

2.6 •  $]a, b[$  ist offen.

Beweis: Zu zeigen ist:  $\forall x \in ]a, b[ \exists \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} (|y-x| < \varepsilon \Rightarrow y \in ]a, b[)$

Hierzu sei  $x \in ]a, b[$  gegeben. Wir nehmen  $\varepsilon := \min\{b-x, x-a\} > 0$ .

Nun sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $|y-x| < \varepsilon$  gegeben. Dann folgt:

$$a = x - \underbrace{(x-a)}_{\geq \varepsilon} \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \leq x + \underbrace{(b-x)}_{\geq \varepsilon} = b, \text{ also } y \in ]a, b[.$$

Dies bedeutet ist  $]a, b[$  eine offene Umgebung aller ihrer Elemente.

□

•  $[a, b]$  ist abgeschlossen.

$\Leftrightarrow x$  ist Berührungspkt. von  $[a, b]$

Beweis: Zu zeigen ist:  $\forall x \in \mathbb{R} [(\forall \varepsilon > 0 \exists y \in [a, b]: |y-x| < \varepsilon) \Rightarrow x \in [a, b]]$

Hierzu sei  $x \in \mathbb{R}$  gegeben. Es gelte  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in [a, b]: |y-x| < \varepsilon$ . Zu zeigen ist  $x \in [a, b]$ .

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. Fall  $x < a$ . Wir nehmen  $\varepsilon := a-x > 0$  und finden hierzu  $y \in [a, b]$  mit  $|y-x| < \varepsilon$ .

Dann folgt  $y = x + (y-x) < x + \varepsilon = a$ , also  $y \notin [a, b]$ , ein Widerspruch.

2. Fall:  $x \in [a, b]$ . Hier ist nichts mehr zu zeigen.

3. Fall:  $x > b$ . Wir nehmen  $\varepsilon := x-b > 0$  und finden hierzu  $y \in [a, b]$  mit  $|y-x| < \varepsilon$ .

Dann folgt  $y = x + (y-x) > x - \varepsilon = b$ , also  $y \notin [a, b]$ , ein Widerspruch.

Damit ist  $x \in [a, b]$  gezeigt.

□

•  $[a, b[$  ist nicht abgeschlossen.

Beweis:  $b$  ist Berührungspunkt von  $[a, b[$ , weil

$\forall \varepsilon > 0: b - \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, b-a\} \in U_\varepsilon(b)$ . Andererseits gilt  $b \notin [a, b[$ .

•  $a, b$  ist nicht offen.

Beweis:  $a \in [a, b[$  ist kein innerer Punkt von  $[a, b[$ , weil

$\forall \varepsilon > 0: a - \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(a) \setminus [a, b[$ .

□

2.8:  $\mathbb{R}^+$  ist offen in  $\mathbb{R}$ . Beweis: Zu zeigen:  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^+$

Hierzu sei  $x \in \mathbb{R}^+$  gegeben. Wir nehmen  $\varepsilon := x > 0$ . Dann gilt:

$$U_\varepsilon(x) = ]0, 2x[ \subseteq ]0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$$

□

$\mathbb{R}^+$  ist nicht offen in  $\mathbb{C}$ .

Beweis:  $1 \in \mathbb{R}^+$  ist kein innerer Punkt von  $\mathbb{C}$ , weil

$$\forall \varepsilon > 0: 1 + i \frac{\varepsilon}{2} \in U_{\varepsilon}^{\mathbb{C}}(1) \setminus \mathbb{R} \quad \text{wegen } |(1 + i \frac{\varepsilon}{2}) - 1| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2.10 Wir zeigen die Aussage über  $\mathbb{R}$ , über  $\mathbb{C}$  folgt sie ebenso (mit  $U_{\varepsilon}^{\mathbb{C}}(\cdot)$  statt  $U_{\varepsilon}(\cdot)$ ) □

Wir zeigen  $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$ .  $\overline{\overline{U}} \supseteq \overline{U}$  ist klar, da jeder Punkt einer Menge ein Berührungspunkt der Menge ist. Es ist also noch  $\overline{U} \subseteq \overline{\overline{U}}$  zu zeigen.

Hierzu sei  $x \in \overline{U}$  gegeben. Zu zeigen:  $x \in \overline{\overline{U}}$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0: U_{\varepsilon}(x) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ .

