

5.27 Wir schreiben die Rechnungen in Differentialnotation auf:

1. Mit der Substitution $u = g(x)$ folgt:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \frac{du}{u} = d(\log u) = d(\log g(x))$$

$\Rightarrow F(x) = \log g(x)$ ist eine Stammfkt. von f .

2. Mit der Substitution $u = \log x$ folgt:

$$\frac{\log x}{x} dx = \underbrace{\log x}_{=u} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{=du} = u du = d\left(\frac{1}{2} u^2\right) = d\left(\frac{1}{2} (\log x)^2\right)$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (\log x)^2$ ist eine geeignete Stammfkt.

3. Mit der Substitution $u = \arctan x$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ folgt:

$$\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = e^u du = d(e^u) = d(e^{\arctan x})$$

$\Rightarrow F(x) = e^{\arctan x}$ ist eine geeignete Stammfkt.

4. Mit der Substitution $u = -x^2$, $du = -2x dx$ folgt:

$$x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^u du = d\left(-\frac{1}{2} e^u\right) = d\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)$$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ ist geeignet.

5. Mit der Substitution $u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\log \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} &= \log u du = d(u \log u - u) \\ &= d(\arcsin x \log \arcsin x - \arcsin x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = \arcsin x \log \arcsin x - \arcsin x$ ist geeignet.

6. Mit der Substitution $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ folgt:

$$\cot x dx = \frac{1}{\sin x} \cos x dx = \frac{du}{u} = d(\log u) = d(\log \sin x)$$

$\uparrow$
 $u > 0$

$\Rightarrow F(x) = \log \sin x$ ist geeignet.

7. Mit der Substitution $u = 2x$, $du = 2 dx$ folgt:

$$\sinh(2x) dx = \frac{1}{2} \sinh u du = d\left(\frac{1}{2} \cosh u\right) = d\left(\frac{1}{2} \cosh(2x)\right)$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cosh(2x)$ ist geeignet. $\square$

5.23. 1. $\int_0^a \arctan x \, dx = \int_0^a 1 \cdot \arctan x \, dx$

$= \left[x \arctan x \right]_{x=0}^a - \int_0^a x \frac{d}{dx} \arctan x \, dx$

Part. Integration, $1 = \frac{dx}{dx}$

$= a \arctan a - \int_0^a x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$

$= a \arctan a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} \frac{d}{dx} (1+x^2) \, dx$

$= a \arctan a - \frac{1}{2} \int_1^{1+a^2} \frac{1}{u} \, du = a \arctan a - \frac{1}{2} [\log u]_{u=1}^{1+a^2}$

Substitution $u = 1+x^2$
 für Grenzen: $x=0 \Rightarrow u=1$
 $x=a \Rightarrow u=1+a^2$

$= a \arctan a - \frac{1}{2} \log(1+a^2)$

Probe: $\frac{d}{dx} (x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+a^2))$

$= \frac{dx}{dx} \arctan x + x \frac{d}{dx} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{d \log u}{du} \Big|_{u=1+x^2} \cdot \frac{d(1+x^2)}{dx}$

$= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$

$= \arctan x$

2. $\int_0^a x \sin x \, dx = - \int_0^a x \frac{d \cos x}{dx} \, dx \stackrel{\text{part. Integration}}{=} - \left[x \cos x \right]_{x=0}^a + \int_0^a \frac{dx}{dx} \cos x \, dx$

$= -a \cos a + \left[\sin x \right]_{x=0}^a = \sin a - a \cos a$

Probe: $\frac{d}{dx} (\sin x - x \cos x) = \sin' x - \frac{dx}{dx} \cos x - x \frac{d}{dx} \cos x$

$= \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$

3. $\int_0^a \frac{2x}{1+x^4} \, dx = \int_0^{a^2} \frac{du}{1+u^2} = \left[\arctan u \right]_{u=0}^{a^2} = \arctan(a^2)$

Substitution $u = x^2$
 $du = 2x \, dx$

Probe: $\frac{d}{dx} \arctan(x^2) = \frac{d}{du} \arctan u \Big|_{u=x^2} \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \Big|_{u=x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$

