

3.10 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, d.h. es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \forall k > m \forall l > m: |a_k - a_l| < \varepsilon. \quad (1)$$

Zu zeigen ist $\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}_0: |a_n| \leq M. \quad (2)$

Hierzu nehmen wir $\varepsilon = 1$ in (1) und erhalten

$$\exists m \in \mathbb{N}_0 \forall k > m \forall l > m: |a_k - a_l| < 1.$$

Nehmen wir so ein m . Dann wissen wir:

$$\forall k > m \forall l > m: |a_k - a_l| < 1. \quad (3)$$

Wir setzen $M := 1 + \max \{ |a_i| \mid i \in \mathbb{N}_0, i \leq m+1 \} \quad (4)$ für das Ziel (2).

Zu zeigen ist nun $\forall n \in \mathbb{N}_0: |a_n| \leq M$. Hierzu sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Wir unterscheiden 2 Fälle (die sich nicht gegenseitig ausschließen):

1. Fall: $n \leq m+1$. Dann gilt $|a_n| \leq |a_n| + 1 \leq M$ wegen der Definition (4) von M , wie zu zeigen war.

Dreiecksungleichung

2. Fall: $n \geq m+1$. Dann gilt $|a_n| \leq \underbrace{|a_{m+1}|}_{\leq M-1 \text{ wegen (4)}} + \underbrace{|a_n - a_{m+1}|}_{\leq 1 \text{ wegen (3), weil } n > m \text{ nach Fallannahme und } m+1 > m.} \leq M-1+1 = M$, ebenfalls wie zu zeigen war. $\square$

3.11 Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Cauchyfolgen über $\mathbb{C}$,

d.h. es gelte $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n: |a_k - a_l| < \varepsilon, \quad (A)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n: |b_k - b_l| < \varepsilon. \quad (B)$$

Zur Summe: Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n: |(a_k + b_k) - (a_l + b_l)| < \varepsilon \quad (1)$$

Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wenden (A) und (B) auf $\frac{\varepsilon}{2}$ für ε an und erhalten

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n: |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (A')$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n: |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (B')$$

Nehmen wir solche $n \in \mathbb{N}_0$ und nennen sie n_A bzw. n_B . Damit wissen wir:

$$\forall k > n_A \forall l > n_A: |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (A'')$$

$$\forall k > n_B \forall l > n_B: |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (B'')$$

Wir setzen nun $n := \max\{n_A, n_B\}$. (Def-4) Vom ursprünglichen Beweisziel (1) bleibt nun noch zu zeigen:

$$\forall k > n \quad \forall l > n : |(a_k + b_k) - (a_l + b_l)| < \varepsilon \quad (2)$$

Hierzu seien $k > n$ und $l > n$ gegeben. Insbesondere gelten $k > n_A, k > n_B, l > n_A, l > n_B$ wegen (Def-4).

Mit (A'') und (B'') folgt $|a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2}$,
also $|(a_k + b_k) - (a_l + b_l)| = |(a_k - a_l) + (b_k - b_l)| \stackrel{\uparrow}{\leq} |a_k - a_l| + |b_k - b_l|$
 $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dreiecksungleichung

Gemäß (2) war dies zu zeigen. $\square$

Zum Produkt: Wir betrachten zwei Versionen des Beweises, eine kurze und eine ausführliche:

kurzversion: Weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Cauchyfolgen sind, finden wir ein $j \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $m \geq j$ gilt:

$$|a_m - a_j| < 1 \quad \text{und} \quad |b_m - b_j| < 1.$$

Wir setzen $A := |a_j| + 1 > 0$ und $B := |b_j| + 1 > 0$ und erhalten für alle $m \geq j$:

$$|a_m| \leq |a_m - a_j| + |a_j| < 1 + |a_j| = A \quad \text{und ebenso}$$

$$|b_m| < B.$$

Weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Cauchyfolgen sind, finden wir ein $n \geq j$, so dass für alle $k, l \geq n$ gilt:

$$|a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Dann folgt für diese k, l :

$$\begin{aligned} |a_k b_k - a_l b_l| &\leq |a_k b_k - a_l b_k| + |a_l b_k - a_l b_l| = \\ &= \underbrace{|a_k - a_l|}_{< \frac{\varepsilon}{2B}} \underbrace{|b_k|}_{< B, \text{ wg. } k \geq j} + \underbrace{|a_l|}_{< A} \underbrace{|b_k - b_l|}_{< \frac{\varepsilon}{2A}, \text{ wg. } k \geq j} < \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B + A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. $\square$

