

1.30 1. Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (c,d) &= (ac-bd, ad+bc) \neq (0,0), \text{ weil} \\ (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= \underbrace{(a^2+b^2)}_{>0} \underbrace{(c^2+d^2)}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

2. Für $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ gilt:

$$\begin{aligned} [(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f) &= (ac-bd, ad+bc) \cdot (e,f) \\ &= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce) \\ &= (a(ce-df)-b(de+cf), a(cf+de)+b(ce-df)) \\ &= (a,b) \cdot (ce-df, de+cf) = (a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)] \end{aligned}$$

3. Für $(a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ gilt:

$$(1,0) \cdot (a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b).$$

4. Für $z = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ und $w = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$

[wohldefiniert wg. $a^2+b^2 > 0$] folgt

$$\begin{aligned} w \cdot z &= \left(\frac{a}{a^2+b^2} \cdot a - \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot b, \frac{a}{a^2+b^2} \cdot b + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot a \right) \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0 \right) = (1,0). \end{aligned}$$

5. Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ folgt

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, cb+da) = (c,d) \cdot (a,b).$$

1.37 Gegeben $z=a+ib, w=c+id \in \mathbb{C}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} 1. \quad \overline{zw} &= \overline{ac-bd + i(ad+bc)} = ac-bd - i(ad+bc) \\ &= ac - (-b)(-d) + i(a(-d) + (-b)c) = (a-ib)(c-id) = \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

2. Für $w \neq 0$:

$$\frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{c-id} = \frac{c+id}{c^2+d^2} = \overline{\left(\frac{c-id}{c^2+d^2} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{w} \right)}$$

$$\text{Es folgt: } \overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \overline{z \cdot \frac{1}{w}} \stackrel{1.}{=} \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w} \right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$3. \overline{z \pm w} = \overline{(a+ib \pm (c+id))} = \overline{a \pm c + i(b \pm d)} \\ = a \pm c - i(b \pm d) = \overline{z \pm w}$$

$$4. \overline{\bar{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$$

$$5. z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2 \operatorname{Re} z$$

$$6. z - \bar{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im} z \quad \square$$

1.32 Für $w = c+id \in \mathbb{C}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$w^2 = c^2 - d^2 + 2icd. \text{ Es gilt also}$$

$$w^2 = z \text{ genau dann, wenn } c^2 - d^2 = a \text{ und } 2cd = b \text{ gilt.}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. Fall: $b \neq 0$, also $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$:

Hier erhalten die Äquivalenzen

$$w^2 = z \Leftrightarrow \frac{c^2 - d^2}{2cd} = \frac{a}{b} \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{d}{c} = 2 \frac{a}{b} \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2 - 2 \frac{a}{b} \frac{c}{d} - 1 = 0 \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d} \in \left\{ \frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right\} \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow c^2 \in \left\{ \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right) \right\} \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ c^2 > 0 \end{matrix} c^2 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) \wedge 2cd = b$$

$$\Leftrightarrow c \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right\} \wedge d = \frac{b}{2c}$$

2. Fall: $b = 0$: Hier gilt $c = 0$ oder $d = 0$ wegen $2cd = 0$

Wir erhalten die Äquivalenzen

$$w^2 = z \Leftrightarrow c^2 - d^2 = a \wedge (c = 0 \vee d = 0)$$

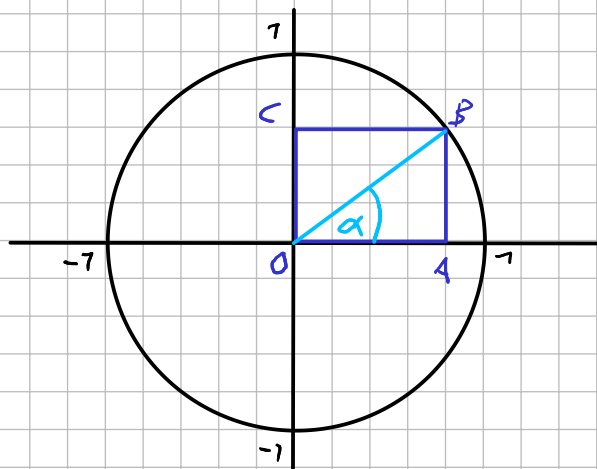
$$\Leftrightarrow (c^2 = a \wedge d = 0) \vee (d^2 = -a \wedge c = 0)$$