Gegeben  $\varepsilon > 0$ , finden wir ein  $y \in \overline{U} \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$  wegen  $x \in \overline{U}$ .

Hierzu finden wir ein  $z \in U \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$  wegen  $y \in \overline{U}$ .

Dann folgt  $|z - x| \leq \underbrace{|z - y|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , also  $z \in U_{\varepsilon}(x) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . □  
wg.  $z \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$  wg.  $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$

Wir zeigen nun  $U^{\infty} = U^0$ .  $U^{\infty} \subseteq U^0$  ist klar; zu zeigen ist also noch

$U^0 \subseteq U^{\infty}$ . Hierzu sei  $x \in U^0$  gegeben. Zu zeigen ist  $x \in U^{\infty}$ , also

$$\exists \varepsilon > 0: U_{\varepsilon}(x) \subseteq U^0 (*)$$

wegen  $x \in U^0$  finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_{\varepsilon}(x) \subseteq U$ . Wir zeigen nun  $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq U^0$ ,

woraus die Behauptung (\*) folgt. Es sei also  $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$  gegeben. Dann folgt

$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subseteq U_{\varepsilon}(x)$ , weil für jeder  $z \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$  gilt:

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wir erhalten  $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subseteq U$  wegen  $U_{\varepsilon}(x) \subseteq U$ , also  $y \in U^0$ . Damit ist  $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq U^0$

und damit (\*) gezeigt. □ Man beachte, dass die freie Variable  $\frac{\varepsilon}{2}$  bei der

$\exists$ -Einführung durch die gebundene Variable  $\varepsilon$  in (\*) ersetzt wird.

2.11 Zu zeigen ist  $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{Z}: |x - 10^{-n}k| < \varepsilon$ .

Hierzu seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Mit Aktivierungselement 1.28 finden wir  $n \in \mathbb{N}$

mit  $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ . Wir nehmen  $k := \lfloor 10^n x \rfloor$ . Insbesondere gilt

$1 > 10^n x - k \geq 0$ , also  $|x - 10^{-n}k| < 10^{-n} < \varepsilon$ , wie zu zeigen war. □

2.13 1. Zu zeigen:  $x \in M^\circ \Leftrightarrow (\exists \text{ offene Umgebung von } x : U \subseteq M)$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Es sei  $x \in M^\circ$ . Dann finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq M$ .

Nun ist  $U_\varepsilon = U_\varepsilon(x)$  offen wegen Satz 2.72 und eine Umgebung von  $x$  wegen  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ , und schließlich gilt  $U = U_\varepsilon(x) \subseteq M$ .

" $\Leftarrow$ ": Es sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  mit  $U \subseteq M$ .

Dann finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ , also erst recht  $U_\varepsilon(x) \subseteq M$  wegen  $U \subseteq M$ . Damit ist  $x \in M^\circ$  gezeigt.  $\square$

2. Zu zeigen:  $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall \text{ offene Umg. v. } x : U \cap M \neq \emptyset$ .

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Es sei  $x \in \bar{M}$ . Weiter sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x$ .

Dann finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Wegen  $x \in \bar{M}$  ist

$U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ , also erst recht  $U \cap M \neq \emptyset$ .

" $\Leftarrow$ ": Es gelte  $\forall \text{ offene Umg. v. } x : U \cap M \neq \emptyset$ .

Dann folgt für alle  $\varepsilon > 0$ :  $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ , weil  $U_\varepsilon(x)$  mit

Satz 2.72 eine offene Umgebung von  $x$  ist. Damit ist  $x \in \bar{M}$  gezeigt.  $\square$

3. Zu zeigen:  $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall \text{ offene Umg. v. } x : U \cap M \neq \emptyset \wedge U \cap (R \setminus M) \neq \emptyset$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Gegeben  $x \in \partial M$ , nehmen wir eine offene Umgebung

$U$  von  $x$ . Dann finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Wegen  $x \in \partial M$

gilt  $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap (R \setminus M) \neq \emptyset$ , also erst recht

$U \cap M \neq \emptyset$  und  $U \cap (R \setminus M) \neq \emptyset$ .

" $\Leftarrow$ ": Es gelte  $\forall \text{ offene Umg. v. } x : U \cap M \neq \emptyset \wedge U \cap (R \setminus M) \neq \emptyset$ . (v.S.)

Es sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Zu zeigen ist  $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap (R \setminus M) \neq \emptyset$ .

