

3.44 Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: (|x| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon)$$

Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen $\delta := \varepsilon^2 > 0$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ gegeben. Dann folgt:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon. \quad \square$$

$\uparrow$ $|x| < \delta$ $\uparrow$ $\delta = \varepsilon^2$

3.48 Gegeben $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in M$, folgt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$
 wegen der Folgenstetigkeit von $f: M \rightarrow M$. Mit $f(x_n) = x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$)
 können wir das auch als $x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ schreiben, was
 äquivalent zu $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ ist. Sowohl x als auch $f(x)$ sind also
 Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Mit der Eindeutigkeit des
 Grenzwerts schließen wir $f(x) = x$. $\square$

top. Abschluss in M
 $\downarrow$

3.50 1. $\Rightarrow$ 2. Es gelte 1. und es seien $A \subseteq M$ und $x \in M$ mit $x \in \overline{A}$
 gegeben. Zu zeigen ist $f(x) \in \overline{f[A]}$. $\leftarrow$ top. Abschluss in N
 Weil $f[A]$ abgeschlossen in N ist, ist $f^{-1}[f[A]]$ abgeschlossen
 in M wegen 1. (A) Weiter gilt

$$f[A] \subseteq \overline{f[A]} \\ A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}. \\ \uparrow \\ \neq \text{ist möglich, wenn } f \text{ nicht injektiv ist.}$$

Weil x Berührungspunkt von A ist, ist es erst recht ein Berührungspunkt
 von $f^{-1}[\overline{f[A]}. Mit (A) folgt $x \in f^{-1}[\overline{f[A]}]$, d.h.
 $f(x) \in \overline{f[A]}$, wie zu zeigen war.$

2. $\Rightarrow$ 1. Es gelte 2. und es sei $B \subseteq N$ abgeschlossen in N .

Zu zeigen ist: $f^{-1}[B]$ ist abgeschlossen in M . Hier zu sei $x \in M$
 ein Berührungspunkt von $f^{-1}[B]$. Zu zeigen ist: $x \in f^{-1}[B]$, d.h. $f(x) \in B$.

Das folgt so:

top. Abschluss in N

$$f(x) \in \overline{f[f^{-1}[B]]} \subseteq \overline{B} = B, \quad \text{da } B \text{ abgeschlossen in } N$$

↑
wegen z und $x \in f^{-1}[B]$

↑
 $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

↑
ist möglich, wenn f nicht surjektiv ist.

□

3.52 1. $\Rightarrow$ 2. Es gelte $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ in $\mathbb{C}$. Zu zeigen ist: f ist stetig in $+\infty$, d.h.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U von $+\infty$ in $N_0 \cup \{+\infty\}$ mit $f[U] \subseteq U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(\infty))$ (Beh.)

Hier zu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ finden wir ein $m \in N_0$, so dass für alle $n > m$ in N_0 gilt: $|a_n - b| < \varepsilon$, d.h. $f(n) \in U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(\infty))$. (1)

Nun ist $U :=]m, +\infty]$ eine offene Umgebung von $+\infty$ in $N_0 \cup \{+\infty\}$.

Die Aussage (1) zusammen mit $f(\infty) \in U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(\infty))$ zeigen die Behauptung (Beh.).

2. $\Rightarrow$ 1. Es sei $f: N_0 \cup \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $+\infty$. (2) Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m, n \in N_0: |a_n - b| < \varepsilon. \quad (\text{Beh. 1})$$

Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen Voraussetzung (2) finden wir eine offene Umgebung U von $+\infty$ in $N_0 \cup \{+\infty\}$ mit $f[U] \subseteq U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(b)$.

Nach der Definition offene Mengen in $N_0 \cup \{+\infty\}$ finden wir ein $m \in N_0$

mit $]m, +\infty] \subseteq U$. Dann folgt auch $f[]m, +\infty] \subseteq U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(\infty))$

anders geschrieben $\forall n > m, n \in N_0 \cup \{+\infty\}: \underbrace{f(n)}_{= a_n} - \underbrace{f(+\infty)}_{= b} < \varepsilon$.

Damit ist die Behauptung (Beh. 1) gezeigt. □