

3.76 1. Es gelte $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \rightarrow 0, x > 0$, wir finden also $C > 0$ und

$\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| \leq C x^{n+1}$ für $0 < x < \varepsilon$. Dann folgt

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{x^n} \leq \frac{C x^{n+1}}{x^n} = C x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ also erst recht } \frac{|f(x)|}{x^n} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0, x > 0.$$

$\uparrow$
für $0 < x < \varepsilon$

Das bedeutet $f(x) = o(x^n)$ für $x \rightarrow 0, x > 0$. $\square$

2. Es gelte $f(x) = o(x^n)$ für $x \rightarrow 0, x > 0$, d.h. $\frac{f(x)}{x^n} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0, x > 0$.

Dann finden wir $\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in]0, \varepsilon[$ gilt: $\frac{|f(x)|}{x^n} \leq 1$. Das bedeutet

$|f(x)| = o(x^n)$ für $x \rightarrow 0, x > 0$. $\square$

3.77 Wegen $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < r$ ist

zu zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0, C \geq 0 \quad \forall x \in U_{\varepsilon}^{\mathbb{C}}(0): \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq C |x|^{n+1}.$$

Hierzu nehmen wir irgendein $\varepsilon \in]0, r[$.

Es folgt für alle $x \in U_{\varepsilon}^{\mathbb{C}}(0)$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |x|^k \leq |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |x|^{k-n-1} \\ &= |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varepsilon^{k-n-1} = |x|^{n+1} \varepsilon^{-n-1} \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varepsilon^k}_{=: A < \infty} = |x|^{n+1} \underbrace{\varepsilon^{-n-1} A}_{=: C < \infty}. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\varepsilon < r$, Satz 3.27

Das bedeutet: $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| = o(x^{n+1})$

für $x \rightarrow 0, x > 0$. $\square$

3.78 Wir wissen $e^{-t} \ll t^{-n}$ für $t \rightarrow +\infty$ wegen $\frac{e^t}{t^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

Setzen wir hierin $t = \frac{1}{x}$ ein und bilden den Limes $x \rightarrow 0, x > 0$, also

$t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, t > 0$, folgt $0 < e^{-\frac{1}{x}} \ll x^n$ für $x \rightarrow 0, x > 0$, also

erst recht $e^{-\frac{1}{x}} = o(x^n)$ für $x \rightarrow 0, x > 0$.

3.79 Es gilt $y := e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ für $x \rightarrow 0$

Insekondem gilt $y = e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Setzen wir das in $\exp(y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^3)$ ($y \rightarrow 0$) ein:

$$\begin{aligned} \exp(e^x - 1) &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= 1 + x + x^2 + o(x^3) + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}_{= o(x^2)} + \underbrace{o(x^3)}_{= o(x^3)} \\ &= a + bx + cx^2 + o(x^3) \text{ für } x \rightarrow 0, x > 0 \text{ mit } 1 = a = b = c. \quad \square \end{aligned}$$

$$\underline{3.80} \text{ Aus } e^{\pm ix} = 1 \pm ix + \frac{1}{2!} (\pm ix)^2 + \frac{1}{3!} (\pm ix)^3 + \frac{1}{4!} (\pm ix)^4 + \frac{1}{5!} (\pm ix)^5 + \frac{1}{6!} (\pm ix)^6 + O(x^7) \\ = 1 \pm ix - \frac{1}{2} x^2 \mp \frac{1}{6} ix^3 + \frac{1}{24} x^4 \pm \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{720} x^6 + O(x^7), \quad x \rightarrow 0,$$

schreiben wir

$$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + O(x^7), \quad x \rightarrow 0,$$

und damit

$$1 - \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{720} x^6 + O(x^7) \\ = \frac{1}{2} x^2 \left(1 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right), \quad x \rightarrow 0.$$

Bilden wir den Kehrwert:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right)}, \quad x \rightarrow 0.$$

$\underbrace{\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5)}_{=: y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$

Mit dem Anfangsstück $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + O(y^3)$, $y \rightarrow 0$, der geometrischen Reihe folgt für $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right)} = 1 + \left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right) + \underbrace{\left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right)^2}_{= \frac{1}{12} x^2 + O(x^4)} \\ + O\left(\underbrace{\left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) \right)^3}_{= O(x^6)} \right) \\ = 1 + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{360} x^4 + O(x^5) + \frac{1}{144} x^4 + O(x^6) = 1 + \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{240} x^4 + O(x^5)$$

Fassen wir zusammen:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{240} x^4 + O(x^5) \right) = \\ = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} x^2 + O(x^3) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

3.81: Wir setzen das Anfangsstück der Exponentialreihe

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4), \quad x \rightarrow 0, \quad x > 0, \quad \text{in } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ein.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + O(x^3) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=: y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$$

Mit dem Anfangsstück der binomischen Reihe,

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=1} y^0 + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}} y^1 + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} = \frac{3}{8}} y^2 + O(y^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + O(y^3), \quad y \rightarrow 0$$

folgt eingesetzt für $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + O(x^3)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + O(x^3)\right) + \frac{3}{8} \underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + O(x^3)\right)^2}_{=\frac{x^2}{4} + O(x^3)} + \underbrace{O\left(\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + O(x^3)\right)^3\right)}_{=O(x^3)} \\ &= \frac{x^2}{4} + O(x^3) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} + O(x^3) + \frac{3}{32}x^2 + O(x^3) + O(x^3) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{1}{96}x^2 + O(x^3)$$

Zusammengefasst:

$$\frac{1}{\sqrt{e^{x-1}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{1}{96}x^2 + O(x^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{96}\sqrt{x^3} + O(\sqrt{x^5}) \quad \text{für } x \rightarrow 0, \quad x > 0!$$

$$\text{Also: } a = 1, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{96}.$$