

3.61. 1. Variante: Gegeben sind

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta^a(x) \cap M : f(y) \in U_\varepsilon^a(f(x)) \quad (1)$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta^a(f(x)) \cap N : g(y) \in U_\varepsilon^a(g(f(x))) \quad (2)$$

Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta^a(x) \cap M : g(f(y)) \in U_\varepsilon^a(g(f(x))) \quad (3)$$

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Mit (2) finden wir  $\eta > 0$  mit

$$\forall y \in U_\eta^a(f(x)) \cap N : g(y) \in U_\varepsilon^a(g(f(x))) \quad (4)$$

Mit (1) finden wir zu diesem  $\eta$  ein  $\delta > 0$  mit

$$\forall y \in U_\delta^a(x) \cap M : f(y) \in U_\eta^a(f(x)). \quad (5)$$

Gegeben  $y \in U_\delta^a(x) \cap M$  erhalten wir mit (5) und  $f: M \rightarrow N$

die Aussage  $f(y) \in U_\eta^a(f(x)) \cap N$  und mit (4) hieraus  $g(f(y)) \in U_\varepsilon^a(g(f(x)))$ .  $\square$

2. Variante: Es sei  $U$  eine offene Umgebung von  $g(f(x))$ .

Zu zeigen ist, dass es eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit

$$V \cap M \subseteq (g \circ f)^{-1}[U] \quad (*) \text{ gibt.}$$

Gegeben solch ein  $U$ , finden wir eine offene Umgebung  $W$  von  $f(x)$  mit  $W \cap N \subseteq g^{-1}[U]$  (1), weil  $g: N \rightarrow L$  in  $f(x)$  stetig ist.

Mit der Stetigkeit von  $f: M \rightarrow N$  in  $x$  finden wir eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $V \cap M \subseteq f^{-1}[W] = f^{-1}[W \cap N]$  (2). Es folgt:

$$(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]] \stackrel{\text{wg. (1)}}{\supseteq} f^{-1}[W \cap N] \stackrel{\text{wg. (2)}}{\supseteq} V \cap M.$$

Damit ist (\*) gezeigt.  $\square$

3. Variante: Gegeben eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , folgt

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  mit der Folgenstetigkeit von  $f$  in  $x$ , und hieraus

$$g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

mit der Folgenstetigkeit von  $g$  in  $f(x)$ .

Also ist  $g \circ f$  folgenstetig in  $x$ .  $\square$

4. Variante Gegeben sei:  $A \subseteq M$  mit  $x \in \bar{A}$ .  $\leftarrow$  top. Abschluss in  $M$

Dann folgt  $f(x) \in \overline{f[A]}$   $\leftarrow$  top. Abschluss in  $N$  wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $x$ , und hieraus

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \in \overline{g[f[A]]} = \overline{g[A]} \quad \leftarrow \text{top. Abschluss in } L$$

wegen der Stetigkeit von  $g$  in  $f(x)$   $\square$

3.627, Gegeben sind

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0, m \in \mathbb{N}_0 : |a_{n,m} - a_{n,\infty}| < \varepsilon \quad (1)$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0 : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \varepsilon \quad (2)$$

Wir zeigen:  $(a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$  ist eine Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall k, l \geq m_0, k, l \in \mathbb{N}_0 : |a_{\infty,k} - a_{\infty,l}| < \varepsilon. \quad (3)$$

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Mit (2) nehmen wir  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0 : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2')$$

Mit (1), angewandt auf  $n_0$  und  $\frac{\varepsilon}{4}$ , finden wir  $m_0 \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\forall m \geq m_0, m \in \mathbb{N} : |a_{n_0,m} - a_{n_0,\infty}| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1')$$

Nun seien  $k, l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k, l \geq m_0$  gegeben. Mit (2') schließen wir

$$|a_{n_0,k} - a_{\infty,k}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad |a_{n_0,l} - a_{\infty,l}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2'')$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} |a_{\infty,k} - a_{\infty,l}| &\leq \underbrace{|a_{n_0,k} - a_{\infty,k}|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ wg. (2'')}} + \underbrace{|a_{n_0,k} - a_{n_0,\infty}|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ wg. (1') und } k \geq m_0} + \underbrace{|a_{n_0,l} - a_{n_0,\infty}|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ wg. (1') und } l \geq m_0} + \underbrace{|a_{n_0,l} - a_{\infty,l}|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ wg. (2'')}} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist (3) gezeigt. Es folgt:

$$a_{\infty,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{\infty,\infty} \quad (4)$$

für ein  $a_{\infty,\infty} \in \mathbb{C}$ .

Wir zeigen nun, dass  $(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $(a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}$  konvergiert, d.h. dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \varepsilon \quad (5)$$

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Mit (2) finden wir  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0 : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2'')$$

Es folgt auch für alle  $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned} |a_{n,\infty} - a_{\infty,\infty}| &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} - \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\infty,m} \right| \\ &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (a_{n,m} - a_{\infty,m}) \right| \stackrel{\text{f. stetig}}{=} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{|a_{n,m} - a_{\infty,m}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ wg. (2'')}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Zusammen mit (2''') bedeutet das:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0 : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \varepsilon$$

Damit ist (5) gezeigt.  $\square$

2. Wegen (5) in Teil (7) wissen wir:

$$a_{\infty,\infty} \stackrel{(5)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,\infty} \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}$$

Andererseits:

$$a_{\infty,\infty} \stackrel{(4)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\infty,m} \stackrel{(5)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}$$

Schließlich zeigen wir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, n \geq n_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, m \geq m_0:$$

$$|a_{n,m} - a_{\infty,\infty}| < \varepsilon$$

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}$  gegen  $(a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}$  für  $n \rightarrow \infty$

finden wir ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} : |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

und hiermit auch

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, n \geq n_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}: |a_{n,m} - a_{\infty,m}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

$= 0 \text{ für } n = \infty$

Wegen  $a_{\infty,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{\infty,\infty}$  finden wir ein  $m_0 \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\forall m \geq m_0, m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}: |a_{\infty,m} - a_{\infty,\infty}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

wobei im Fall  $m = \infty$  nur  $|a_{\infty,\infty} - a_{\infty,\infty}| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$  da steht.

Nun seien  $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit  $n \geq n_0$  und  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit  $m \geq m_0$  gegeben. Dann folgt

$$|a_{n,m} - a_{\infty,\infty}| \leq \underbrace{|a_{n,m} - a_{\infty,m}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ wg. (6)}} + \underbrace{|a_{\infty,m} - a_{\infty,\infty}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ wg. (7)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□