LEHRBUCH

Jochen Balla

Differenzialrechnung *leicht gemacht!*

Springer Spektrum

Differenzialrechnung leicht gemacht!

Jochen Balla

Differenzialrechnung leicht gemacht!

Springer Spektrum

Jochen Balla
Hochschule Bochum
Bochum, Deutschland

ISBN 978-3-662-57298-6 ISBN 978-3-662-57299-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Verantwortlich im Verlag: Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

In Gedanken an meine Lieben:
C. C. und T. M.

Vorwort

Mathematik ist die Sprache von Wissenschaft und Technik. Jeder Studierende der Ingenieurwissenschaften, der Physik, der Wirtschaftswissenschaften usw. hat daher gleich zu Beginn seiner Ausbildung mit ihr zu tun. Die Differenzialrechnung, also alles rund um den Begriff der „Ableitung einer Funktion", nimmt dabei einen besonderen Rang ein: Sie stellt normalerweise den Beginn der Mathematikausbildung dar, und in ihrem Bereich finden sich wohl die meisten Anwendungen der Mathematik überhaupt.

Auch wenn Mathematik klar und logisch ist, stellt sie doch für viele Studienanfänger eine ernst zu nehmende Hürde dar. Zum Teil einfach deshalb, weil sie am Beginn des Studiums liegt. Und natürlich finden sich Schwierigkeiten auch in der Sache selbst, die mathematischen Begriffe und Konzepte erscheinen zunächst komplex und verwirrend.

Aber Mathematik lässt sich lernen, wie alle anderen Dinge auch. Es ist eben nicht so, dass der eine sie einfach verstünde und der andere einfach nicht.

Zielsetzung dieses Buchs Dieses Buch bietet dir eine kurze und – wie ich hoffe – leicht lesbare Darstellung der Kerninhalte der Differenzialrechnung. Es ist vorwiegend gedacht für Studierende der Ingenieurwissenschaften, der Physik, und auch der Wirtschaftswissenschaften oder anderer Fachgebiete, die Differenzialrechnung benötigen. Auch Studierenden der Mathematik sollte es als Einführung gute Dienste leisten. Es lässt sich inhaltlich wie folgt umreißen:

- **Kerninhalte der Differenzialrechnung**: Grundlagen, Folgen, Reihen, Funktionen, Grenzwerte, Ableitungen usw.
- Ausführliche Behandlung der **Exponentialfunktion** und der **Winkelfunktionen** und ihrer Umkehrfunktionen, d. h. des **Logarithmus** und der **Arcusfunktionen**
- Entwicklung der **Taylor-Formel** bis hin zu Taylor-Reihen
- Einführung in **komplexe Zahlen** und Formulierung der **Euler-Formel**, separat lesbar und ausreichend, um mit der Verwendung komplexer Zahlen in praktischen Anwendungen zurecht zu kommen
- Viele **Beispiele** und **Anwendungen**

- Darstellung mit **vollständiger mathematischer Notation**, transparent und klar (und ein solider Ausgangspunkt für weitergehendes Studium)
- **Beweise** ausführlich und mit vielen Erläuterungen
- **Übungsaufgaben und -lösungen**.

Die Beweise sind bewusst ausführlich geschrieben, damit es dir leicht fällt, sie nachzuvollziehen. Aber sie stehen nicht im Zentrum der Darstellung. Es ist ein normales Vorgehen, sie beim ersten Lesen nur zu überfliegen; auch so gewinnst du zumindest ein Gefühl dafür, wie viel hinter den verschiedenen Aussagen steckt.

Hilfestellungen Auch wenn es nicht immer zugegeben wird: Das Studium eines Mathematikbuchs fällt nicht leicht. Anfangs tut man sich schwer, „einen Fuß in die Tür“ zu kriegen und sich die Inhalte so zu erarbeiten, dass die Zusammenhänge klar sind und angewendet werden können. Um diesen ersten Einstieg zu erleichtern, gibt dir das Buch eine Reihe zusätzlicher Hilfestellungen:

- Zu Beginn eines jeden Kapitels wird noch einmal erläutert, in welchen Zusammenhängen die Inhalte bedeutsam sind.
- Der Text wird durch zahlreiche **Lesehilfen** ergänzt, die neue Begriffe, neue Schreibweisen, Hintergründe erläutern, und dir über problematische Stellen hinweghelfen.
- Der Text enthält **Zwischenfragen** (und etwas verzögert auch die **Antworten**), die dich zum Hinterfragen des Gelesenen anregen und somit das Verständnis prüfen und vertiefen.
- Am Ende eines jeden Kapitels erlaubt **„Das Wichtigste in Kürze“** eine Rekapitulation der Inhalte, ergänzt durch eine kleine **Formelsammlung**. Verstehst du genau, was hier steht, und kannst du jede Formel erklären, so wirst du das gesamte Kapitel gut verinnerlicht haben.

Diese Hilfestellungen sind vorwiegend für das **erste Lesen** gedacht. Beim zweiten Lesen bzw. dem vertiefenden Studium wirst du sie beiseitelassen können, was durch ihre deutliche Hervorhebung ohne Weiteres möglich ist.

Auch die Übungsaufgaben, mit denen jedes Kapitel versehen ist, zielen vorwiegend auf das Verständnis der Inhalte ab (und weniger auf das Training aufwändiger Rechentechniken). Die zugehörigen Lösungen ermöglichen dir eine unmittelbare Selbstkontrolle.

Du wirst sehen, so schwierig ist das alles gar nicht :-)

Weiterführende Literatur Es gibt viele gute Bücher, die ein weitergehendes Studium der Differenzialrechnung erlauben. Welches du bei Bedarf am besten wählst, hängt letztendlich von deinen persönlichen Vorlieben ab.

Ein Standardwerk ist die „Analysis 1“ von Otto Forster. Es geht in Umfang und theoretischem Anspruch über die hier vorliegende Darstellung hinaus und eignet sich sehr gut für ein vertiefendes Studium der allgemeinen Analysis. Es liegt aktuell in der 12. Auflage vor.

Für ein Studium der komplexen Analysis kannst du beispielsweise die „Funktionentheorie“ von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb heranziehen, aktuell in der 9. Auflage.

Ich wünsche dir viel Erfolg im Studium und würde mich freuen, wenn dieses Buch einen Beitrag dazu leisten kann!

März 2018 Jochen Balla

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

1

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion stellt wahrscheinlich die wichtigste Anwendung der Analysis dar. Unter „Analysis“ versteht man die Differenzial- und Integralrechnung, und die Ableitung ist der Kernbegriff der Differenzialrechnung.

