

4.27 1(a) Wir zeigen induktiv über $n \in \mathbb{N}_0$ für $x \in U$:

$$\frac{d}{dx} \prod_{j=1}^n g_j(x) = \sum_{k=1}^n g_k'(x) \prod_{j \in [n] \setminus \{k\}} g_j(x) \quad (1)$$

Beweis:

Induktionsanfang, $n=0$: Links in (1) steht die Ableitung des leeren Produkts $\prod_{j \in \emptyset} g_j(x) = 1$, und rechts die leere Summe.

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, gelte (1) dafür.

Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$:

Produktregel

$$\frac{d}{dx} \prod_{j=1}^{n+1} g_j(x) = \frac{d}{dx} \left[g_{n+1}(x) \prod_{j=1}^n g_j(x) \right] =$$

$$g_{n+1}'(x) \prod_{j=1}^n g_j(x) + g_{n+1}(x) \frac{d}{dx} \prod_{j=1}^n g_j(x) =$$

$$([n] \setminus \{k\}) \cup \{n+1\} = [n+1] \setminus \{k\}$$

$$g_{n+1}'(x) \prod_{j \in [n+1] \setminus \{n+1\}} g_j(x) + g_{n+1}(x) \sum_{k=1}^n g_k'(x) \prod_{j \in [n] \setminus \{k\}} g_j(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} g_k'(x) \prod_{j \in [n+1] \setminus \{k\}} g_j(x) \quad \square$$

$$(b) \frac{d}{dx} \prod_{j=1}^n g_j(x) = \frac{d}{dx} \exp \left(\sum_{j=1}^n \log g_j(x) \right) =$$

Kettenregel

$$\exp \left(\sum_{j=1}^n \log g_j(x) \right) \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^n \log g_j(x) =$$

$$\left(\prod_{j=1}^n g_j(x) \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k(x)} \cdot g_k'(x) =$$

$$\sum_{k=1}^n g_k'(x) \prod_{j \in [n] \setminus \{k\}} g_j(x), \text{ übereinstimmend mit (a).}$$

$$2. \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}} (x+1)^{-2} \right] = x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}} (x+1)^{-2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log (1-x) - 2 \log (1+x) \right]$$

$$= x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}} (x+1)^{-2} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{3(1-x)} - \frac{2}{1+x} \right]$$

4.22 Spezialfall $\beta=1, \alpha=-1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ist die Ableitung von } \arcsin x, x \in]-1, 1[.$$

allgemeiner Fall: Wir setzen $y = \frac{2x - \alpha - \beta}{\beta - \alpha} =: g(x)$,

$$\text{also } x = \frac{1}{2} [(\beta - \alpha)y + \alpha + \beta], \beta - x = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 - y), x - \alpha = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(y + 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} = \frac{2}{(\beta - \alpha)\sqrt{(1-y)(y+1)}} = \frac{2}{\beta - \alpha} \frac{d}{dy} \arcsin y$$

$$= \frac{2}{\beta - \alpha} \frac{dx}{dy} \frac{d}{dx} \arcsin \frac{2x - \alpha - \beta}{\beta - \alpha} = \frac{d}{dx} \arcsin \frac{2x - \alpha - \beta}{\beta - \alpha}$$

$\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{= \frac{\beta - \alpha}{2}}$

Wir können also $F(x) := \arcsin \frac{2x - \alpha - \beta}{\beta - \alpha}$, $\alpha < x < \beta$, wählen. $\square$

4.23 1a) $\cos x \cos y = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$

$$= \frac{1}{4} (e^{ix} e^{iy} + e^{-ix} e^{-iy} + e^{ix} e^{-iy} + e^{-ix} e^{iy})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} + \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \quad (1)$$

b) Aus dem Additionstheorem der Cosinus

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

folgt durch Bilden des arithmetischen Mittels:

$$\frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \cos x \cos y$$

2. Setzen wir $x=y$ in (1) ein, folgt mit $\cos 0 = 1$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [\cos(2x) + 1]. \text{ Für } a \in [0, 1] \text{ nehmen wir}$$

$$x \in [0, \pi] \text{ mit } \frac{1}{2} [\cos(2x) + 1] = a, \text{ also}$$

$$x = \frac{1}{2} \arccos(2a - 1) \in [0, \frac{\pi}{2}]. \text{ Es folgt:}$$

$\cos^2 x = a$, also $\cos x = \sqrt{a}$. Damit erhalten wir:

$$\sqrt{a} = \cos\left(\frac{1}{2} \arccos(2a-1)\right), \quad (a \in [0, 1])$$

3. $c^{\log_c a + \log_c b} = e^{(\log c) \cdot (\log_c a + \log_c b)} = e^{\log a + \log b}$

$\uparrow$
Def. d. Potenz

$\uparrow$
 $\log_c a = \frac{\log a}{\log c}, \log_c b = \frac{\log b}{\log c}$

$\uparrow$
 $= e^{\log a} e^{\log b} = a \cdot b \quad (a, b > 0) \quad \square$

Funktionalgleichung
von $\exp$

4.24 Es gilt für $x \in [-1, 1]$:

$$T_0(x) = \cos 0 = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x,$$

und für $n \in \mathbb{N}$, $y := \arccos x$:

$$\begin{aligned} & T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \\ &= \cos((n+1)y) + \cos((n-1)y) = \cos(ny+y) + \cos(ny-y) \\ &= \underbrace{(\cos(ny)\cos y - \sin(ny)\sin y)}_{\uparrow} + \underbrace{(\cos(ny)\cos y + \sin(ny)\sin y)}_{\uparrow} \end{aligned}$$

Additionstheorem des $\cos$

$$= \underbrace{2 \cos(ny)}_{= T_n(x)} \underbrace{\cos y}_{= x} = 2 T_n(x) x$$

Damit folgt die Rekursionsgleichung

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \square$$