

3.6 Gegeben ist eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

(Raum der Folgen in $\mathbb{C}$ als kartesische Potenz)

mit dem Limes $c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und obere Schranke $b \in \mathbb{R}$

der Absolutbeträge: $b \geq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Wir zeigen $b \geq |c|$ indirekt. Nehmen wir hierzu das Gegenteil $|c| > b$ an.

Wir setzen $\varepsilon := |c| - b > 0$. (1) Wegen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ wissen wir:

$\exists m \in \mathbb{N}_0 \forall n > m : |a_n - c| < \varepsilon$. Nehmen wir so ein m ,

Dann folgt für $n := m+1$: $|a_n - c| < \varepsilon$ sowie $|a_n| \leq b$.

Wir erhalten: $|a_n| \leq b \stackrel{\text{wg. (1)}}{=} |c| - \varepsilon < |c| - |a_n - c| \stackrel{\text{Dreiecks ungl.}}{\leq} |a_n|$, ein Widerspruch. $\square$

3.7 1. Weil der große Zeiger 12 mal so schnell wie der kleine Zeiger läuft, braucht er nur $\frac{1}{12}$ der Zeit, die Strecke aufzuholen, die der kleine Zeiger vorausgedankt ist:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{12} \cdot (t_n - t_{n-1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

anders geschrieben:

$$t_{n+1} = \frac{13}{12} t_n - \frac{1}{12} t_{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit $t_0 = 12h$, $t_1 = 13h$ wird dadurch $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert.

2. Wir zeigen nun für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollst. Induktion:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{12^n} (t_1 - t_0) \text{ und } t_n = 12h + \sum_{k=0}^{n-1} 12^{-k} h \quad (\text{Beh.})$$

$$\text{I.A., } n=0: t_1 - t_0 = \frac{1}{12^0} (t_1 - t_0) \text{ und } t_0 = 12h = 12h + \sum_{k=0}^{-1} 12^{-k} h$$

I.V.: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit (Beh._n) gegeben.

I.S. $n \rightarrow n+1$: Zu zeigen ist (Beh._{n+1}).

$$\begin{aligned} t_{n+2} - t_{n+1} &= \left(\frac{13}{12} t_{n+1} - \frac{1}{12} t_n \right) - t_{n+1} = \frac{1}{12} (t_{n+1} - t_n) \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{12} \frac{1}{12^n} (t_1 - t_0) \\ &= \frac{1}{12^{n+1}} (t_1 - t_0) \end{aligned}$$

und

$$t_{n+1} = (t_{n+1} - t_n) + t_n \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{12^n} (t_1 - t_0) + 12h + \sum_{k=0}^{n-1} 12^{-k} h = 12h + \sum_{k=0}^n 12^{-k} h,$$

$\underbrace{\frac{1}{12^n} (t_1 - t_0)}_{= 12h}$

wie zu zeigen war

Mit der geometrischen Summe folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$t_n = 12h + \frac{12^{-n} - 1}{12^{-1} - 1} h = \frac{12^{-n} - 12}{12^{-1} - 1} h = \frac{144}{11} h - \frac{12^{1-n}}{11} h$$

3. Mit $12^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ folgt $\frac{12^{1-n}}{11} h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und daher

$$\frac{144}{11} h - \underbrace{\frac{12^{1-n}}{11} h}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{144}{11} h =: T$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } T &= 13h + \frac{1}{11}h = 13h + \frac{60}{11} \text{ min} = 13h + 5 \text{ min} + \frac{5}{11} \text{ min} \\ &= 13h + 5 \text{ min} + \frac{300}{11} \text{ sec} = \underline{\underline{13h + 5 \text{ min} + (27 \frac{3}{11}) \text{ sec}}} \end{aligned}$$

4. In $\frac{144}{11} - 12 = \frac{12}{11} = 1 \frac{1}{11}$ Stunden voll führt der große Zeiger 1 $\frac{1}{11}$ Umdrehung, der kleine Zeiger jedoch nur $\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{11} = \frac{1}{11}$ Umdrehung. Großer und kleiner Zeiger stehen wegen $\lfloor 1 \frac{1}{11} \rfloor = \frac{1}{11}$ dann wieder übereinander.

3.8 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton steigende Folge in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und

$s = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$. Wir zeigen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Hierzu sei

U eine Umgebung von s in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $s = -\infty$. Dann ist $a_n = -\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton steigt. Hier ist $a_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Fall: $s > -\infty$. Dann finden wir ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $c < s$

und $]c, s] \subseteq U$. Weil $c < s = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$ finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$c < a_m$, also auch $c < a_n$ für alle $n \geq m$, weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton steigt. Es folgt für alle $n \geq m$: $a_n \in]c, s] \subseteq U$, also $a_n \in U$.

Damit ist $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$ in beiden Fällen gezeigt. $\square$