$$\Leftrightarrow (a > 0 \wedge c \in \{\pm \sqrt{a}\} \wedge d = 0) \vee (a < 0 \wedge c = 0 \wedge d \in \{\pm \sqrt{-a}\})$$

$a \neq 0$ wg. $z \neq 0$ $\rightarrow$

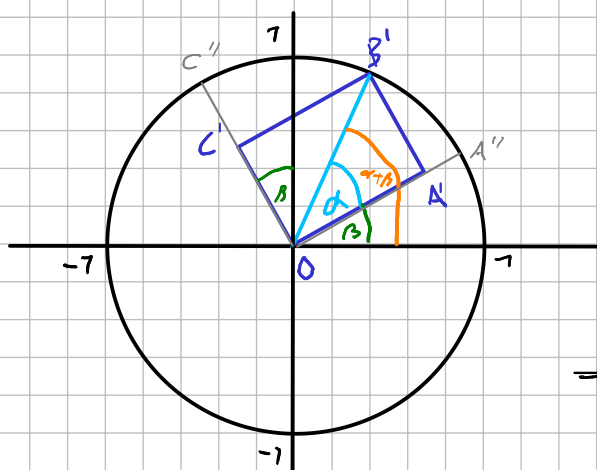
$\square$

133



$$\begin{aligned} O &= (0, 0) \\ A &= (\cos \alpha, 0) \\ B &= (\cos \alpha, \sin \alpha) = A + C \\ C &= (0, \sin \alpha) \end{aligned}$$

↓ Drehung um den Winkel beta



$$\begin{aligned} A'' &= (\cos \beta, \sin \beta) \\ A &= \cos \alpha \cdot (1, 0) \end{aligned} \Rightarrow A' = \cos \alpha \cdot A'' = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta)$$

$$\begin{aligned} C'' &= (-\sin \beta, \cos \beta) \\ C &= \sin \alpha \cdot (0, 1) \end{aligned} \Rightarrow C' = \sin \alpha \cdot C'' = (\sin \alpha \cdot (-\sin \beta), \sin \alpha \cos \beta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)) &= B' \\ &= A' + C' \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned}$$

□

1.35: Gegeben $a, b \in \mathbb{R}, z = a + ib$, suchen wir die Schnittpunkte der Geraden $g := \{(0, 0, 1) + t[(a, b, 0) - (0, 0, 1)] \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch die Punkte $(a, b, 0)$ und $(0, 0, 1)$ mit der Kugeloberfläche S^2 :

Wegen $(0, 0, 1) + t[(a, b, 0) - (0, 0, 1)] = (ta, tb, 1-t)$ müssen wir also die folgende Gleichung lösen:

$$(ta)^2 + (tb)^2 + (1-t)^2 = 1 \quad (A)$$

Wir haben für $t \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzen

$$(A) \Leftrightarrow t^2 a^2 + t^2 b^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 (1 + a^2 + b^2) - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t \cdot [t \cdot (1 + a^2 + b^2) - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2}{1 + a^2 + b^2}$$

Die Lösung $t = 0$ gehört zum Punkt $(0, 0, 1) \in g \cap S^2$, den wir schon kennen.

Wir brauchen die andere Lösung $t = \frac{2}{1 + a^2 + b^2}$; sie gehört zu

$$f(z) = (ta, tb, 1-t) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2} \right) = \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right).$$

□