Die Ableitung ist ein Grenzwert, der sich auf Funktionen bezieht, und wir müssen uns daher insbesondere mit diesen Begriffen befassen.

In diesem ersten Kapitel werden zunächst einige allgemeine Grundlagen erläutert, die bei der Formulierung der Differenzialrechnung in verschiedenen Zusammenhängen eine Rolle spielen. Von besonderer Bedeutung sind dabei natürlich die reellen Zahlen. Außerdem sehen wir uns die vollständige Induktion an, bei der es sich sich um ein Argumentationsverfahren handelt, dessen Logik oftmals hilfreich ist.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Der Titel dieses Buchs könnte ausführlich lauten: „Differenzialrechnung von reellen Funktionen einer Veränderlichen“. Wir sollten daher wissen, was reelle Zahlen eigentlich sind. Und kommen dabei gleichzeitig den alten Griechen etwas näher.
- Mengenbezeichnungen oder Intervalle werden in vielen Definitionen oder Sätzen auftauchen. Wir müssen sie genau verstehen.
- Die vollständige Induktion wird uns in Beweisen oft über den Weg laufen. Darüber hinaus ist ihre Logik einfacher als ihr Name.
- Das Archimedische Axiom verweist schon wieder auf die alten Griechen.

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_1

1.1 Reelle Zahlen

Das „normale" Rechnen mit Zahlen ist uns aus der Schule geläufig. Die dabei verwendeten Rechenregeln ergeben sich aus der Tatsache, dass es sich bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition „$+$" und der gewöhnlichen Multiplikation „$\cdot$" um einen *kommutativen Körper* handelt. Das bedeutet:

(1) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine kommutative Gruppe: Es gelten Assoziativ- und Kommutativgesetz, das neutrale Element der Addition ist die 0, das inverse Element zu einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die Zahl $-x$.
(2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe: Es gelten Assoziativ- und Kommutativgesetz, das neutrale Element der Multiplikation ist die 1, das inverse Element zu einer Zahl $x \neq 0$ ist die Zahl x^{-1}.
(3) Es gilt das Distributivgesetz, d. h., für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{1.1}$$

Lesehilfe
Die Aussage „$\mathbb{R}$ ist ein kommutativer Körper" mit den darin enthaltenen Eigenschaften einer additiven und einer multiplikativen Gruppe ist tatsächlich die formale Voraussetzung für das Rechnen, das du seit der Grundschule kennst. Zur Erinnerung: Das Assoziativgesetz besagt, dass beliebig geklammert werden darf, dass also gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$ bzw. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Daher sind die Klammern in reinen Summen oder Produkten gar nicht notwendig. Und das Kommutativgesetz erlaubt das Vertauschen der Reihenfolge, $x + y = y + x$ bzw. $x \cdot y = y \cdot x$.

Zum „normalen Rechnen" musst du den theoretischen Begriff des Zahlkörpers nicht kennen. Das ändert sich aber, wenn du neue Zahlen kennenlernst und dich fragst, was man mit ihnen machen darf und warum. So werden die Körpereigenschaften beispielsweise auf komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ übertragen, von denen wir nicht im Vorhinein wissen, wie sie funktionieren.

Wenn du Lust hast, schlägst du die Gruppeneigenschaften noch einmal vollständig nach. Aber es ist hier für unsere Zwecke auch ausreichend, einfach weiterzulesen.

Mit den Körpereigenschaften sind die „vier Grundrechenarten" für reelle Zahlen vollständig erklärt, denn mit „$+$" und „$\cdot$" haben wir die jeweiligen inversen Elemente, und damit

$$x - y := x + (-y) \qquad \text{und} \qquad x : y := x \cdot y^{-1}. \tag{1.2}$$

Man kann offenbar nicht durch Null teilen, da die Null kein inverses Element der Multiplikation besitzt. Daher ist die Null auch aus der multiplikativen Gruppe ausgeschlossen.

Die Multiplikation schreibt man häufig auch ohne „·“, also $x \cdot y = xy$, und für die Division verwendet man auch die Schreibweisen $x : y = x/y = \frac{x}{y}$.

Bei den reellen Zahlen handelt es sich darüber hinaus um einen *angeordneten* Körper, d. h., für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y. \tag{1.3}$$

Reelle Zahlen lassen sich daher mit einem *Zahlenstrahl* graphisch darstellen.

1.1.1 Mengen und Mengenbezeichnungen

Zunächst wollen wir vereinbaren, dass ein hochgestelltes „$*$“ den Ausschluss der Null aus einer Menge bedeutet, also beispielsweise

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.4}$$

Lesehilfe

Wir verwenden hier und im Folgenden die üblichen Zeichen für Mengen. Kleine Erinnerung: Mengenoperation nur zwischen Mengen, deshalb hier die Null in geschweiften Klammern, „\“ heißt „ohne“, ein „|“ in einer Mengenerklärung heißt „mit der Eigenschaft“, und „:=“ heißt „ist per Definition gleich“, nicht nur für Mengen, sondern auch schon in (1.2).

Weiterhin setzen wir:

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}.$$

Sprachlich präzise ausgedrückt ist also $\mathbb{R}_+$ die *Menge der nicht-negativen reellen Zahlen*, während $\mathbb{R}_+^*$ die *Menge der positiven reellen Zahlen* ist.

Ein *Intervall* reeller Zahlen, das von a bis b reicht, $a < b$, kann *abgeschlossen* sein,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\},$$

es kann *offen* sein,

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\},$$

oder auch *halboffen*,

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}.$$

Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ bezeichnet man das offene Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ als die *ε-Umgebung von a*.

Als *uneigentliches* Intervall bezeichnet man ein Intervall, in dem eine Intervallgrenze Unendlich ist, etwa

$$\mathbb{R}_+ = [0, \infty[\qquad \text{oder} \qquad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[,$$

und ein *nicht-triviales* Intervall ist ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht.

Lesehilfe
Bei Intervallen musst du darauf achten, ob die Grenze mit dazugehört oder nicht – es an dieser Stelle also „abgeschlossen“ ist oder „offen“. Die Intervallgrenze ∞ schreibt man stets offen; ∞ ist ja auch keine Zahl. Für $a < b$ ist das Intervall $[a, b]$ übrigens immer nicht-trivial, aus einem Punkt bestünde es nur für $a = b$.

