

4.3. 1. Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ konstant mit dem Wert c , so folgt:

$$\lim_{h \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow x} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow x} 0 = 0.$$

2. Für $f, g \in V$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow x} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow x} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow x} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Also ist $f+g$ differenzierbar in x mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

3. Für $f \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow x} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow x} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\alpha \lim_{h \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f'(x).$$

Also ist αf differenzierbar in x mit $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$. □

4.5. Gegeben $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $x_n \neq x$, rechnen wir:

$$\frac{f(x_n)g(x_n) - f(x)g(x)}{x_n - x} = \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)} \underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x), \text{ weil } g \text{ stetig in } x \text{ ist}} + f(x) \underbrace{\frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(x)}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, wie zu zeigen war.

Sei $g(x) \neq 0$, so ist auch $g(x_n) \neq 0$ für alle n groß genug, und es folgt für diese n :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{x - x_n} &= \frac{f(x_n)g(x) - f(x)g(x_n)}{(x - x_n)g(x)g(x_n)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\underbrace{\frac{f(x_n) - f(x)}{x - x_n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)} g(x) - f(x) \underbrace{\frac{g(x_n) - g(x)}{x - x_n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(x)}}{g(x) \underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x), \text{ da } g \text{ stetig in } x \text{ ist}}} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \square$$

Zusatzannahme

4.7. Es gilt

$f(x_n) \neq f(x)$ für n groß genug, weil

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \rightarrow f'(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{x_n - x} &\stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{\frac{g(f(x_n)) - g(f(x))}{f(x_n) - f(x)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(f(x)), \text{ weil } f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ wegen der Stetigkeit von } f \text{ in } x}} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(f(x))f'(x) \quad \square \end{aligned}$$

4.9. Im Folgenden sei $x > 0$.

1. Fall: $s = n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad \text{wissen wir in diesem Fallschon.}$$

2. Fall: $s = -n$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{-n} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} \stackrel{\text{kettenregel}}{=} - \frac{1}{(x^n)^2} \frac{d}{dx} x^n = - \frac{1}{x^{2n}} \cdot n x^{n-1} \\ &= -n \cdot x^{-n-1} \end{aligned}$$

3. Fall: $s = \frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$

Die Abbildung $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto y = x^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{R}^+$ ist die Inverse zu $y \mapsto x = y^m$. Mit der Ableitungsformel für die Inverse folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{m}} &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{m y^{m-1}} = \frac{1}{m (x^{\frac{1}{m}})^{m-1}} \\ &= \frac{1}{m} x^{-\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}. \end{aligned}$$

4. Fall: allgemein: $s = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Hier gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{\frac{n}{m}} &= \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{m}} \right)^n \stackrel{\text{kettenregel}}{=} \frac{d(y^{\frac{1}{m}})}{dy} \frac{dy}{dx} = n \left(x^{\frac{1}{m}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} \\ &= \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1} \quad \square \end{aligned}$$

Handwritten notes:
- $y := x^{\frac{1}{m}}$
- $\frac{d(y^{\frac{1}{m}})}{dy} = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1}$
- $\frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} \xrightarrow{\text{3. Fall}}$
- $\frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} \xrightarrow{\text{1. Fall (n>0) bzw. 2. Fall (n<0)}}$

4.70. 1. $(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

2. a)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \left(\frac{d}{dz} e^z \right) \left(\frac{d}{dy} \sqrt{y} \right) \left(\frac{d}{dx} \log x \right) \\ &= e^z \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{x} \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ z = \sqrt{y}, y = \log x}}{=} e^{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} \stackrel{\substack{\uparrow \\ y = \log x}}{=} \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{2x\sqrt{\log x}} \end{aligned}$$

b) Es gilt: $f'(z) = e^z, z \in \mathbb{R},$
 $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, y > 0,$
 $h'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)'(x) &= f'(\underbrace{g(h(x))}_{=\log x}) \cdot g'(\underbrace{h(x)}_{=\log x}) \cdot h'(x) \\ &= e^{\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x} \quad \square \end{aligned}$$