

6.13 Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}$ hat den Konvergenzradius ∞ ,
denn sie wird durch die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|}$ dominiert.

Also ist sie gliedweise differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} x^k}{k \cdot k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{x} (e^x - 1) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$

In Integralschreibweise:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} = \int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{dx}{x} + C = \int \frac{e^x}{x} dx - \log |x| + C$$

mit einer Integrationskonstanten C , wie zu zeigen war.

Für das Restglied schätzen wir ab; $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x|^k}{k \cdot k!} \stackrel{k=k-n}{=} |x|^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|x|^l}{(l+n) \cdot (l+n)!} \leq \frac{|x|^n}{n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|x|^l}{l!} = \frac{|x|^n}{n \cdot n!} e^{|x|}$$

$\geq n \cdot n! \cdot l!$

6.16

Es gilt

$$\pi - \pi_n = 3 \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)}$$

Nun gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{k-\frac{1}{2}}{k} > 0, \text{ also auch } \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)} > 0$$

und damit $\pi - \pi_m > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Außerdem gilt für $n \geq m$:

$$0 \leq \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \prod_{k=m+1}^n \frac{k-\frac{1}{2}}{k} \leq \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2m+1}$$

$\in [0,1]$

$$\text{Es folgt: } \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)} \leq \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \frac{1}{4^m (2m+1)}$$

$\uparrow$
"für $n > m$ "

und daher

$$\pi - \pi_m = 3 \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)} < 3 \sum_{n=m}^{\infty} \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \frac{1}{4^m (2m+1)} = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \frac{1}{4^{m-1} (2m+1)} = \varepsilon_m$$

geometrische Summe:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^m (1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{3 \cdot 4^{m-1}}$$