Für zwei beliebige Mengen A und B kann man die folgenden wichtigen Mengenoperationen bilden:

$$\begin{array}{ll} \text{Durchschnitt:} & A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ \text{Vereinigung:} & A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ \text{Komplement:} & A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\ \text{Kartesisches Produkt:} & A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}. \end{array}$$

Den Durchschnitt bezeichnet man auch als die Schnittmenge, hier muss das Element in beiden Mengen enthalten sein („$\wedge$“ heißt „und“). Die Vereinigung ist so etwas wie die Summe beider Mengen, hier muss das Element nur in einer der beiden Mengen sein („$\vee$“ heißt „oder“). Das Komplement haben wir schon kennengelernt (siehe (1.4)).

Das kartesische Produkt funktioniert etwas anders. Hier werden neue Objekte gebildet, es entsteht die *Menge aller geordneten Paare*; so ist zum Beispiel

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \tag{1.5}$$

die Menge aller Paare zweier reeller Zahlen, die man auch als *2-Tupel* bezeichnet. Geometrisch kann man sie als Koordinaten von Punkten in einer Ebene auffassen. Natürlich kann man dies fortführen: Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ ist die Menge aller 3-Tupel der Form (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ usw.

Zur Formulierung von Aussagen benötigt man oft die *natürlichen Zahlen*[1]

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.6}$$

oder die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}. \tag{1.7}$$

Schließlich sehen wir uns noch Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge an: Bei einer Teilmenge T der reellen Zahlen, in Zeichen $T \subset \mathbb{R}$, bezeichnet

[1] Die natürlichen Zahlen werden manchmal auch so definiert, dass sie die 0 nicht enthalten.

- $\max T$ das *Maximum* der Menge, d. h. die größte Zahl der Menge, und $\min T$ das *Minimum*, also ihre kleinste Zahl, *sofern diese Zahlen existieren*. So ist etwa $\max\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 1$, während das Minimum dieser unendlichen Menge nicht existiert.
- $\sup T$ die kleinste obere Schranke, das *Supremum* der Menge. Umgekehrt bezeichnet $\inf T$ die größte untere Schranke, das *Infimum*. Beide Größen können Teil der Menge sein, aber auch außerhalb liegen. So ist $\sup\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 1$, und $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 0$.

Lesehilfe
Bei diesen Begriffen musst du tatsächlich ein wenig aufpassen. Zwar besitzt jede endliche Menge ein Maximum oder ein Minimum – einfach die größte bzw. die kleinste Zahl der Menge –, aber bei unendlichen Mengen ist das nicht mehr unbedingt der Fall. Wie im obigen Beispiel: Die Menge der Brüche $\frac{1}{n}$, also $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, kommt zwar beliebig dicht an die Null heran, kein Element dieser Menge ist aber tatsächlich ihr kleinstes. Daher besitzt sie kein Minimum, aber das Infimum 0.

1.1.2 Rationale Zahlen

Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ sind nichts anderes als die Menge aller Brüche,

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{k}{l} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0 \right\}. \tag{1.8}$$

Lesehilfe
Endliche Dezimalzahlen sind auch nichts anderes als Brüche, z. B. $1{,}2345 = 12\,345/10\,000$. Statt „Dezimalzahl“ sagt man hier gerne auch „Dezimalbruch“.

Die rationalen Zahlen bilden bereits einen angeordneten Körper. Aber ihnen fehlt etwas, denn es gibt Zahlen, die sich nicht durch einen Bruch darstellen lassen.

Sehen wir uns das Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$ an: $\sqrt{2}$ ist die Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist, und wir wollen zeigen, dass sie nicht rational ist. Nehmen wir dazu an, es gäbe tatsächlich einen Bruch k/l mit $(k/l)^2 = 2$. Wir wollen diesen Bruch in vollständig gekürzter Form annehmen, so dass höchstens eine der Zahlen k, l gerade sein kann; sonst könnte man ja noch durch 2 kürzen. Aus $(k/l)^2 = k^2/l^2 = 2$ folgt $k^2 = 2l^2$; somit ist k^2 gerade und damit auch k. (Warum? Bitte kurz darüber nachdenken.) Es gibt daher eine ganze Zahl m mit $k = 2m$. Daraus folgt $k^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2l^2$, also $2m^2 = l^2$. Das bedeutet aber, dass l^2 und damit auch l gerade sein muss, im Widerspruch zur Eingangsvoraussetzung. Somit kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein. •

Lesehilfe zum Beweis
Wir haben gerade einen Widerspruchsbeweis geführt. Das heißt: Man geht von einer Annahme aus – hier die Existenz eines vollständig gekürzten Bruchs k/l mit $(k/l)^2 = 2$ – und überlegt sich deren Konsequenzen. Folgt dann logisch zwingend etwas, das der Annahme widerspricht, so muss die Annahme falsch sein.

Dies war schon für die alten Griechen ein Problem: $\sqrt{2}$ ist die Länge der Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1. Und die Griechen konnten sich nicht erklären, dass sich diese Länge nicht durch ein Verhältnis, also einen Bruch, ausdrücken lässt. Ein ähnliches Problem ist die „Quadratur des Kreises", also die Suche nach einem Quadrat mit demselben Flächeninhalt wie ein Kreis mit dem Radius 1. Auch hier lässt sich keine rationale Seitenlänge finden, sondern man bekommt es mit der irrationalen Zahl π zu tun.

Den rationalen Zahlen fehlt also etwas, sie sind nicht „vollständig", und dies ist der Unterschied zu den reellen Zahlen, die auch die irrationalen Zahlen enthalten.

► **Zwischenfrage (1)** Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig, bilden aber einen Körper. Ist das auch für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bereits der Fall?

Wir wollen uns nicht weiter mit Zahlentheorie befassen, sondern nur noch die folgenden Tatsachen ohne Beweis festhalten:

(1) Jede irrationale Zahl ($\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}, \ldots$) kann durch eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen dargestellt werden.

Lesehilfe
Es gibt natürlich auch rationale Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, z. B. $1/3 = 0{,}\overline{3}$. Die sind aber stets periodisch. Irrationale Zahlen besitzen unendlich viele Nachkommastellen und sind nicht periodisch.

(2) Die rationalen Zahlen liegen *dicht* in $\mathbb{R}$, d. h., zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen liegen unendlich viele rationale (und auch irrationale) Zahlen.
(3) Die rationalen Zahlen sind *abzählbar*, d. h., man kann sie durchnummerieren, indem man – vereinfacht gesagt – die Brüche durchzählt, die Halben, die Drittel, die Viertel, jeweils mit Plus und Minus usw. Für die reellen Zahlen gilt das nicht mehr, sie sind *überabzählbar*.
(4) Die Darstellung einer reellen Zahl durch einen Dezimalbruch muss nicht immer eindeutig sein. Zum Beispiel sind 1 und $0{,}\overline{9}$ dieselbe Zahl.

