

4.31 Die quadratische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + k = 0$, also quadratisch

ergänzt $(\lambda + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - k < 0$ besitzt die Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\underbrace{\frac{p}{2}}_{=: u} \pm i \underbrace{\sqrt{k - \frac{p^2}{4}}}_{=: v}. \quad \text{Es folgt:}$$

$$\underbrace{\frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda_{\pm} x}}_{=: \lambda_{\pm}^2 e^{\lambda_{\pm} x}} + p \underbrace{\frac{d}{dx} e^{\lambda_{\pm} x}}_{=: \lambda_{\pm} e^{\lambda_{\pm} x}} + k e^{\lambda_{\pm} x} = \underbrace{(\lambda_{\pm}^2 + p\lambda_{\pm} + k)}_{=: 0} e^{\lambda_{\pm} x} = 0,$$

so dass jede Linearkombination

$$y(x) = c_+ e^{\lambda_+ x} + c_- e^{\lambda_- x} \quad (x \in \mathbb{R}, \quad c_{\pm} \in \mathbb{C})$$

ebenfalls die Differentialgl. $y'' + py' + ky = 0$ (*) erfüllt.

Jede Linearkombination $\alpha e^{ux} \cos(vx) + \beta e^{ux} \sin(vx)$ besitzt jedoch diese Gestalt:

$$\begin{aligned} \alpha e^{ux} \cos(vx) + \beta e^{ux} \sin(vx) &= \alpha e^{ux} \frac{1}{2} (e^{ivx} + e^{-ivx}) + \beta e^{ux} \frac{1}{2i} (e^{ivx} - e^{-ivx}) \\ &= \frac{\alpha - i\beta}{2} e^{\underbrace{(u+iv)x}}_{=: \lambda_+} + \frac{\alpha + i\beta}{2} e^{\underbrace{(u-iv)x}}_{=: \lambda_-}, \end{aligned}$$

Umgekehrt sei $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung (*).

Wir setzen $z := y' - \lambda_- y$, dann folgt

$$z' - \lambda_+ z = (y'' - \lambda_- y') - \lambda_+ (y' - \lambda_- y) = y'' - \underbrace{\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}}_{=: p} y' + \underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{=: k} y = 0$$

Es gilt also $z(x) = c e^{\lambda_+ x}$, ($x \in \mathbb{R}$), für eine konstante $c \in \mathbb{C}$,

d.h. $y'(x) - \lambda_- y(x) = c e^{\lambda_+ x}$, ($x \in \mathbb{R}$).

Weiter gilt ebenso:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \left(\frac{c e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) - \lambda_- \frac{c e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ &= \lambda_+ \frac{c e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - \lambda_-} - \lambda_- \frac{c e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - \lambda_-} = c e^{\lambda_+ x}, \end{aligned}$$

also erfüllt $y_0(x) := y(x) - \frac{c e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - \lambda_-}$ die Differentialgleichung

$y_0' - \lambda_- y_0 = 0$. Das bedeutet:

$y_0(x) = \tilde{c} e^{\lambda-x}$, ($x \in \mathbb{R}$), für eine konstante $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

Damit ist $y(x) = y_0(x) + \frac{c}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{\lambda_+ x} = \tilde{c} e^{\lambda-x} + \frac{c}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{\lambda_+ x}$, ($x \in \mathbb{R}$)
eine Linearkombination von $e^{\lambda_+ x}$ und $e^{\lambda_- x}$, also wegen

$$e^{\lambda_{\pm} x} = e^{ux} e^{\pm i vx} = e^{ux} (\cos(vx) \pm i \sin(vx))$$

auch eine Linearkombination von $e^{ux} \cos(vx)$ und $e^{ux} \sin(vx)$. $\square$