5.35 1. $\int \frac{x^6}{x^4+4} \, dx = ?$

1. Schritt: Polynomdivision: $x^6 : (x^4+4) = x^2 - \frac{4x^2}{x^4+4}$

(Notation wie bei der schriftlichen Division von Zahlen)

$\frac{4x^2}{x^4+4}$ ← Zählergrad 2
 ← Nennergrad 4

Nullstellen des Nenners (in Polarkoordinaten): Für $r \geq 0, \varphi \in]-\pi, \pi]$ gelten die Äquivalenzen $(r e^{i\varphi})^4 = -4 = 4 e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 = 4, 4\varphi \in \pi + 2\pi \mathbb{Z}$

$\underbrace{r^4}_{=r^4} e^{i \cdot 4\varphi}$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2}, \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\} \Leftrightarrow r e^{i\varphi} \in \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$$

$\uparrow$
 $-\pi < \varphi \leq \pi, r \geq 0$

Damit haben wir die Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
konjugiert komplex konjugiert komplex

Wir suchen also eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x^2}{x^4 + 4} = \frac{c_1}{x - 1 - i} + \frac{c_2}{x - 1 + i} + \frac{c_3}{x + 1 - i} + \frac{c_4}{x + 1 + i}$$

äquivalent:

$$\begin{aligned} 4x^2 &= c_1(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i) \\ &\quad + c_2(x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i) \\ &\quad + c_3(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i) \\ &\quad + c_4(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i) \end{aligned}$$

Zu c_1 : Setzen wir $x = 1 + i$ ein:

$$4(1+i)^2 = c_1 \cdot 2i \cdot 2 \cdot (2+2i) \Leftrightarrow c_1 = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Zu c_2 : Setzen wir $x = 1 - i$ ein:

$$4(1-i)^2 = c_2 \cdot (-2i) \cdot 2 \cdot (2-2i) \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Zu c_3 : Setzen wir $x = -1 + i$ ein:

$$4(-1+i)^2 = c_3 \cdot (-2) \cdot (-2+2i) \cdot (2i) \Leftrightarrow c_3 = \frac{-1+i}{-2i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Zu c_4 : Setzen wir $x = -1 - i$ ein:

$$4(-1-i)^2 = c_4 \cdot (-2) \cdot (-2-2i) \cdot (2i) \Leftrightarrow c_4 = \frac{-1-i}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Damit ist gezeigt:

$$\frac{4x^2}{x^4 + 4} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)}{x - (1+i)} + \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{x - (1-i)} + \frac{\frac{1}{2}(-1-i)}{x - (-1+i)} + \frac{\frac{1}{2}(-1+i)}{x - (-1-i)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{4x^2}{x^4 + 4} dx &= \frac{1}{2}(1-i) \cdot \left[\frac{1}{2} \log((x-1)^2 + 1) + i \arctan \frac{x-1}{1} \right] \leftarrow \text{konj. konst.} \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+i) \cdot \left[\frac{1}{2} \log((x-1)^2 + 1) + i \arctan \frac{x-1}{-1} \right] \leftarrow \text{konj. konst.} \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1-i) \cdot \left[\frac{1}{2} \log((x+1)^2 + 1) + i \arctan \frac{x+1}{1} \right] \leftarrow \text{konj. konst.} \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1+i) \cdot \left[\frac{1}{2} \log((x+1)^2 + 1) + i \arctan \frac{x+1}{-1} \right] \leftarrow \text{konj. konst.} \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x-1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

$\leftarrow$ Integrationskonst.
verwendet $\arctan(-z) = -\arctan z$ ($z \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \int \frac{x^6}{x^4+4} dx = \int x^2 dx - \int \frac{4x^2}{x^4+4} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \log(x^2-2x+2) + \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x-1) - \arctan(x+1) + C$$

$$2. \int g(x) dx = ? \text{ mit } g(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2}$$

deg(Zähler) = 2
deg(Nenner) = 3
→ keine Polynomdivision
nötig.