Die vielleicht überraschende Aussage, dass 1 und $0{,}\overline{9}$ dasselbe sind, kann man sich leicht klarmachen: Wie viele Zahlen liegen zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen? Nach (2) unendlich viele. Zwischen $0{,}\overline{9}$ und 1 passt aber offenbar keine einzige Zahl mehr. Oder man überzeugt sich mit folgender Rechnung: Aus $x = 0{,}\overline{9}$ folgt durch Multiplikation mit 10 zunächst $10x = 9{,}\overline{9}$, und zieht man hiervon x ab, erhält man $9x = 9{,}\overline{9} - 0{,}\overline{9} = 9$, also $x = 1$.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, ob $\mathbb{Z}$ ein Körper ist.
Nein, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden keinen Körper. Zwar funktioniert die Addition ohne Probleme, aber es fehlen die inversen Elemente der Multiplikation. Das inverse Element zu 2 etwa ist $1/2$, und das ist keine ganze Zahl.

1.1.3 Betrag einer reellen Zahl

Für $x \in \mathbb{R}$ wird der *Betrag* definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Lesehilfe
Bei der Frage nach dem Betrag einer Zahl würdest du vielleicht sagen: „Vorzeichen weglassen“. Mit dieser Definition passiert natürlich nichts anderes. Aber manchmal ist es nützlich, den Betrag als Rechenvorschrift aufschreiben zu können.

Es gilt also $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Außerdem ist offenbar

$$|xy| = |x||y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Der Betrag erfüllt die so genannte *Dreiecksungleichung*:

Satz 1.1 (Dreiecksungleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis Es ist $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Daraus folgt durch Addition der Ungleichungen $x + y \leq |x| + |y|$. Ebenso folgt aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ insgesamt $-x - y = -(x + y) \leq |x| + |y|$. Dies ergibt zusammen $|x + y| \leq |x| + |y|$, da $|x + y|$ gleich einer der Zahlen $x + y$ oder $-(x + y)$ ist. •

Der Name „Dreiecksungleichung" ist bei alleinigem Blick auf reelle Zahlen x, y nicht nachvollziehbar, da es sich hier um eine simple Aussage auf dem Zahlenstrahl handelt. Die Gleichung bleibt aber auch für Vektoren und deren Beträge gültig, und dann besagt sie, dass eine Seite eines Dreiecks immer kürzer ist als die Summe der beiden anderen.

1.2 Vollständige Induktion

Bei der *vollständigen Induktion* handelt es sich um ein Beweis- und Argumentationsverfahren, das oft anwendbar ist, wenn es um Aussagen $A(n)$ geht, die für alle – oder fast alle – natürlichen Zahlen n gelten. Dabei haben wir folgende, in der Mathematik übliche Sprechweise verwendet:

Definition 1.1 *„Fast alle" bedeutet „alle bis auf endlich viele".*

Lesehilfe
Das mathematische „fast alle" solltest du nicht mit seinem alltäglichen Gebrauch verwechseln. Sagst du z. B.: „Ich habe fast alle Matheklausuren mit Eins bestanden", so ist das – mathematisch aufgefasst – immer richtig, selbst wenn es bei gar keiner der Fall war. Denn auch dann waren nur endlich viele keine Eins. Das mathematische „fast alle" ergibt nur bei unendlich großen Mengen überhaupt eine gehaltvolle Aussage.

Gilt eine Aussage $A(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt sie höchstens für endlich viele natürliche Zahlen nicht. Von diesen endlich vielen Zahlen lässt sich stets die größte angeben, nennen wir sie m. Die Aussage $A(n)$ gilt dann für alle $n \geq n_0 := m + 1$.

Die vollständige Induktion erfolgt in zwei Schritten:

(1) *Induktionsanfang*: Es ist zu zeigen, dass die Aussage $A(n)$ für $n = n_0$ richtig ist (mit $n_0 = 0$, wenn die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt).
(2) *Induktionsschritt*: Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ für n richtig ist (*Induktionsvoraussetzung*), ist zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt.

Es ist dann offenbar gezeigt, dass die Aussage für alle n gilt. Denn der Induktionsanfang stellt sicher, dass die Aussage für den Startwert von n richtig ist, und aufgrund des Induktionsschritts hangelt man sich dann gedanklich Schritt für Schritt vorwärts bis ins Unendliche.

Lesehilfe
Es ist nützlich, sich hier die Bedeutung der Worte klarzumachen. „Induktion" bedeutet in der Logik den Schluss vom Speziellen auf das Allgemeine.

„Vollständige Induktion“ bedeutet somit, vollständig vom Speziellen (Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für einzelne n) auf das Allgemeine zu schließen (allgemeine Gültigkeit der Aussage für alle n). Letzteres erfolgt mit Hilfe des „Induktionsschritts“, mit dem man von n_0 ausgehend immer eins nach dem anderen voran „schreitet“.

Beispiele

(1) Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Summe

$$S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n \tag{1.11}$$

gilt

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.12}$$

Induktionsanfang, $n = 0$: Es ist $S(0) = 0$, da für $n = 0$ gar kein Summand vorhanden ist, und außerdem ist $\frac{0(0+1)}{2} = 0$; beides ist gleich und die Aussage ist somit für $n = 0$ erfüllt.

Lesehilfe

Der Induktionsanfang muss hier für $n = 0$ erfolgen, schließlich wird (1.12) für alle $n \in \mathbb{N}$ behauptet. Wenn dir das allein nicht behagt, prüfe die Formel ruhig zusätzlich für 1, 2, 3, 42.

Induktionsschritt, $n \to n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung (IV) gilt $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Nun ist

$$\begin{aligned} S(n+1) = S(n) + n + 1 &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die behauptete Aussage für $n + 1$, so dass (1.12) damit für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist. •

Lesehilfe

Im Verlauf des Induktionsschritts muss die Induktionsvoraussetzung verwendet werden. Bei Summenformeln will man die Summe bis $n + 1$ erhalten; in ihr ist die Summe bis n enthalten, und für sie verwendet man die Induktionsvoraussetzung. Das Ergebnis formt man um und hofft, die Aussage für $n + 1$ zu finden, also hier die Formel $S(\heartsuit) = \heartsuit(\heartsuit + 1)/2$ für $\heartsuit = n + 1$.

