Prüfung ist üblicherweise theoretischer als eine Klausur. *Lernen Sie nach dem Skript und der Vorlesungsmitschrift*, rechnen Sie die Hausaufgaben noch einmal durch. Je sicherer Sie in dem Prüfungsstoff sind, desto weniger nervös werden Sie später in der Prüfung sein. Im Unterschied zu Klausuren wird neben dem *Rechnen* auch viel Wert auf die Formulierung von *Definitionen* und *Sätzen* sowie auf deren *Anschauung* gelegt.

Nochmals: Gehen Sie oft (und nicht erst in der letzten Woche vor der Prüfung) in die Sprechstunde(n), um Fragen und Verständnisprobleme zu klären. Das hat viele Vorteile:

- Der Prüfer sieht, dass Sie sich Mühe bei der Vorbereitung geben;
- Sie bekommen ein Gefühl dafür, was dem Prüfer wichtig ist;
- die Scheu, mit dem Prüfer zu reden, wird beseitigt.

Wenn es zu der Veranstaltung einen Assistenten gibt, kann dieser mit Ihnen in seiner Sprechstunde sicher gerne eine Prüfung simulieren.

Lassen Sie sich dann in ähnlichem Stil von (mathematisch) fähigen Studierenden abfragen. Wählen Sie dafür jemanden, der selbst in dem Thema sicher ist und mit dem die notwendige Disziplin (*nicht* auf die nächste Party zu gehen oder bei einem Bier über den Sinn des Lebens zu philosophieren) aufrecht erhalten werden kann.

## Prüfungsangst?!

Klausuren und mündliche Prüfungen gelten an der Universität und Fachhochschule als eine etablierte Methode der Leistungsermittlung, mit denen jeder Studierende früher oder später konfrontiert wird. Bei vielen Studierenden steigt jedoch die Anspannung in oder vor der Prüfung derart, dass die in der Prüfung erbrachten Leistungen entscheidend verschlechtert werden oder sogar die Prüfung

abgebrochen werden muss. Diese Prüfungsangst sollte daher nicht auf die leichte Schulter genommen werden. Gerade wenn es sich bei der bevorstehenden Prüfung um den letzten Versuch handelt, ist der Druck besonders hoch.

*Also ganz wichtig:* Wenn Sie Probleme mit Prüfungsangst haben, dann lassen Sie sich vorher gut beraten. Eigentlich haben alle Universitäten und Fachhochschulen einen psychologischen Dienst. Dort sind Profis, die Antworten haben. Scheuen Sie sich nicht davor, diese zu konsultieren. Es gibt leider zu viele, die behandelbare Ängste haben, es sich aber zu spät eingestehen oder gar ganz ignorieren. Es wäre mehr als schlimm, wenn Ihr Studium und ein Teil Ihrer Zukunft daran scheiterte, dass Sie sich nicht helfen lassen!

## Zur schriftlichen Prüfung

Hier ist es ganz wichtig, dass Sie sich die Aufgaben genau ansehen. Es zwingt Sie keiner dazu (und Sie sollten das selbst auch nicht machen), mit der ersten Aufgabe zu beginnen und dann alle ihrer Nummer nach zu lösen. Daher bitte erst eine Aufgabe nehmen, die Ihnen gut liegt. Dann ist die erste Aufregung weg und was Ihnen vorher unlösbar schien, ist dann meist nicht mehr so dramatisch. Die Lösungen einiger Aufgaben leben davon, dass Sie wirklich exakt lesen, was eigentlich gefordert wird, manchmal verbergen sich gar kleine Tipps in den Aufgabenstellungen.

Es mag aber auch immer mal eine Aufgabe geben, die Sie nicht lösen können. Das ist *kein* Drama. Nutzen Sie die Zeit dann besser zur Perfektionierung der Lösungen zu den anderen Aufgaben. Wenn am Ende noch Zeit verbleibt, geben Sie nicht vor dem eigentlichen Ende ab. Überprüfen Sie lieber Ihre Rechnungen, denn auch flüchtige Fehler werden mit einem kleinen Punktabzug bestraft, was sich durchaus summieren kann.

