

5.7 Wir zeigen zuerst $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n-1)^2$ (k/n durch Induktion über n:

J.A., $n=0$: $\sum_{k=0}^{-1} k^3 = 0 = \frac{1}{4} 0^2 (0-1)^2$. Also gilt (k/n).

J.V.: Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, gelte (k/n) für dieses n. J.V.

J.S. $n \rightarrow n+1$: Es folgt: $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^3 \right) + n^3 \stackrel{\text{J.V.}}{=} \frac{1}{4} n^2 (n-1)^2 + n^3$
 $= \frac{1}{4} n^2 \underbrace{((n-1)^2 + 4n)}_{=(n+1)^2} = \frac{1}{4} (n+1)^2 n^2$, d.h. (k/n) gilt. $\square$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{ak}{n} \right)^3 = \left(\frac{a}{n} \right)^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \left(\frac{a}{n} \right)^4 \cdot \frac{1}{4} (n+1)^2 n^2 = \frac{a^4}{4} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n} \right)^2}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a^4}{4},$$

also

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (und damit für alle n gross genug) gilt:

$$\frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{ak}{n}} \stackrel{\text{geometrische Summe}}{=} \frac{a}{n} \frac{e^{i \frac{an}{n}} - 1}{e^{i \frac{a}{n}} - 1} = \frac{\frac{a}{n}}{\underbrace{e^{i \frac{a}{n}} - 1}_{= i \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}), n \rightarrow \infty}} (e^{ia} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{i}_{=-i}} (e^{ia} - 1)$$

Durch Real- und Imaginärteildbildung schließen wir (mit der Stetigkeit von $\text{Re}, \text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\cos \frac{ak}{n}}_{= \text{Re } e^{i \frac{ak}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Re}(-i(e^{ia} - 1)) = \text{Im}(e^{ia} - 1) = \sin a,$$

$$\frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sin \frac{ak}{n}}_{= \text{Im } e^{i \frac{ak}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Im}(-i(e^{ia} - 1)) = -\text{Re}(e^{ia} - 1) = 1 - \cos a.$$

$\square$