

1.16 Es gelte $\forall n \in \mathbb{N}_0: ((\forall m < n: \varphi(m)) \Rightarrow \varphi(n))$. (1)

Zu zeigen ist nun $\forall n \in \mathbb{N}_0: \varphi(n)$. (Beh)

Wir zeigen zuerst $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m < n: \varphi(m)$ (2) durch vollst. Induktion.

Induktionsanfang, $n=0$: $\forall m < 0: \varphi(m)$ gilt,

weil es kein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < 0$ gibt.

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, nehmen wir

$\forall m < n: \varphi(m)$ (3) für dieses n an.

Induktionsschritt $n \rightarrow N(n)$. Mit der Induktionsvoraussetzung (3) und

Voraussetzung (1) schließen wir: $\varphi(n)$. Zusammen mit der I.V. (3) folgt: $\forall m \in \mathbb{N}_0: (m < n \vee m = n \Rightarrow \varphi(m))$,

also $\forall m \in \mathbb{N}_0: (m < N(n) \Rightarrow \varphi(m))$ (4) $\equiv$ [(3) für $N(n)$ statt n]

weil $m < n \vee m = n$ äquivalent zu $m < N(n)$ ist.

Damit ist die Zwischenbehauptung (2) induktiv gezeigt.

Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, wenden wir Formel (2) auf

$\tilde{n} = N(n)$ und $\tilde{m} = n < \tilde{n}$ an und erhalten $\varphi(n)$.

Damit ist die Behauptung (Beh) gezeigt. $\square$

1.17 (Kommentare zum logischen Aufbau des Beweises in grün)

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

Wir zeigen das mit vollständiger Induktion.

Nun zu zeigen: $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1^2 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: \left[\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2 \right]$

Induktionsanfang: Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 = 1^2$

Noch zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: \left[\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2 \right]$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ für dieses n an.

Nun noch z.z.: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$ gegeben $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) \stackrel{\text{I.V.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \text{ wie zu zeigen war. } \square$$

1.18 Es gilt $w_{\pm}^2 = \frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4} (1^2 \pm 2\sqrt{5} + (\pm\sqrt{5})^2)$
 $= \frac{1}{4} (6 \pm 2\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5})^2 = 1 + w_{\pm},$

wobei man "+" entweder als "+" oder als "-" lesen darf.

Man zeigen wir $\forall n \in \mathbb{N}_0: f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^n - w_-^n)$
 induktiv mit der Variante des Induktionsschemas.

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, nehmen wir $\forall m < n: f_m = \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^m - w_-^m)$ an.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist nun $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^n - w_-^n)$.
 Wir unterscheiden 3 Fälle, entsprechend der rekursiven Definition von f_n :

1. Fall: $n=0: f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^0 - w_-^0)$

2. Fall: $n=1: f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} (1+\sqrt{5}) - \frac{1}{2} (1-\sqrt{5}) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^1 - w_-^1)$

3. Fall: $n > 1$: Dann folgt

$f_n \stackrel{\text{nach Def.}}{=} f_{n-1} + f_{n-2} \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^{n-1} - w_-^{n-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^{n-2} - w_-^{n-2})$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} w_+^{n-2} \underbrace{(w_+ + 1)}_{= w_+^2} - \frac{1}{\sqrt{5}} w_-^{n-2} \underbrace{(w_- + 1)}_{= w_-^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} (w_+^n - w_-^n),$

wie zu zeigen war. $\square$

1.19: • Gegeben $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$
 folgt $y - x \in \mathbb{R}^+$ und $z - y \in \mathbb{R}^+$, also $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+$ nach dem 2. Axiom, d.h. $x < z$.