Bereiten Sie sich vor, indem Sie bereits zur Klausur ausreichend Papier mitbringen, auf dem Name und Matrikelnummer stehen oder was sonst noch wichtig sein mag wie z. B. der Dozent und Kurs. Das Versehen der Seiten mit einer Nummer macht Ihnen und den Korrektoren die Orientierung leichter. Alles das trägt dazu bei, dass Sie die Klausur ruhiger und strukturierter angehen können. Wie oft ist es uns schon passiert, dass ein Student am nächsten Tag mit einem Blatt kam, das er aus einem Versehen heraus nicht abgegeben hat. Es gab sicher Fälle, in denen das die Wahrheit war. Bewerten lässt sich das aber dennoch nicht. Solche Fälle gilt es zu verhindern. Und noch eine Bitte: Schreiben Sie so ordentlich wie möglich, denn hier kommt Psychologie ins Spiel! Stellen Sie sich dazu vor, dass Sie bereits acht Stunden in einem Raum mit vielen anderen gesessen haben, auf einem unbequemen Holzstuhl und dann ein gewaltiges Geschmiere vor sich haben. Möchten Sie dann darin noch nach guten Ideen suchen, wenn Sie nicht mal die Schrift anständig lesen können?

Nach der Korrektur gibt es gewöhnlich eine Einsicht in die Klausur. Bitte zählen Sie hier die vergebenen Punkte und schauen Sie nach, ob wirklich alles korrigiert wurde! Es kommt nicht so selten vor, dass im Gefecht langer Korrektursessions einzelne kleine Teile — auch wegen des miesen Schriftbildes — übersehen werden.

Und wenn es dann am Ende nicht geklappt hat? Seien Sie ehrlich zu sich. Wenn von 40 Punkten 20 zum Bestehen erreicht werden müssen und Sie 19 haben, so fehlt Ihnen — um unseren lieben Kollegen Paul Peters zu zitieren — genau genommen nicht ein Punkt, sondern es fehlen eigentlich 21. Klingt komisch (oder gar gemein), ist aber so, nur anders betrachtet. Dann nicht verzagen, beim nächsten Versuch sind Sie dann hoffentlich genug gewarnt und schaffen es!

## Zur mündlichen Prüfung

Eine mündliche Prüfung findet gewöhnlich im Büro des Prüfers statt. Zugewogen ist neben Prüfling und Prüfer meist noch ein Beisitzer, welcher das Protokoll führt. Eine gewisse Nervosität kann wahrscheinlich niemand vermeiden, doch falls die Panik derart groß sein sollte, dass Sie sich zur Prüfung außerstande fühlen, sollten Sie dies dem Prüfer zu Beginn mitteilen; dann kann die Prüfung verlegt werden. (In solchen Fällen sollten Sie allerdings den oben stehenden Hinweis über Prüfungsangst beherzigen.)

Die mündliche Prüfung läuft gewöhnlich so ab, dass der Prüfer Ihnen eine Frage zum Thema stellt, die Sie dann auf einem Blatt Papier beantworten können. Bei kleineren Problemen mit der Aufgabe wird er etwas helfen. Bald kommt dann die nächste Frage, oft über ein anderes Thema, um ein breites Gebiet abzudecken. Das geht so lange, bis die Zeit um ist (was subjektiv sehr rasch geht) und dann werden Sie meist gebeten, vor der Tür zu warten, damit Prüfer und Beisitzer die Note festlegen können. Diese wird Ihnen dann mit einer kleinen Begründung mitgeteilt und dann ist alles (hoffentlich gut) überstanden.

