

3.24 Mit der geometrischen Reihe gilt für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$:

$$1 - x^2 = |x|^2 < 1, \text{ also}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

wobei:

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_{2n} x^{2n}| = |x^{2n}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$,

so dass die Partialsummen der Reihe hier keine Cauchyfolge bilden. $\square$

3.25 1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+n)} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\leq \frac{1}{2}, \text{ weil } k \leq n$

Also wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ durch die konvergente geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

majorisiert, ist also selbst konvergent

mit einem Wert in $[0, 2]$. $\square$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

binomische Formel

$$0 \leq \binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} \stackrel{\downarrow}{=} (1+1)^{2n} = 4^n.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} g^{-n}$ wird also durch die konvergente geometrische

$$\text{Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} 4^n g^{-n} = \frac{1}{1-\frac{4}{g}} = \frac{g}{g-4} \text{ majorisiert, ist also konvergent}$$

mit einem Wert in $[0, \frac{g}{g-4}]$.

3. Die Summe der beiden konvergenten geometrischen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

$$\text{und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{2^n - 1} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

ist die gegebene Reihe, diese ist daher ebenfalls konvergent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot (-1)^n}{2^n - 1} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

3.26 wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

Induktionsanfang, $n=0$:

$$\sum_{k=1}^0 a_k (b_k - b_{k-1}) = 0 = \underbrace{a_0 b_0 - a_0 b_0}_{=0} - \underbrace{\sum_{k=0}^{-1} (a_{k+1} - a_k) b_k}_{=0}$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben, und es gelte

$$\sum_{k=1}^n a_k (b_k - b_{k-1}) = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k.$$

Induktionsschluss: Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k (b_k - b_{k-1}) &= a_{n+1} (b_{n+1} - b_n) + \sum_{k=1}^n a_k (b_k - b_{k-1}) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} a_{n+1} (b_{n+1} - b_n) + a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k \\ &= a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0 - (a_{n+1} - a_n) b_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k \\ &= a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war. $\square$

3.28 Gegeben $x \in \mathbb{C}$, und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4|x|^2$, schließen wir:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{n+1}} \left| \frac{x^n}{\sqrt{n!}} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{x^n}{\sqrt{n!}} \right|.$$

$\uparrow$
 $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \geq 2|x|$

Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$$

nach dem Quotientenkriterium. Diese Potenzreihe besitzt also den Konvergenzradius $+\infty$. $\square$

3.29 Gegeben seien $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dann wissen wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (\alpha - k) = \frac{\alpha - n}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \frac{\alpha - n}{n+1} \binom{\alpha}{n}$$

Nun gilt: $\frac{\alpha - n}{n+1} = -1 + \underbrace{\frac{\alpha + 1}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$, und daher

$$\frac{\alpha - n}{n+1} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x.$$

Wir finden also ein $m \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $n \geq m$ gilt:

$$\left| \frac{\alpha - n}{n+1} x \right| - |x| \leq \underbrace{\left| \frac{\alpha - n}{n+1} x + x \right|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}} < \underbrace{\frac{1 + |x|}{2}}_{\substack{\uparrow \\ > 0 \text{ wegen } |x| < 1}}, \quad \text{also}$$

$$\left| \frac{\alpha - n}{n+1} x \right| < \frac{1 + |x|}{2} =: M < 1 \quad \uparrow \\ |x| < 1$$

Für $n \geq m$ folgt:

$$\left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} x \right| \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \leq M \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right|.$$

Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{nach dem Quotientenkriterium. } \square$$

3.32 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton steigende Folge mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$s := \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. (*) Es sei U eine Umgebung von s in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Zu zeigen ist $\exists m \in \mathbb{N}_0 \forall n > m: a_n \in U$. (BoL)

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $s > -\infty$. Dann finden wir ein $b < s$ mit $]b, s] \subseteq U$.

Wegen der Def. (*) von s finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b < a_m \leq s$.

Wegen der Monotonie von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folgt für alle $n > m$: $b < a_m \leq a_n \leq s$,
also $a_n \in U$.

2. Fall: $s = -\infty$. Dann folgt $a_n = -\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
also sogar $a_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist (Beh) in beiden Fällen gezeigt. $\square$