(2) Die vollständige Induktion kann natürlich nicht nur für den Beweis von Summenformeln verwendet werden. Als Beispiel betrachten wir den folgenden elementaren

Satz 1.2 *Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge ist gleich* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n =: n!$ *($n \in \mathbb{N}^*$).*

Die „Anordnung" einer Menge ist nichts anderes als eine bestimmte Reihenfolge der Elemente der Menge.

Beweis Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang, $n = 1$: Klar, ein Element hat eine Anordnung.

Induktionsschritt, $n \to n + 1$: Die möglichen Anordnungen einer $(n + 1)$-elementigen Menge $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ lassen sich folgendermaßen in $n + 1$ Gruppen zerlegen: Die Anordnungen der k-ten Gruppe, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, haben das Element a_k an erster Stelle, bei beliebiger Anordnung der verbleibenden n Elemente. Nach Induktionsvoraussetzung besteht dann jede dieser Gruppen aus $n!$ Anordnungen, so dass sich insgesamt $(n + 1)n! = (n + 1)!$ Anordnungen ergeben. •

Den Satz 1.2 haben wir hier zur Übung mit vollständiger Induktion bewiesen. Seine wichtige Aussage kann man aber auch wie folgt einsehen: Wir wollen eine n-elementige Menge anordnen. Für die erste Position haben wir n Elemente zur Auswahl, also n Möglichkeiten. Für die zweite Position sind es noch $n - 1$, da jetzt ein Element weniger zur Verfügung steht, für die dritte $n - 2$ usw. Insgesamt sind es daher $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

► **Zwischenfrage (2)** Sagen wir, eine Behauptung werde für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ aufgestellt. Ließe sie sich eventuell durch vollständige Induktion über x beweisen?

1.2.1 Summe und Produkt

In den obigen Beispielen kamen Summen und Produkte vor. Wir wollen für sie eine allgemeine Schreibweise verwenden und setzen für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$:

$$\begin{aligned} &\text{Summe:} \quad (1) \quad \sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \qquad (\text{„leere Summe“}) \\ &\qquad\qquad\quad (2) \quad \sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n; \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &\text{Produkt:} \quad (1) \quad \prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1 \qquad (\text{„leeres Produkt“}) \\ &\qquad\qquad\quad (2) \quad \prod_{k=m}^{n+1} a_k := a_m\, a_{m+1} \cdots a_n. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Man läuft also beim unteren Index m los und zählt bis zum oberen Index n. Sofern der obere Index kleiner ist als der untere, hat man keinen Summanden bzw. keinen Faktor mehr. In diesem Fall spricht man von der leeren Summe bzw. dem leeren Produkt und gibt ihnen den Wert 0 bzw. 1, so dass sie sich als Sumand bzw. als Faktor nicht auswirken.

Wir können jetzt also beispielsweise die Summe (1.11) schreiben als

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Und die *Fakultät* ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k. \tag{1.15}$$

Es ist also insbesondere $0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$ (leeres Produkt).

Lesehilfe
Insbesondere Summenzeichen werden wir noch oft begegnen. Solltest du dich anfangs mit ihnen schwertun, so schreibe die Summen ruhig aus, unter Verwendung der Fortsetzungspünktchen; das ist tatsächlich manchmal klarer. Wenn du das einige Male gemacht hast, wirst du aber wahrscheinlich auch das Summenzeichen plötzlich (noch) mehr mögen.

1.2.2 Potenzen

Für $x \in \mathbb{R}$ werden die Potenzen x^n, $n \in \mathbb{N}$, durch Induktion wie folgt definiert:

$$x^0 := 1, \qquad x^{n+1} := x^n \cdot x. \tag{1.16}$$

Man beachte, dass damit insbesondere gilt $0^0 = 1$.

Lesehilfe
Definition durch Induktion bedeutet hier, dass man vom Exponenten 0 schrittweise zu beliebigen Exponenten fortschreitet. Dann steht natürlich bei x^n der Faktor x einfach n-mal da.

Für $x \in \mathbb{R}^*$ definiert man ferner negative Potenzen x^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, durch

$$x^{-n} := \left(x^{-1}\right)^n. \tag{1.17}$$

Für die Potenzen gelten die folgenden Rechenregeln:

Satz 1.3 *Für $n, m \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\begin{aligned} x^n x^m &= x^{n+m}, \\ (x^n)^m &= x^{nm}, \\ x^n y^n &= (xy)^n. \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen x, y sind dabei ungleich Null vorauszusetzen, falls negative Exponenten vorkommen.

Beweis Als Beweis wollen wir an dieser Stelle gelten lassen, dass die Regeln anschaulich klar sind, wenn man sich Assoziativ- und Kommutativgesetz der Multiplikation vor Augen hält. ○

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Die Frage war, ob eine vollständige Induktion über $x \in \mathbb{R}$ möglich ist.
Eine Induktion über reelle Zahlen ist niemals möglich. Reelle Zahlen lassen sich nicht abzählen, man kann sich also mit einer Aussage nicht von einer zur nächsten hangeln. Jedes noch so kurze nicht-triviale reelle Intervall besteht schon aus überabzählbar unendlich vielen Zahlen.

1.2.3 Geometrische Reihe

Summiert man die ersten n Potenzen einer reellen Zahl auf, so erhält man die wichtige *geometrische Reihe*, der wir noch öfter begegnen werden. Ihr Wert lässt sich leicht angeben:

Satz 1.4 (Endliche geometrische Reihe) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.18}$$

Beweis Beweis durch Induktion über n:
Induktionsanfang, $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$, und $\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$.
Induktionsschritt, $n \to n + 1$: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x \cdot x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x}; \end{aligned}$$

wir haben also die behauptete Formel für $n + 1$ erhalten. ●

Lesehilfe
Die geometrische Reihe startet bei $k = 0$, also immer mit einer Eins als erstem Summanden. Mit Pünktchen aufgeschrieben lautet sie: $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

1.3 Archimedisches Axiom

Die reellen Zahlen erfüllen das so genannte *Archimedische Axiom*:

Zu zwei positiven reellen Zahlen x, y gibt es eine natürliche Zahl n so, dass gilt $nx > y$.

Lesehilfe
Ein Axiom ist eine Annahme, von deren Richtigkeit man ausgeht, ohne sie beweisen zu können.

Dieses Axiom lässt sich geometrisch wie folgt deuten:

Bei zwei Strecken auf einer Geraden lässt sich die größere stets übertreffen, wenn man die kleinere nur oft genug abträgt.