Einige Prüfer überlassen Ihnen auch die Wahl des Einstiegsthemas. Es ist also sinnvoll, vorher zu überlegen, welches Thema Ihnen liegt. Versuchen Sie nicht, mit einem schwierigen Einstiegsthema Eindruck zu schinden, welches Sie doch nicht gut können. Wählen Sie immer ein Kapitel, welches Sie souverän beherrschen.

Die mündliche Prüfung ist keine Klausur; Sie sind der Aufgabenstellung nicht hilflos ausgeliefert, sondern können (und sollten) es dem Prüfer sagen, wenn Sie einen Teil der Aufgabe nicht verstehen oder lösen können.

Außerdem herrscht nicht ein solcher Zeitdruck wie in einer Klausur, also hetzen Sie nicht.

Wichtig ist, dass Sie dem Prüfer Feedback liefern, also lassen Sie ihn an Ihren Überlegungen teilhaben. So kann er Ihnen helfen, falls Sie auf dem Holzweg sind.

Haben Sie zu einer gestellten Aufgabe gar keinen Plan, geben Sie dies nicht erst nach zehnmütigem Herumraten zu. So bleibt Zeit, um Ihr Wissen auf anderen Gebieten zu demonstrieren.

# Literatur und Schlussbemerkungen

Wohl kein neues Buch zu den hier behandelten Themen kann vom mathematischen Inhalt her etwas wirklich Neues bieten, denn es handelt sich wesentlich um Standardstoff, der zum Studienanfang gehört. Aufgabe der Autoren ist es, das Ganze gegebenenfalls neu zu beleuchten, sinnvoll zu ordnen und allem einen eigenen Stil zu geben, der möglichst viele Vorteile beim Verstehen und Lernen bringt. Wir profitierten dabei von anderen Autoren, Kollegen, Studierenden und Kritikern (die teils sogar zur konstruktiven Sorte gehörten).

Einige der Bücher unten sind Standardwerke, aus anderen lernten wir selbst, andere sollten Sie vielleicht gesehen haben, wenn Sie mehr Mathematik brauchen und möchten; zur Orientierung gibt es kurze Kommentare:

- **A. Beutelspacher, Lineare Algebra** (Vieweg+Teubner, 2006)  
Ein Buch, welches einen verbindlichen und freundlichen Stil hat.
- **„Der Bronstein“**.  
Sagen Sie nichts. Uns ist klar, dass sich dies nicht wirklich als vollständige Literaturempfehlung verwenden lässt. Aber begeben Sie sich bitte selbst auf die Suche. Das Buch gab es über die Jahre von vielen Verlagen, in vielen Sprachen und abenteuerlichen Papierqualitäten. Aber der Ingenieur muss es haben, alle anderen sollten. Jeder Mitarbeiter einer wissenschaftlichen Buchhandlung müsste es aus dem Ärmel ziehen können. Leider ist im Jargon der Nutzer diese Buches der Name des zweiten Autors verloren gegangen: K. A. Semendjajew.
- **R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1** (Springer, 1969)  
Ein Klassiker. Es halten sich Gerüchte, nach denen dieses Buch zu großen Teilen von Studierenden geschrieben wurde. Wie auch immer, der auf dem Titel genannte Mathematiker ist einer der großen seines Faches gewesen, dem die Mathematik und Physik viel zu verdanken haben. Es liest sich eher wie ein Roman als wie ein Lehrbuch.