Dies folgt aus (v.S.), weil  $U_\varepsilon(x)$  eine (nach Satz 2.72) offene Umgebung von  $x$  ist.  $\square$

2.15: 1. Zu zeigen:  $V \text{ offen} \Leftrightarrow V \cap \partial V = \emptyset$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei  $V$  offen. Annahme: Wir haben  $x \in V \cap \partial V$ .  
Weil  $V$  offen ist, finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon^c(x) \subseteq V$ . Wegen  $x \in \partial V$  gilt  $U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$ , ein Widerspruch. Damit ist  $V \cap \partial V = \emptyset$  gezeigt.

" $\Leftarrow$ ": Es gelte  $V \cap \partial V = \emptyset$ . Es sei  $x \in V$  gegeben.

Zu zeigen ist nun:  $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \subseteq V$ . (Beh.)

Wegen  $V \cap \partial V = \emptyset$  und  $x \in V$  gilt  $x \notin \partial V$ , also

$\neg \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$ ,  
oder äquivalent dazu

$\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap V = \emptyset \vee U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) = \emptyset$ . (A)

Nehmen wir so ein  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $x \in U_\varepsilon^c(x)$  und  $x \in V$  folgt

$U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset$ , also  $U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) = \emptyset$  wegen (A).

Das bedeutet  $U_\varepsilon^c(x) \subseteq V$ . Damit ist (Beh.) gezeigt  $\square$

2. Zu zeigen:  $V \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \partial V \subseteq V$

Beweis: " $\Rightarrow$ " Es sei  $V$  abgeschlossen und  $x \in \partial V$ .

Zu zeigen ist  $x \in V$ . Es gilt  $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$   
wegen  $x \in \partial V$ . Insbesondere gilt  $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset$ , d.h.  
 $x \in \overline{V} = V$ .

$\uparrow$   
da  $V$  abg.

" $\Leftarrow$ ": Es gelte  $\partial V \subseteq V$ . (v.s.) Es sei  $x$  ein Berührungspunkt von  $V$ .

Zu zeigen ist  $x \in V$ . Wir zeigen das indirekt, nehmen also  $x \notin V$  an. Gegeben  $\varepsilon > 0$ , wissen wir  $U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset$  wegen  $x \in \overline{V}$  und  
 $U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$  wegen  $x \in U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V)$ .

Das bedeutet  $x \in \partial V$ . Nach der Annahme (v.s.) folgt  
auch  $x \in V$ , wie zu zeigen war.  $\square$

3. Es sei  $x$  ein Berührungspunkt von  $\partial V$ . Zu zeigen ist  $x \in \partial V$ ,

also  $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset$  und  $U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$ . (Beh.)

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen  $x \in \overline{\partial V}$  wissen wir  $U_\varepsilon^c(x) \cap \partial V \neq \emptyset$ . (A) Nehmen wir also ein  $y \in U_\varepsilon^c(x) \cap \partial V$ . (B) Weil  $U_\varepsilon^c(x)$  offen ist, siehe Satz 2.12, finden wir ein  $\delta > 0$  mit  $U_\delta^c(y) \subseteq U_\varepsilon^c(x)$ . (C) Wegen  $y \in \partial V$ , siehe (B), schließen wir  $U_\delta^c(y) \cap V \neq \emptyset \wedge U_\delta^c(y) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$ , also erst recht  $U_\varepsilon^c(x) \cap V \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon^c(x) \cap (\mathbb{C} \setminus V) \neq \emptyset$  wegen (C).  
Damit ist (Beh.) gezeigt.  $\square$

2.16 1. Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $V \subseteq \mathbb{C}$ , zeigen wir  $U \cap \overline{V} \subseteq \overline{U \cap V}$ . Hierzu sei  $x \in U \cap \overline{V}$  (i) gegeben.

Zu zeigen ist nun  $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^c(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$  (Beh.)

Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen (i) wissen wir  $x \in U$  und  $x \in \overline{V}$ , also  $\forall \delta > 0: U_\delta^c(x) \cap V \neq \emptyset$ . (ii) Weil  $x \in U$  wegen (i) und weil  $U$  offen ist, finden wir ein  $\alpha > 0$  mit  $U_\alpha^c(x) \subseteq U$ . (3)

Wir setzen  $\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \alpha\}$ .