Das Archimedische Axiom erlaubt den Beweis des folgenden wichtigen Satzes:

Satz 1.5
(1) *Für eine reelle Zahl $a > 1$ gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $a^n > M$.*
(2) *Für eine reelle Zahl b mit $0 < b < 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $b^n < \varepsilon$.*

Lesehilfe
Die Aussage dieses Satzes noch einmal in anderen Worten: Nimmst du eine Zahl größer Eins nur oft genug mit sich selbst mal, so wird das Ergebnis beliebig groß. Zum Beispiel: Multiplizierst du 1,000001 (das wäre das a) oft genug mit sich selbst, so übertriffst du irgendwann auch 1 000 000 (das wäre das M). Und umgekehrt: Multiplizierst du 0,999999 oft genug mit sich selbst, wird es irgendwann auch kleiner als 0,000001.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch die einfache, aber wichtige *Bernoulli-Ungleichung*[2]:

[2] Benannt nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli, 1655–1705.

Satz 1.6 (Bernoulli-Ungleichung) *Für eine reelle Zahl $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis Beweis durch Induktion über n:
Induktionsanfang, $n = 0$: $(1 + x)^0 = 1$, und $1 + 0 \cdot x = 1$.
Induktionsschritt, $n \to n + 1$: Für $x \geq -1$ ist

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \overset{\text{IV}}{\geq} (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

•

Lesehilfe
Machen wir uns die Bernoulli-Ungleichung noch einmal mit Zahlbeispielen klar: Für $x = 1$ besagt sie $2^n \geq 1 + n$, und für $x = 10$ lautet sie $11^n \geq 1 + 10n$. Beides stimmt für $n = 0$ oder 1, und erst recht für größer werdende n.

Beweis von Satz 1.5

(1) Falls $M \leq 1$, so erfüllt $n = 1$ die behauptete Ungleichung. Sei nun $M > 1$. Wir setzen $x := a-1$; es ist dann $x > 0$ und die Bernoulli-Ungleichung besagt

$$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $nx > M - 1$. Für dieses n gilt dann $a^n > M$.

(2) Da gilt $a := 1/b > 1$, gibt es nach Teil (1) zu $M := 1/\varepsilon$ ein n mit $a^n > 1/\varepsilon$, also $1/b^n > 1/\varepsilon$. Daraus folgt $b^n < \varepsilon$. •

Das Wichtigste in Kürze

- Die **reellen Zahlen** bilden einen angeordneten Körper. Daraus ergeben sich die elementaren Rechenregeln.
- Die reellen Zahlen enthalten **rationale** Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, und **irrationale** Zahlen, bei denen dies nicht möglich ist.
- Bei der **vollständigen Induktion** handelt es sich um ein Beweis- und Argumentationsverfahren, das anwendbar ist, wenn es um Aussagen $A(n)$ geht, die für natürliche Zahlen n gelten. Es besteht aus **Induktionsanfang** und **Induktionsschritt**.
- Es gibt eine **leere Summe** und ein **leeres Produkt**.
- Bei der **geometrischen Reihe** werden die ersten n Potenzen einer reellen Zahl aufsummiert.
- Die reellen Zahlen erfüllen das **Archimedische Axiom**, und es gilt die **Bernoulli-Ungleichung**.

Und was bedeuten die Formeln?

$$0{,}\overline{9} = 1, \quad |x + y| \le |x| + |y|, \quad n! := \prod_{k=1}^{n} k, \quad 0! = 1, \quad 0^0 = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad (1 + x)^n \ge 1 + nx \text{ für } x \ge -1.$$

Übungsaufgaben

A1.1 Natürlich verwendet man für „echte" Rechenaufgaben einen (Taschen-) Rechner. Trotzdem ist es manchmal nötig, ohne Hilfsmittel zurechtzukommen. Berechne die folgenden Ausdrücke im Kopf:

$$a = 11 + 326, \quad b = 1\,000 - 317, \quad c = 240 \cdot 0{,}25, \quad d = 1\,000 : 0{,}25, \quad e = \sqrt{9}.$$

Berechne schriftlich, nur zum Spaß:

$$f = 2\,345{,}72 + 173{,}44, \quad g = 2\,345{,}72 - 173{,}44, \quad h = 2\,345{,}72 \cdot 3{,}4,$$
$$j = 2\,345{,}72 : 3{,}3.$$

A1.2 Ist die Rechenoperation „–" kommutativ? Ist sie assoziativ? Und wie sieht es mit „:" aus?

A1.3 Divisionen schreibt man gerne als Brüche, und Bruchrechnen ist wichtig. Zur Erinnerung daran löse die folgenden Gleichungen jeweils nach x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, auf:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{a} = b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{x_2}\right), \quad \frac{1}{x_3 + a} = \frac{1}{b} - \frac{c}{d}, \quad \frac{1}{x_4} + \frac{1}{a - x_4} = b.$$

A1.4 Welchen Wert hat die Summe $s = \sum_{k=3}^{7}(2k - 1)$? (Einfach mal zu Fuß ausrechnen.)

Beweise, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$, und überprüfe das Ergebnis für s.

A1.5 Die Bernoulli-Ungleichung, $(1 + x)^n \ge 1 + nx$, gilt nur für $x \ge -1$. Warum eigentlich nicht für alle $x \in \mathbb{R}$? Anders gefragt: Wo in ihrem Beweis wird $x \ge -1$ verwendet?

Folgen und Grenzwerte

2

Der Begriff des Grenzwerts stellt die Grundlage der gesamten Analysis dar. Er wird für Folgen definiert. Später werden wir ihn auf Funktionen übertragen.

Des Weiteren sehen wir uns unendliche Reihen, d. h. Summen mit unendlich vielen Summanden an. Sie sind äquivalent zu Folgen und sie kommen auch in praktischen Anwendungen fast schon erstaunlich oft vor.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Folgen sind einfacher als Funktionen, und für sie wird der Begriff des Grenzwerts definiert. Wir müssen uns daher ansehen, was Folgen sind.
- Folgen können einen Grenzwert haben, oder nicht. Wir werden verstehen, was das heißt. Und wir benötigen Kriterien, die es erlauben, das herauszufinden.
- Für Grenzwerte von Folgen gibt es Rechenregeln. Aus ihnen ergeben sich teilweise unmittelbar die Ableitungsregeln. Daher sollten wir sie kennen.
- Unendlich, ∞, ist keine Zahl. Wir lernen hier die genaue Bedeutung kennen.
- Unendliche Reihen haben viele Anwendungen und kommen oft vor. Auch für uns werden sie noch wichtig, und wir müssen sie daher verstehen. Außerdem wollen wir wissen, warum Achill die Schildkröte einholt.