- **G. Fischer, Lineare Algebra** (Vieweg+Teubner, 2005)  
Ein absolutes Standardwerk. Nüchtern, wie Mathematik nun einmal sein kann. Aber lehrreich!
- **D. Ferus, Skript zur Analysis I für Ingenieure** (TU Berlin, 2007)  
Ein Skript, das die Lehre für Ingenieure an der TU Berlin stark geprägt hat, viele Beweise enthält und Erklärungen auf auch didaktisch hohem Niveau bietet. Einer der Autoren (M. Scherfner) hat nach diesem Skript Vorlesungen gehalten, was auch prägend für das vorliegende Buch war. (Ein Skript zur Linearen Algebra von Herrn Ferus ist kaum noch zu bekommen und wird auch leider nicht mehr verwendet.)
- **D. Ferus, Skript zu Differentialgleichungen für Ingenieure** (TU Berlin, 2007)  
Es gilt das, was zum anderen Skript von Herrn Ferus geschrieben wurde.
- **V. Mehrmann, J. Rambau, R. Seiler, Skript zur Linearen Algebra für Ingenieure** (TU Berlin, 2008)  
Dieses Werk wurde von R. Seiler begonnen und war auch erste inhaltliche Grundlage für ein System mit dem Namen „Mumie“, bei dem mit Computerunterstützung eine Ergänzung der Lehre erfolgt. Nach diesem Skript wird aktuell an der TU Berlin gelesen, sodass wir auch aus diesem Werk Anregungen bekommen haben.
- **O. Forster, Analysis 1** (Vieweg+Teubner, 2006)  
Ein absolutes Standardwerk. Nüchtern, wie Mathematik nun einmal sein kann. Aber lehrreich, wenn es auch teils an eine Definition-Satz-Beweis-Sammlung erinnert, dem Buch von Fischer nicht ganz unähnlich.
- **H. Heuser, Lehrbuch der Analysis 1** (Vieweg+Teubner, 2006)  
Ein wenig die moderne Variante des Courant, die viele Anwendungsbeispiele enthält.
- **K. Jänich, Lineare Algebra** (Springer, 2002).  
Ein Buch mit Teilen für Mathematiker und Physiker, das teils pfiffige Erklärungen bietet.
- **F. Reinhardt, H. Soeder, dtv-Atlas Mathematik, Bd. 1 & 2** (dtv-Verlag, 1998)  
Es ist nicht immer auf dem neuesten Stand, was z. B. Bezeichnungen angeht. Allerdings ist es ein kleines Rätsel, wie so viel wichtige Mathematik hübsch präsentiert in zwei so kleine Bände passt; es kann gar als gute Strandlektüre empfohlen werden.

# Index

- Abbildung, 41
- abgeschlossene Intervalle, 14
- Ableitung, 120
  - höhere, 128
- absolut konvergente Reihe, 93
- Additionstheoreme, 63
- adjungierte Matrix, 239
- alle bis auf endlich viele, 77
- Alternierend, 99
- alternierende harmonische Reihe, 99
- Anfangswertproblem, 343
- Ansatz vom Typ der rechten Seite, 341
- antisymmetrische Matrix, 239
- Approximation
  - durch Taylorpolynom, 151
- Aussage, 7
- Aussagenlogik, 7
  
- Basiswechsel, 297
- Beschleunigung, 128
- beschränkt, 81
- bestimmte Divergenz, 79
- Betrag, 30
- bijektiv, 43
- Bild, 41, 229
- Bildmenge, 41
- Binomialkoeffizient, 28
- Binomischer Satz, 28
  
- charakteristisches Polynom
  - einer DGL, 338
  - einer quadratischen Matrix, 314
  
- darstellende Matrix, 301
- de Morgan, 16
- Defekt, 231
- Definitionsbereich, 41
- Determinante, 264
  
- Dezimalbruchentwicklung, 94
- diagonalisierbar, 321
- Diagonalmatrix, 238
- Differenz von Mengen, 14
- Differenzialgleichungen, 331
- Differenzialgleichungssystem, 333
- Differenzialquotient, 120
- Differenzierbarkeit, 120
- Dimensionssatz, 231
- Divergenz, 79
- Drehmatrix, 290
- Dreiecksmatrix, 238
- Dreiecksungleichung, 24, 31
  
- Eigenraum, 312
- Eigenvektor, 311
- Eigenwert, 311
- Eigenwertgleichung, 311
- Einheitsmatrix, 232
- Einheitswurzeln, 33
- Element einer Menge, 11
- Entwicklungspunkt, 139, 151
- Epsilon-Umgebung, 77
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 247
- euklidischer Vektorraum, 283
- euklidisches Skalarprodukt, 283
- Eulerformel, 32
- Eulergleichung, 61
- Existenz- und Eindeutigkeitsatz, 129
- Exponentialansatz, 338
- Exponentialfunktion, 63, 131
  
