

2.22 Zu zeigen: $+\infty$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Leftrightarrow \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben unbeschränkt

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei $+\infty$ H.p. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. jede Umgebung von $+\infty$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ enthält unendlich viele Folgenglieder. Zu zeigen ist $\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : a_n > M$.

Hierzu sei $M \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist $]M, +\infty]$ eine Umgebung von $+\infty$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, enthält also unendlich viele der a_n . Insbesondere folgt $\exists n \in \mathbb{N} : a_n > M$.

" $\Leftarrow$ ": Wir arbeiten mit Kontraposition. Nehmen wir also an, dass $+\infty$ kein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Zu zeigen ist nun, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist.

Wir nehmen eine Umgebung U von $+\infty$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, sagen wir $m \leq n$.

für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \in U$. Wir nehmen $c \in \mathbb{R}$ mit $]c, +\infty] \subseteq U$,

und setzen $M := \max\{c, \max\{a_m : m \leq n\}\} \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$\forall m \in \mathbb{N} : a_m \leq M$, d.h. die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, wie zu zeigen war.

2.24 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. Fall: Unendlich viele Folgenglieder sind gleich $+\infty$.

Dann ist $+\infty$ ein H.p. der Folge.

2. Fall: Unendlich viele Folgenglieder sind gleich $-\infty$.

Dann ist $-\infty$ ein H.p. der Folge.

Man beachte, dass der 1. und 2. Fall auch gleichzeitig eintreten kann.

3. Fall: Weder $+\infty$ noch $-\infty$ tritt unendlich oft in der Folge auf.

Dann ist ein Endstück der Folge, sagen wir $(a_n)_{n \geq m}$, reellwertig.

Wir unterscheiden nochmal 3 Fälle:

3.1. Fall: $(a_n)_{n \geq m}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano -

Weierstraß besitzt die Folge $(a_n)_{n \geq m}$ und damit auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen reellen Häufungspunkt.

3.2. Fall: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt (d.h. ihr Bild ist nach oben unbeschränkt.) Dann ist $+\infty$ ein H.p. der Folge.

3.3. Fall: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach unten unbeschränkt (d.h. ihr Bild ist nach unten unbeschränkt.) Dann ist $-\infty$ ein H.p. der Folge.

[Die Fälle 3.2 & 3.3. schließen sich nicht gegenseitig aus.]

Damit besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in jedem Fall einen H.p. $\square$

230: Unter der Annahme $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = x = \inf_{n \in \mathbb{N}_0} b_n$ ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ zu zeigen.

Beweis: " $\subseteq$ ": Es sei $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Dann gilt $y \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $y \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = x$. Ebenso gilt $y \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $y \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = x$. Zusammen folgt $y = x$.

" $\supseteq$ ": Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x = \sup_{m \in \mathbb{N}} a_m \geq a_n$ und $x = \inf_{m \in \mathbb{N}} b_m \leq b_n$, also $x \in [a_n, b_n]$. Das bedeutet

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$