2.1 Folgen

Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Wert $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet. Man verwendet für eine Folge die Bezeichnungen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{oder} \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \qquad \text{oder auch kurz einfach} \qquad (a_n).$$

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_2

Natürlich handelt es sich auch dann um eine Folge, wenn nur fast allen $n \in \mathbb{N}$ ein a_n zugeordnet wird. Denn wenn die Zuordnung eines Werts a_n nur für alle $n \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$ erfolgt, so lässt sich über $b_n := a_{n+n_0}$ eine Folge mit identischen Werten definieren, die dann wieder einer Zuordnung für alle $n \in \mathbb{N}$ entspricht.

Lesehilfe
Der Begriff einer Folge ist wahrscheinlich weniger geläufig als der einer Funktion. Dennoch musst du vor Folgen keine Angst haben. Wie der Name sagt, sind sie einfach „Folgen" von Zahlen, allerdings welche, die immer weitergehen. Jedes Element a_n einer solchen Folge hat eine „Ordnungsnummer", das n. Und wenn man das formaler ausdrückt, sagt man, jedem $n \in \mathbb{N}$ werde genau eine Zahl zugeordnet.

Beispiele
(1) Setzt man $a_n := c$, $c \in \mathbb{R}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man die *konstante Folge* $(c, c, c, \ldots)$.
(2) Es sei $a_n := 1/n^2$, $n \geq 1$; dies ergibt die Folge $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$, also eine Folge von immer kleiner werdenden Brüchen.
(3) Für $a_n := (-1)^n$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$. Folgen, bei denen die Folgenglieder abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben, heißen *alternierende* Folgen. Zum Beispiel ist auch $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots)$ eine alternierende Folge.
(4) $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$, $((-1)^n \frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{32}, \ldots)$.

Lesehilfe
Manche Folgen haben $n \in \mathbb{N}$, andere $n \in \mathbb{N}^*$. Das liegt daran, dass Ausdrücke wie $1/n$ für $n = 0$ nicht definiert sind.

2.1.1 Konvergente Folgen

Wir kommen nun zu dem für die Analysis zentralen Begriff der *Konvergenz* einer Folge:

Lesehilfe
Wir verwenden die mathematischen Symbole $\forall$, „für alle", und $\exists$, „es gibt ein". Schreibst du die Grenzwertbedingung öfter auf, bist du für diese Abkürzungen dankbar.

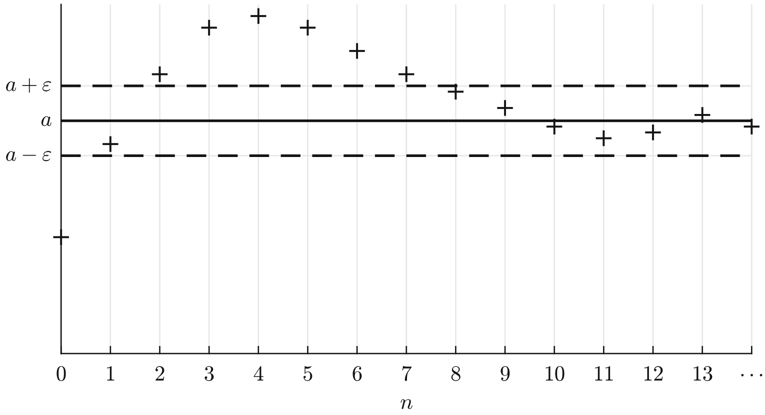

Abb. 2.1 Bei einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass sämtliche Folgenglieder mit $n \geq N$ in der ε-Umgebung des Grenzwerts a liegen

Definition 2.1 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen heißt* konvergent *gegen* $a \in \mathbb{R}$, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq N.$$

Konvergiert (a_n) *gegen a, so heißt a der* Grenzwert *oder auch* Limes *der Folge und man schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder auch} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Speziell spricht man von einer Nullfolge, *wenn gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Die Konvergenzbedingung besagt also, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so dass sämtliche Folgenglieder mit $n \geq N$ in der ε-Umgebung um a liegen:

$$a_n \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\quad \forall n \geq N.$$

Die Zahl N hängt dabei i. Allg. von ε ab, und man wird N umso größer wählen müssen, je kleiner ε vorgegeben wird (siehe Abb. 2.1).

Die Konvergenzbedingung lässt sich auch wie folgt formulieren:

Die Folge (a_n) *konvergiert genau dann gegen a, wenn fast alle Folgenglieder in jeder noch so kleinen ε-Umgebung um a liegen.*

Lesehilfe

Wir erinnern uns: „fast alle" bedeutet „alle bis auf endlich viele". Liegt ein Folgenglied a_n in der ε-Umgebung von a, so heißt das nichts anderes als $|a_n - a| < \varepsilon$. Und wenn das für fast alle gilt, dann gibt es ein N, vor dem die endlich vielen n liegen, für die das nicht der Fall ist.

Natürlich besitzt nicht jede Folge einen Grenzwert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiele
(1) Es ist $\lim_{n\to\infty} c = c$, da alle Folgenglieder der konstanten Folge offenbar in jeder ε-Umgebung von c liegen.
(2) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, d. h., die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist eine Nullfolge. Dies lässt sich wie folgt beweisen: Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Damit ist $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon\ \forall n \geq N$.
(3) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Es gibt keinen Wert, in dessen Nähe fast alle Folgenglieder lägen. Vielmehr liegen in jeder Umgebung von 1 und von -1 jeweils unendlich viele Folgenglieder.
(4) Die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $|x| < 1$ eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| < 1. \tag{2.1}$$

Dies folgt aus Satz 1.5: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x|^N < \varepsilon$. Damit ist $|x^n - 0| = |x|^n \leq |x|^N < \varepsilon\ \forall n \geq N$.
(5) Die Folge $(\frac{n}{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert 1, d. h. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $N > \frac{2}{\varepsilon}$; es ist dann $|\frac{n}{n+2} - 1| = |\frac{n}{n+2} - \frac{n+2}{n+2}| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon\ \forall n \geq N$.