• Gegeben $x, y, z, u \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $z < u$
 folgt: $y - x \in \mathbb{R}^+$ und $u - z \in \mathbb{R}^+$ nach Definition von " $<$ ", also mit dem 2. Axiom:

$$(y + u) - (x + z) = (y - x) + (u - z) \in \mathbb{R}^+, \text{ was nach Definition } x + z < y + u \text{ bedeutet. } \square$$

• Gegeben $x, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$ mit $x < y$, folgt
 $y - x \in \mathbb{R}^+$ nach Def. von " $<$ ", also $ay - ax = a(y - x) \in \mathbb{R}^+$
 nach dem 2. Axiom, was
 $ax < ay$ nach Def. von " $<$ " bedeutet. $\square$

• Gegeben sei $x \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $x \neq 0$ nach dem Axiom a)
 also x^{-1} definiert. Es ist $x^{-1} \neq 0$ wegen $x \cdot x^{-1} = 1 \neq 0$.
 mit dem Axiom a) folgt $x^{-1} \in \mathbb{R}^+$ oder $-x^{-1} \in \mathbb{R}^+$.
 Wir führen den Fall $-x^{-1} \in \mathbb{R}^+$ zu einem Widerspruch:
 $x \in \mathbb{R}^+, -x^{-1} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -1 = x \cdot (-x^{-1}) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}^+$
 (t.A. b))

Widerspruch zu A.A a), weil nur genau eine der Relationen
 $1 \in \mathbb{R}^+, 1 = 0, -1 \in \mathbb{R}^+$ gelten kann. $\square$

• Es seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x < y$ gegeben.

Dann folgt $y - x \in \mathbb{R}^+$ nach Def., also

$(y - x)^{-1} \in \mathbb{R}^+$ nach dem eben Gezeigten, also
 $xy(y - x)^{-1} \in \mathbb{R}^+$ nach t.A. b). Mit

$$xy(y - x)^{-1} = (x^{-1} - y^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}^+ \text{ folgt auch}$$

$$x^{-1} - y^{-1} \in \mathbb{R}^+, \text{ also } x^{-1} > y^{-1} \text{ nach Def. } \square$$

1.20 Gegeben sei $a \in \mathbb{R}$, und es gelte

(*) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : |a| < \varepsilon$. Zu zeigen ist $a = 0$.

Nach dem Anordnungsaxiom a) gilt
 $a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee -a \in \mathbb{R}^+$. Wir unterscheiden
diese 3 Fälle:

Fall $a \in \mathbb{R}^+$: Wir nehmen $\varepsilon = a$ und
erhalten aus der Voraussetzung (*):
 $a = |a| < a$, ein Widerspruch.

Fall $a = 0$: Hier gilt die Behauptung.

Fall $-a \in \mathbb{R}^+$: Hier nehmen wir $\varepsilon = -a$ und
erhalten aus (*):
 $-a = |a| < \varepsilon = -a$, ebenfalls ein Widerspruch. $\square$

1.21 wir beweisen induktiv $\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{R}^+$.

Induktionsanfang $n=1$: $1 \in \mathbb{R}^+$ haben wir oben
schon gezeigt (im 3. Punkt in A. 1.19)

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $n \in \mathbb{N}$, nehmen wir
 $n \in \mathbb{R}^+$ an.

Induktionsschluss: Dann folgt $n+1 \in \mathbb{R}^+$ mit
dem Anordnungsaxiom b) wegen $n, 1 \in \mathbb{R}^+$.

1.22 Gegeben $\varepsilon > 0$, also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, folgt $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{R}^+$.

Mit dem Archimedischen Axiom nehmen wir $n \in \mathbb{N}_0$
mit $n > \varepsilon^{-1}$. Insbesondere ist $n \neq 0$, also $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.

Es folgt $\frac{1}{n} = n^{-1} < (\varepsilon^{-1})^{-1} = \varepsilon$ $\square$

1.25: Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir setzen $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

- a ist eine obere Schranke für M , da $x \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < a$ gilt.

- Es sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für M , zu zeigen ist $b \geq a$.

Wir zeigen das indirekt und nehmen dazu $\neg b \geq a$ an, also $b < a$.

