

5.43: Einfache Variante: Sei f stetig. Dann ist f auch $|f|$ stetig, also Riemann-integrierbar. Es folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) \right| \stackrel{1. \text{ f stetig, } b>a}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) \right| \stackrel{\text{Dreiecksungl., Monotonie des Limes}}{=} \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Allgemeine Variante: Ist f Riemann-integrierbar, d.h. $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Riemann-integrierbar, so sind auch $|\operatorname{Re} f|$ und $|\operatorname{Im} f|$ Riemann-integrierbar wegen Aktivierungselement 5.70. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wir finden also Treppenfkt. $\underline{u}, \bar{u}, \underline{v}, \bar{v}$ mit

$$0 \leq \underline{u} \leq |\operatorname{Re} f| \leq \bar{u} \quad \text{und} \quad 0 \leq \underline{v} \leq |\operatorname{Im} f| \leq \bar{v} \quad \text{und} \\ \int_a^b (\bar{u}(x) - \underline{u}(x)) dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_a^b (\bar{v}(x) - \underline{v}(x)) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann sind auch $|\underline{u} + i \underline{v}|, |\bar{u} + i \bar{v}|$ Treppenfkt., und es gilt:

$$|\underline{u} + i \underline{v}| \leq |f| \leq |\bar{u} + i \bar{v}|$$

$$\text{ sowie } |\bar{u} + i \bar{v}| - |\underline{u} + i \underline{v}| \leq |(\bar{u} - \underline{u}) + i(\bar{v} - \underline{v})| \leq \bar{u} - \underline{u} + \bar{v} - \underline{v},$$

$$\text{ also } \int_a^b (|\bar{u} + i \bar{v}| - |\underline{u} + i \underline{v}|)(x) dx \leq \int_a^b (\bar{u} - \underline{u})(x) dx + \int_a^b (\bar{v} - \underline{v})(x) dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

kurznotation
für Kurvenläng

Also ist $|f|$ Riemann-integrierbar. Nun sei $\int_a^b f(x) dx = r e^{i\varphi}$, $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$, die Darstellung des Integrals in Polarkoordinaten. Dann folgt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = r = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} g(x) dx \leq \int_a^b |g(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

$\uparrow$
 $g(x) = e^{-i\varphi} f(x)$
 $r \in \mathbb{R}$

$\uparrow$
 $\operatorname{Re} g \leq |g|$

$\uparrow$
 $|g(x)| = |f(x)|$

□

5.44 Wir schreiben $\log n$, $n \in \mathbb{N}$, in der Form

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Es folgt: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{k}}_{= \frac{1}{k}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right)}_{\substack{\text{also auch } \in [0, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}] \\ \in [0, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}] \\ \text{für } x \in [k, k+1]}} dx$$

Teleskopsumme

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx$ wird also durch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$ dominiert und ist daher konvergent in $\mathbb{R}$.

Es folgt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \in \mathbb{R}. \quad \square$$