- Fakultät, 28
- fast alle, 77
- Folge, 75
  - monoton fallend, 82
  - monoton wachsend, 82

- Fourierreihe, 196
- Fundamentalsatz der Algebra, 56
- Fundamentalsystem, 336
- Funktion, 41
  - beschränkt, 46
  - gerade, 46
  - monoton fallend, 46
  - monoton wachsend, 46
  - periodisch, 47
  - unbeschränkt, 46
  - ungerade, 46
- Funktionsgraph, 49
- ganze Zahlen, 13
- Gauß-Algorithmus, 250
- geometrische Reihe, 93
- geometrische Summe, 27
- Geschwindigkeit, 128
- gewöhnliche DGL, 333
- Grenzwert, 76
  - linksseitiger, 106
  - rechtsseitiger, 106
- griechisches Alphabet, 6
- halboffene Intervalle, 14
- harmonische Reihe, 95
- Häufungspunkt, 77
  - oberer und unterer, 111
- Häufungspunktprinzip, 83
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, 172
- Hauptvektoren, 318
- Hauptvektorgleichung, 318
- Hintereinanderausführung, 48
- homogene DGL, 333
- homogenes LGS, 249
- Imaginärteil, 29
- Induktion
  - vollständige, 10
- Infimum, 113
- inhomogene DGL, 333
- inhomogenes LGS, 249
- Inhomogenität, 249, 333
- injektiv, 43
- Integral
  - unbestimmt, 172
  - uneigentliches, 179
- Integralvergleichskriterium, 185
- Integration
  - Rechenregeln, 171
- integrierbare Funktionen, 170
- intelligentes Raten, 341
- Intervall
  - abgeschlossen, 14
  - halboffen, 14
  - offen, 14
  - uneigentlich, 14
- Inverse, 45
- inverse Matrix, 238
- Invertieren von Matrizen, 256
- Kartesisches Koordinatensystem, 30
- Kern, 229
- Kettenregel, 123
- Koeffizienten, 333
- komplexe Konjugation, 30
  - Rechenregeln, 31
- komplexe Zahlen, 13, 29
  - Polarkoordinaten, 32
- Komposition, 47, 48
- Konstanzkriterium, 127
- konvergente Majorante, 96
- konvergente Reihe, 93
- Konvergenz, 76
- Konvergenzgeschwindigkeit, 83
- Konvergenzradius, 141
- Koordinaten, 213
- Koordinatenabbildung, 298
- Koordinatenvektor, 298
- Kosinus, 60
- Kosinus Hyperbolicus, 66
- Kreuzprodukt, 272
- Kronecker-Symbol, 150
- l'Hospital, 133
- Laplacescher Entwicklungssatz, 265
- leere Menge, 13
- Leibniz-Kriterium, 99
- Limes superior und inferior, 78, 111
- linear abhängig, 217
- linear unabhängig, 217

- lineare Abbildung, 227
- lineare Hülle, 216
- lineares Gleichungssystem, 249
- Linearkombination, 215
- Logarithmische Ableitung, 186
- Logarithmus, 64
  - Rechenregeln, 65
- lokales Maximum, 112
- lokales Minimum, 112
- Lösungsbasis, 336
- Lösungsmenge, 250
- Lösungsraum, 336
  
- Majorantenkriterium, 96
- Matrix, 231
- Maximum, 112
  - differenzierbarer Funktionen, 160
- Maximumsnorm, 281
- Menge, 11
  - Adjunktivität, 16
  - Assoziativität, 16
  - Differenz, 14
  - Distributivität, 16
  - Idempotenz, 16
  - Kommutativität, 16
  - leere Menge, 13
  - Rechenregeln, 16
  - Regeln von de Morgan, 16
  - Schnitt, 14
  - Teilmenge, 15
  - Vereinigung, 14
- Minimum, 112
  - differenzierbarer Funktionen, 160
- Minorantenkriterium, 101
- Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, 126
- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 173
- Monotonie, 46, 82
- Monotoniekriterium, 82, 127
  