Es folgt  $U_{\varepsilon'}^c(x) \subseteq U_\alpha^c(x) \subseteq U$  wegen (3) und  $U_{\varepsilon'}^c(x) \cap V \neq \emptyset$  wegen (ii). Daraus folgt  $U_{\varepsilon'}^c(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$ , also erst recht  $U_\varepsilon^c(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$  wegen  $U_{\varepsilon'}^c(x) \subseteq U_\varepsilon^c(x)$ .  
Damit ist (Beh.) gezeigt.

2. Gegenbeispiel: Es sei  $U = \{0\}$  und  $V = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Dann gilt  $\overline{V} = \mathbb{C}$ , also  $U \cap \overline{V} = \{0\}$ .

Andererseits:  $U \cap V = \emptyset$ , also  $\overline{U \cap V} = \emptyset$ . Hier haben wir also  $U \cap \overline{V} \not\subseteq \overline{U \cap V}$ .

2.19 1.  $\emptyset$  ist offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , denn:

1)  $\emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset$  ist offen in  $\mathbb{R}$ ,

2)  $+\infty \notin \emptyset$ ,

3)  $-\infty \notin \emptyset$ .

$\mathbb{R}$  ist offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , denn:

1)  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$  ist offen in  $\mathbb{R}$ ,

2)  $+\infty \notin \mathbb{R}$ ,

3)  $-\infty \notin \mathbb{R}$ .

2. Es seien  $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Dann ist  $A \cap B$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , denn:

1)  $(A \cap B) \cap \mathbb{R} = \underbrace{(A \cap \mathbb{R})}_{\text{offen in } \mathbb{R}} \cap \underbrace{(B \cap \mathbb{R})}_{\text{offen in } \mathbb{R}}$  ist offen in  $\mathbb{R}$ .

2) Falls  $+\infty \in A \cap B$ , so ist  $+\infty \in A$  und  $+\infty \in B$ .

Zu zeigen:  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$  ist nach oben beschränkt. (Beh.)

Weil  $A$  und  $B$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  sind, sind

$\mathbb{R} \setminus A$  und  $\mathbb{R} \setminus B$  nach oben beschränkt, sagen wir mit oberen Schranken  $a$  bzw.  $b$ . Dann ist  $\max\{a, b\}$  eine obere Schranke von  $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ .

Damit ist (Beh.) gezeigt.

Analog für -∞: 3) Falls  $-\infty \in A \cap B$ , so ist  $-\infty \in A$  und  $-\infty \in B$ .

Zu zeigen:  $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$  ist nach unten beschränkt. (Beh.)

Weil  $A$  und  $B$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  sind, sind

$\mathbb{R} \setminus A$  und  $\mathbb{R} \setminus B$  nach unten beschränkt, sagen wir mit unteren Schranken  $a$  bzw.  $b$ . Dann ist  $\min\{a, b\}$  eine untere Schranke von  $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ .

Damit ist (Beh.) gezeigt.

3. Es sei  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  offenen Mengen. Wir setzen:  $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Zu zeigen ist:  $A$  ist offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Beweis: 1)  $A \cap \mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap \mathbb{R})$  ist offen in  $\mathbb{R}$ , weil alle

$A_i \cap \mathbb{R}$  mit  $i \in I$  offen in  $\mathbb{R}$  sind, da  $A_i$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist.

2) Annahme:  $+\infty \in A$ . Zu zeigen ist nun, dass  $\mathbb{R} \setminus A$  nach oben beschränkt ist. Das folgt so: Wegen  $+\infty \in A$  finden wir ein  $i \in I$  mit  $+\infty \in A_i$ . Dann ist  $\mathbb{R} \setminus A_i$  nach oben beschränkt, weil  $A_i$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist. Wegen  $\mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus A_i$  ist damit  $\mathbb{R} \setminus A$  erst recht nach oben beschränkt, wie zu zeigen war.

Analog für  $-\infty$ : 3) Annahme:  $-\infty \in A$ . Zu zeigen ist nun, dass  $\mathbb{R} \setminus A$  nach unten beschränkt ist. Das folgt so: Wegen  $-\infty \in A$  finden wir ein  $i \in I$  mit  $-\infty \in A_i$ . Dann ist  $\mathbb{R} \setminus A_i$  nach unten beschränkt, weil  $A_i$  offen in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist. Wegen  $\mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus A_i$  ist damit  $\mathbb{R} \setminus A$  erst recht nach unten beschränkt, wie zu zeigen war.  $\square$