

3.35 Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{j=n+1}^k \underbrace{\frac{1}{j}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} n^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{\infty} n^{-l} = \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n!} \frac{n}{n-1} = \frac{1}{(n-1) \cdot (n-1)!}$$

$\uparrow$ $l = k - n$ geometrische Summe, $|\frac{1}{n}| < 1$

Dies bedeutet:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n-1) \cdot (n-1)!}$$

Nun haben wir die Wertetabelle

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(n-1) \cdot (n-1)!$	1	4	18	96	600	4320	35280	322560	<u>3265920</u> > 10 ⁶

Es gilt also: $\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} + 10^{-6}$

Numerisch: $\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = \frac{98641}{36288} = 2,71828152557...$

Zum Vergleich: $e = 2,71828182845...$

3.37 1. Beweis des Lemmas von Fatou für Reihen:

Wir setzen $b_{n,i} := \inf_{j \geq i} a_{n,j} \in [0, +\infty]$ für $n, i \in \mathbb{N}_0$.

Insbesondere ist $b_{n,i}$ monoton steigend in i , d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 : b_{n,i+1} \geq b_{n,i}$$

wegen $\{a_{n,j} \mid j \geq i+1\} \subseteq \{a_{n,j} \mid j \geq i\}$, ($n, i \in \mathbb{N}_0$).

Zudem gilt $a_{n,i} \geq b_{n,i}$ (1) für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$ wegen $a_{n,i} \in \{a_{n,j} \mid j \geq i\}$.

und $\lim_{i \rightarrow \infty} b_{n,i} = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} b_{n,i} = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \inf_{j \geq i} a_{n,i} = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i}$ (2)

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} b_{n,i} = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i}$$

$\uparrow$ (1) monotone Konvergenz $\uparrow$ (2)
 Konvergenz in $\mathbb{R}$ ist gleichmäÙig

Wir schließen

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,i} = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i}, \text{ wie zu zeigen war. } \square$$

2. Mit $a_{n,i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) schließen wir $\overline{a_{n,i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \overline{b_n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$)

wegen $|\overline{a_{n,i}} - \overline{b_n}| = |a_{n,i} - b_n|$ ($n, i \in \mathbb{N}_0$), und daraus

$$|a_{n,i}|^2 = a_{n,i} \overline{a_{n,i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b_n \overline{b_n} = |b_n|^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Insbesondere gilt auch $\liminf_{i \rightarrow \infty} |a_{n,i}|^2 = |b_n|^2$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Mit dem Lemma von Fatou für Reihen schließen wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{i \rightarrow \infty} |a_{n,i}|^2 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,i}|^2 \leq \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,i}|^2$$

Fatou Komplexkonjugation

3. Beispiele:

a) Für $a_{n,i} := \delta_{n,i}$ (Kronecker-Delta), ($n, i \in \mathbb{N}_0$) gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = 1 \quad (i \in \mathbb{N}), \text{ also } \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = 1$$

Andererseits gilt

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0), \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 0.$$

Zusammengefasst schließen wir hier: $\sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 0 < 1 = \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}$

b) Das Beispiel $a_{n,i} := \delta_{n,i}$ aus a) bleibt ebenso gültig, wenn wir $\liminf$ durch $\limsup$ ersetzen:

$\liminf$ durch $\limsup$ ersetzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \limsup_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 0 < 1 = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}$$

c) Wir setzen $a_{n,i} := \begin{cases} 2^{-n} & \text{für gerades } n+i \\ 0 & \text{für ungerades } n+i \end{cases}$, wobei $i, n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 2^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$), also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \limsup_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \stackrel{\text{geometr. Reihe}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Andererseits gilt für alle geraden $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \stackrel{\text{geometr. Reihe}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

und für alle ungeraden $i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(2k+1)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

↑
geometr. Reihe

Wir schließen:

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = \frac{4}{3}$$

Zusammenfassung: Hier gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \limsup_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} = 2 > \frac{4}{3} = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} . \quad \square$$