4.33 1. Es gilt:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \tan''(x) = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad \tan'''(x) = \frac{2}{\cos^3 x} - 6 \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$\left. \frac{d}{dx} (\tan x - x) \right|_{x=0} = 0, \quad \tan''(0) = 0, \quad \tan'''(0) = 2$$

und ebenso

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \tanh''(x) = -2 \frac{\sinh x}{\cosh^3 x}, \quad \tanh'''(x) = -\frac{2}{\cosh^3 x} + 6 \frac{\sinh^2 x}{\cosh^4 x}$$

$$\left. \frac{d}{dx} (\tanh x - x) \right|_{x=0} = 0, \quad \tanh''(0) = 0, \quad \tanh'''(0) = -2.$$

Es folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\tanh x - x} \stackrel{\substack{=0 \text{ für } x=0 \\ =0 \text{ für } x=0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan'(x) - 1}{\tanh'(x) - 1} \stackrel{\substack{=0 \text{ für } x=0 \\ =0 \text{ für } x=0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan''(x)}{\tanh''(x)} \stackrel{\substack{=0 \text{ für } x=0 \\ =0 \text{ für } x=0}}{=}$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan'''(x)}{\tanh'''(x)} = \frac{\tan'''(0)}{\tanh'''(0)} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \square$$

2. Alternativ: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)}$

$$\nearrow x \left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = x \left(1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right), \quad x \rightarrow 0$$

geometr. Reihe für Nenner

Ebenso: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)}{1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)}$

$\nearrow x \left(1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right), x \rightarrow 0$
 geometr. Reihe für Nenner

Es folgt für $x \rightarrow 0$:

$$\frac{\tan x - x}{\tanh x - x} = \frac{x \left(1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right) - x}{x \left(1 - \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right) - x} = \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^5)}{-\frac{x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{1 + O(x^2)}{-1 + O(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$$

□

4.34 Wir kürzen ab: $Q := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Zu zeigen ist: $\forall \varepsilon > 0 \exists N > M \forall b > N: \left| \frac{f(b)}{g(b)} - Q \right| < \varepsilon$.

Hier zu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir können $\delta > 0$ wählen, so dass für alle $u \in U_\delta(Q)$ und $v \in U_\delta(1)$ gilt: $\left| \frac{u}{v} - Q \right| < \varepsilon$. (1)

(Andernfalls gäbe es nämlich Folgen $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q$ und $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ mit $\frac{u_n}{v_n} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q$, ein Widerspruch.)

Wir wählen $a > M$ so groß, dass für alle $\xi > a$ gilt: $\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - Q \right| < \frac{\delta}{2}$. (2)

Nun wählen wir $N > a > M$ so groß, dass für alle $b > N$ gilt:

$$\left| \frac{g(a)}{g(b) - g(a)} \right| < \delta \quad (3) \text{ und } \left| \frac{f(a)}{g(b) - g(a)} \right| < \frac{\delta}{2}. \quad (4) \text{ Wegen } g(b) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty$$

ist so eine Wahl von N möglich.

Nun sei $b > N$ gegeben. Dann folgt:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(a) + (f(b) - f(a))}{g(a) + (g(b) - g(a))} = \frac{f(a) + (g(b) - g(a)) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}{g(a) + (g(b) - g(a))}$$

verallg. MWS
mit geeignetem $\xi \in]a, b[$

$$= \frac{\overbrace{\frac{f(a)}{g(b) - g(a)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}^{=: u}}{\underbrace{\frac{g(a)}{g(b) - g(a)} + 1}_{=: v}} = \frac{u}{v} \quad (5)$$

$$\text{Nun gilt } |u-Q| \leq \underbrace{\left| \frac{f(a)}{g(b)-g(a)} \right|}_{< \frac{\delta}{2} \text{ wg. (4)}} + \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - Q \right|}_{< \frac{\delta}{2} \text{ wg. (2)}} < \delta$$

$$\text{und } |v-1| = \left| \frac{g(a)}{g(b)-g(a)} \right| < \delta \text{ wegen (3), also}$$

$$\left| \frac{f(b)}{g(b)} - Q \right| \stackrel{\text{wg. (5)}}{=} \left| \frac{u}{v} - Q \right| \stackrel{\text{wegen (7)}}{<} \varepsilon. \quad \square$$