Faktorisierung des Nenners:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Vielfachheit 2 Vielfachheit 1

Ansatz für Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{c_{11}}{x} + \frac{c_{12}}{x^2} + \frac{c_2}{x-1}$$

nach Multiplikation mit dem Nenner (links):

$$2x^2-2x+1 = c_{11}x(x-1) + c_{12}(x-1) + c_2x^2 \quad (1)$$

abgeleitet:

$$4x-2 = c_{11}(2x-1) + c_{12} + 2c_2x \quad (2)$$

zu c_{12} : (1) bei $x=0$: $1 = c_{12} \cdot (-1) \Rightarrow \underline{c_{12} = -1}$

zu c_{11} : (2) bei $x=0$: $-2 = -c_{11} + c_{12} = -c_{11} - 1 \Rightarrow \underline{c_{11} = 1}$

zu c_{22} : (1) bei $x=1$: $1 = c_2 \cdot 1 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$

Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

Integriert:

$$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^2(x-1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \log|x| + \frac{1}{x} + \log|x-1| + C$$

5.37

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

Euler-Substitution:

$$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\alpha = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\alpha \uparrow \pi \Rightarrow t \rightarrow \infty$$

$$\alpha \downarrow -\pi \Rightarrow t \rightarrow -\infty$$

Faktorisierung des Nenners: $(1+t^2)(3+t^2) = (t-i)(t+i)(t-\sqrt{3}i)(t+\sqrt{3}i)$

Ansatz Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{C_1}{t-i} + \frac{C_2}{t+i} + \frac{C_3}{t-\sqrt{3}i} + \frac{C_4}{t+\sqrt{3}i}$$

$$C_1 = \lim_{t \rightarrow i} (t-i) f(t) = \lim_{t \rightarrow i} \frac{(t-i)(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{1-i^2}{2i(3+i^2)} = -\frac{i}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-i)$$

z.B. mit l'Hôpital

konjugiert komplex dazu: $C_2 = \frac{i}{2}$

$$C_3 = \lim_{t \rightarrow \sqrt{3}i} (t-\sqrt{3}i) f(t) = \frac{1-(\sqrt{3}i)^2}{(1+(\sqrt{3}i)^2)(\sqrt{3}i+\sqrt{3}i)} = \frac{4}{-2 \cdot 2\sqrt{3}i} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

konjugiert komplex dazu: $C_4 = \frac{-i}{\sqrt{3}}$

$$\text{Also: } f(t) = \underbrace{-\frac{i}{2} \frac{1}{t-i} + \frac{i}{2} \frac{1}{t+i}}_{\frac{1}{t^2+1}} + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{1}{t-\sqrt{3}i} - \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{1}{t+\sqrt{3}i}}_{-\frac{2}{t^2+3}} \quad \begin{array}{l} \text{(komplexe} \\ \text{Partialbruchzerl.)} \\ \text{(reelle} \\ \text{Partialbruchzerl.)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \int f(t) dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{t^2+3} = \arctan t - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} - \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan \frac{t}{\sqrt{3}}]_{-\infty}^{\infty} = \pi - \frac{2}{\sqrt{3}} \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha} d\alpha = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \underline{\underline{2\pi - \frac{4}{\sqrt{3}} \pi}}$$

einladere Alternative:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha} d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{2}{2 + \cos \alpha} \right) d\alpha$$

$$= 2\pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2 + \cos \alpha} \stackrel{\uparrow}{=} 2\pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2 + \sin \alpha} \stackrel{\text{Bsp. 5.36}}{=} 2\pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

 $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, $\sin$ ist 2π -periodisch

5.39

Achtung: Bezieht sich auf s !

$$\int_1^2 \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\frac{1}{s}}^{2+\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2s^2}\right) ds}{\frac{1}{s}} = \int_1^{2+\sqrt{3}} \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2s}\right) ds =$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s}\right), dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2s^2}\right) ds, \\ y = \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right), x - y = \frac{1}{s} \\ x = 1 \Rightarrow s \rightarrow 1; \quad x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow s = x + y = 2 + \sqrt{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{s^2}{4} - \frac{1}{2} \log s \right]_1^{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})}} \end{aligned}$$