- natürliche Zahlen, 13
- Norm, 279
- Nullfolge, 76
- Nullstellensatz, 111
- Nullvektor, 211
  
- obere Schranke, 46
- offene Intervalle, 14
- Orientierung, 268
- orthogonal, 286
- orthogonale Abbildungen, 313
- orthogonale Matrix, 239, 289, 314
- orthonormal, 286
- Orthonormalisierungsverfahren, 285
  
- Partialsomme, 93
- partielle Integration, 176
- partikuläre Lösung, 256, 341
- Pascalsches Dreieck, 28
- Periodenlänge, 47
- Periodizität, 47
- Pol, 56
- Polarkoordinaten, 32
- Polynom, 55
  - Grad, 55
- Potenzrechenregeln, 65
- Potenzreihe, 139
- Produktregel, 123
  
- Quotientenkriterium, 98
- Quotientenregel, 123
  
- Randpunkt eines Intervalls, 14
- Rang, 231
- rationale Funktion, 56
- rationale Zahlen, 13
- Realteil, 29
- reelle Zahlen, 13
- Regel von l'Hospital, 133
- Regel von Sarrus, 267
- Regeln von de Morgan, 16
- Reihe, 93
- Reihenkonvergenz
  - notwendige Bedingung, 95
- Rekursion, 265
- Restglied, 151
  - Lagrange'sche Darstellung, 152, 156
- Riemann-integrierbar, 168
  
- Schnitt von Mengen, 14
- Schranksatz, 126
- selbstadjungierte Matrix, 239

- Sinus, 60
- Sinus Hyperbolicus, 66
- Skalarprodukt, 282
- Spaltenindex, 231
- Spann, 216
- spezielle Lösung, 256, 341
- Stammfunktion, 171
- Standardbasis, 218
- Standardlösungsansatz, 337, 339
- Standardnorm, 280
- Standardskalarprodukt, 283
- stetig differenzierbar, 122
- Streichungsmatrix, 264
- Struktur der Lösungsmenge, 253
- stückweise differenzierbar, 122
- stückweise stetig, 109
- Substitutionsregel, 174
- Summe
  - geometrische, 27
- Summenzeichen
  - Rechenregeln, 26
- Superpositionsprinzip, 255
- Supremum, 113
- surjektiv, 43
- symmetrische Matrix, 239
  
- Tangens, 61
- Taylorpolynom, 151
- Taylorreihe, 153
- Teilmenge, 15
- Teleskopsumme, 35, 72
- transponierte Matrix, 238
  
- Umkehrabbildung, 45
- Umkehrfunktion
  - Ableitung, 123
- Umschreiben in ein System, 334
- uneigentliche Intervalle, 14
- uneigentliche Konvergenz, 79
- Ungleichungen, 24
- unitäre Matrix, 239
- unitärer Vektorraum, 284
- unitäres Skalarprodukt, 284
- untere Schranke, 46
- Untervektorraum, 218
- Urbild, 41
- Urbildmenge, 41
- Urbildpunkt, 42
  
- Vektorraum, 211
  - der reellen Zahlen, 212
  - der reellwertigen Funktionen, 214
- Vektorraumoperationen, 213
- Vereinigung von Mengen, 14
- Verkettung, 48
- Vielfachheit
  - algebraische, 316
  - geometrische, 313, 317
- vollständige Induktion, 10
  
- Wahrheitstabelle, 7
- Wahrheitswert, 7
- Wertebereich, 41
- Wronski-Matrix, 344
- Wronski-Test, 344
- Wurzelkriterium, 97
  
- Zeilenindex, 231
- Zwischenwertsatz, 112