Ausführliche Version:

Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |a_k b_k - a_l b_l| < \varepsilon \quad (3)$$

Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nun zu zeigen:

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |a_k b_k - a_l b_l| < \varepsilon \quad (4)$$

Wir wenden (A) und (B) (siehe oben) auf $\tilde{\varepsilon} = 1$ an und erhalten:

[Man verwechsle dieses $\tilde{\varepsilon} = 1$ in (A), (B) nicht mit dem ε von oben!]

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |a_k - a_l| < 1 \quad (A_1)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |b_k - b_l| < 1 \quad (B_1)$$

Wir nehmen solche n und nennen sie j_A bzw. j_B . Wir wissen nun:

$$\forall k > j_A \forall l > j_A : |a_k - a_l| < 1, \quad (A_2)$$

$$\forall k > j_B \forall l > j_B : |b_k - b_l| < 1 \quad (B_2)$$

Wir setzen nun

$$j := \max\{j_A, j_B\} + 1, \quad (5)$$

$$A := |a_j| + 1 > 0, \quad (6)$$

$$B := |b_j| + 1 > 0 \quad (7)$$

unterhalten für alle $m \geq j$:

$$|a_m| \leq \underbrace{|a_m - a_j|}_{< 1 \text{ wg. (A}_2) \text{ und } m \geq j > j_A} + |a_j| < 1 + |a_j| = A \quad (A_3)$$

$$|b_m| \leq \underbrace{|b_m - b_j|}_{< 1 \text{ wg. (B}_2) \text{ und } m \geq j > j_B} + |b_j| < 1 + |b_j| = B \quad (B_3)$$

Wir wenden nochmal (A) bzw. (B) an, diesmal mit

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2B} \text{ bzw. } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2A} \text{ unterhalten:}$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2B},$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n \forall l > n : |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Nehmen wir solche $n \in \mathbb{N}_0$ und nennen wir n_A bzw. n_B .

Damit wissen wir:

$$\forall k > n_A \forall l > n_A : |a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad (A_4)$$

$$\forall k > n_B \forall l > n_B : |b_k - b_l| < \frac{\varepsilon}{2A} \quad (B_4)$$

Setzen wir $n := \max \{j, n_A, n_B\}$ (8) für Behauptung (4), bleibt zu zeigen:

$$\forall k > n \quad \forall l > n : |a_k b_k - a_l b_l| < \varepsilon \quad (9)$$

Hier zu seien $k > n$ und $l > n$ gegeben; insbesondere gelten $k > n_A, k > n_B, l > n_A, l > n_B, k > j, l > j$ wegen (8). Es folgt:

$$|a_k b_k - a_l b_l| = |(a_k b_k - a_k b_l) + (a_k b_l - a_l b_l)|$$

$$\leq \underbrace{|a_k b_k - a_k b_l|}_{\uparrow} + |a_k b_l - a_l b_l| = |a_k(b_k - b_l)| + |(a_k - a_l)b_l|$$

Dreiecksungl.

$$= \underbrace{|a_k|}_{< A} \underbrace{|b_k - b_l|}_{< \frac{\varepsilon}{2A}} + \underbrace{|a_k - a_l|}_{< \frac{\varepsilon}{2B}} \underbrace{|b_l|}_{< B} < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B = \varepsilon$$

wg. (A₃) und k ≥ j wg. (B₄) wg. (A₄) wg. (B₃) und l ≥ j

Damit ist Behauptung (9) gezeigt. $\square$