Wir setzen $x := \frac{1}{2}(b+a)$. Dann folgt

$x < \frac{1}{2}(a+a) = a$, also $x \in M$, also $x \leq b$

nach der Wahl von b . Aus $\frac{1}{2}(b+a) = x \leq b = \frac{1}{2}(b+b)$ folgt $b+a \leq b+b$ und hieraus $a \leq b$, im

Widerspruch zu $b < a$. $\square$

1.26 Wir zeigen zuerst: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum.

Gegeben so ein M , setzen wir $s := \sup M$, es existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom.

Zu zeigen ist nun $s \in M$. Es sei

wegen $s-1 < s$ und $s = \sup M$ finden wir $a \in M$ mit $s-1 < a \leq s$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

- Falls $a = s$ folgt $s \in M$, wie zu zeigen war.

- Falls $a < s$ finden wir $b \in M$ mit $a < b$, also $s-1 < a < b \leq s$, also $0 < b-a < 1$.

Wegen $b \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{Z}$ folgt $b-a \in \mathbb{Z}$.

Wir haben also eine ganze Zahl echt zwischen 0 und 1 gefunden, ein Widerspruch. Damit ist $s \in M$, also $s = \max M$ gezeigt.

Ist nun M eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$, so ist

$-N = \{-k \mid k \in N\}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$, besitzt also ein Maximum n . Dann ist $-n$ ein Minimum von $-(-N) = N$.

1.27 Gegeben $r \in \mathbb{R}$, ist $M := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$ nach oben beschränkt durch r . Aus dem archimedischen Axiom folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -r$ gibt; dann ist $-n \in M$, also $M \neq \emptyset$.

Nach A.e. 1.26 existiert $\lfloor r \rfloor := \max M$.

Insbesondere folgt $\lfloor r \rfloor \leq r$. Weiter gilt $\lfloor r \rfloor + 1 > \max M$ und folglich $\lfloor r \rfloor + 1 \notin M$, aber andererseits $\lfloor r \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ wegen $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$. Es folgt $\neg (\lfloor r \rfloor + 1 \leq r)$, also $\lfloor r \rfloor + 1 > r$. Damit ist $\lfloor r \rfloor \leq r < \lfloor r \rfloor + 1$ gezeigt.

Zur Eindeutigkeit: Es sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq r < a + 1$ gegeben. Zu zeigen ist $a = \lfloor r \rfloor$.

Es folgt $r - 1 < a \leq r$ und $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$, also $a - \lfloor r \rfloor \leq r - \lfloor r \rfloor < 1$ und ebenso $\lfloor r \rfloor - a \leq r - a < 1$, somit $|a - \lfloor r \rfloor| < 1$. Wegen $a \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$ folgt $a - \lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$. Weil 0 die einzige ganze Zahl x mit $|x| < 1$ ist, folgt $a - \lfloor r \rfloor = 0$, d.h. $a = \lfloor r \rfloor$. $\square$

1.28.1, Zu zeigen: $\forall a > 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{a^n} < \varepsilon$.
Hierzu seien $a > 1$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Mit dem Archimedischen Axiom nehmen wir $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon(a-1)}$. Dann folgt mit der Bernoulli-Ungl.:

$$\varepsilon a^n \geq \varepsilon (1 + (a-1)n) = \varepsilon + \varepsilon (a-1)n > \varepsilon (a-1)n > 1,$$

wobei wir $a-1 > 0$ verwendet haben. Es folgt $\frac{1}{a^n} < \varepsilon$
unter Verwendung von $a^n > 0$. $\square$

2. Gegeben $a > 1$, wissen wir zunächst
 $\frac{1}{a^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist 0 eine
untere Schranke für $\{\frac{1}{a^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Jedes $\varepsilon > 0$ ist nach Teil 1 jedoch keine
untere Schranke davon. Es folgt:

$$\inf \left\{ \frac{1}{a^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0. \quad \square$$