Lesehilfe
Wenn du nicht alle Beispiele sofort durchschaust, ohne sie selbst noch einmal in Ruhe aufzuschreiben, dann sind wir schon zu zweit :-)

Gucken wir also noch einmal auf Beispiel (5): Mit $n = 2/\varepsilon$ gilt

$$\frac{2}{n+2} = \frac{2}{2/\varepsilon + 2} = \frac{2}{2/\varepsilon + 2\varepsilon/\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{2 + 2\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon,$$

und das Ungleichheitszeichen gilt dann erst recht für größere n.

Der formale Nachweis des Grenzwerts einer Folge findet in diesen Beispielen also in der Weise statt, dass zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ jeweils ein N gesucht wird, so dass die Bedingung in Definition 2.1 erfüllt ist. Dieser elementare Nachweis ist natürlich nicht immer notwendig; wir werden vielmehr im Folgenden sehen, dass Grenzwerte mit Hilfe verschiedener Rechenregeln oftmals einfach auf bereits bekannte Grenzwerte zurückgeführt werden können.

Lesehilfe
Den Begriff der Konvergenz einer Folge müssen wir unbedingt verstehen. Da ist zum einen die Definition mit dem ε, die man kennen und aufschreiben

können muss, und zum anderen die Verwendung dieser Definition zum Nachweis der Konvergenz (in den Beispielen die Suche nach dem N zu einem vorgegebenen ε); auch hier ist wichtig, dass man das Prinzip verstanden hat. Allerdings sei noch einmal zugegeben: In den Anwendungen für Grenzwerte werden wir uns kaum noch auf diese elementare Ebene begeben müssen.

2.1.2 Beschränkte Folgen

Eine wichtige Eigenschaft von Folgen kann darin bestehen, dass sie *beschränkt* sind:

Definition 2.2 *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* nach oben beschränkt, *wenn sie eine obere Schranke besitzt, d. h., wenn es eine Zahl* $S \in \mathbb{R}$ *gibt mit* $a_n \le S \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Analog heißt sie* nach unten beschränkt, *wenn es eine untere Schranke* $s \in \mathbb{R}$ *gibt mit* $a_n \ge s \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Für eine beschränkte Folge gibt es also eine Zahl M so, dass gilt $|a_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mit den Bezeichnungen der obigen Definition kann diese Zahl gewählt werden als $M := \max\{|s|, |S|\}$.

Die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$ beispielsweise ist nach oben beschränkt durch 1. Das ist übrigens die kleinste obere Schranke, das Supremum. Aber auch 1,001 oder 2 wären obere Schranken. Nach unten ist die Folge durch 0 beschränkt oder auch durch $-5{,}7$.

► **Zwischenfrage (1)** Wenn etwas immer größer wird, wird es dann unendlich groß?

Es gilt der folgende

Satz 2.1 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis Es sei (a_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \ \forall n \ge N$ (das N zu $\varepsilon = 1$). Daraus folgt

$$|a_n| = |a_n - a + a| = |a + a_n - a| \overset{(*)}{\le} |a| + |a_n - a| \le |a| + 1 \ \forall n \ge N,$$

wobei bei $(*)$ die Dreiecksungleichung verwendet wurde. Wir setzen nun

$$M := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\};$$

dann gilt $|a_n| \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$. •

Lesehilfe zum Beweis
Zu beweisen ist die Implikation „Folge konvergent $\Rightarrow$ Folge beschränkt“. Wir gehen daher aus von einer konvergenten Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es für alle ε ein N usw.; also auch für $\varepsilon = 1$, was hier ausreichen wird. In der Betragsgleichung wird der Summand $-a + a = 0$ hinzugefügt, also nichts geändert, dann die Reihenfolge vertauscht, dann die Dreiecksungleichung verwendet, und im letzten Schritt $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ verwendet, was in Summe auf $|a_n| \le |a| + 1 \;\forall n \ge N$ führt. Folgenglieder a_n mit $n < N$ mögen dem Betrag nach größer sein, aber es sind endlich viele, also allesamt kleinergleich ihrem größten Betrag, und alle Folgenglieder sind insgesamt kleiner als dieser größte Betrag oder $|a| + 1$. Somit ist die Folge beschränkt.

Man kann sich diesen Zusammenhang wie folgt klarmachen: Bei einer konvergenten Folge müssen sich die Folgenglieder in der Nähe des Grenzwerts versammeln. Da dieser Grenzwert eine endliche Zahl ist, muss eine solche Folge beschränkt sein.

Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergent sind, wie zum Beispiel $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dies ändert sich, wenn die Folge (a_n) zusätzlich monoton ist, also entweder *monton wachsend* (dann gilt $a_{n+1} \ge a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$) oder *monoton fallend* ($a_{n+1} \le a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$):

Satz 2.2 *Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen konvergiert.*

Beweis Der Beweis dieses Satzes erfordert etwas größeren Aufwand. Er sei an dieser Stelle nicht ausgeführt. ◦

Die Aussage dieses Satzes kann man sich wie folgt plausibel machen: Betrachten wir eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist. Die Folgenglieder können nicht fallen, höchstens ansteigen; gleichzeitig gibt es eine obere Schranke, die sie nicht übertreffen können. Betrachtet man nun die kleinste obere Schranke, also das Supremum der Folgenglieder, so ist plausibel, dass es sich dabei um den Grenzwert der Folge handelt.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, ob etwas, das immer größer wird, unendlich groß wird.
Nein, wenn etwas immer größer wird, wird es nicht unbedingt unendlich groß. Eine Folge, die immer größer wird, ist nichts anderes als eine monoton steigende Folge. Wir hatten oben das Beispiel $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$. Diese Folge wird immer größer, aber offenbar nie größer als 1, und erst recht nicht unendlich groß.
Anders ausgedrückt: Monoton steigende Folgen können beschränkt sein. Dann werden sie nicht unendlich groß und besitzen nach Satz 2.2 einen Grenzwert. Aber natürlich können sie auch unbeschränkt sein und dann divergieren sie bestimmt gegen Unendlich, siehe Abschn. 2.1.4.

2.1.3 Rechenregeln

Summen und Produkte konvergenter Folgen gehorchen den folgenden Rechenregeln:

Satz 2.3 *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right). \tag{2.3}$$

Lesehilfe
Wenn dir diese wichtigen Regeln anschaulich klar erscheinen, darf der langweilige Beweis übersprungen werden. Er ist aber schön, wenn du dir noch eine Übung mit den ε's wünschst.

Beweis Zur Abkürzung setzen wir $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Bei den Folgen (x_n), (y_n) mit

$$x_n := a_n - a, \qquad y_n := b_n - b$$

handelt es sich dann offenbar um Nullfolgen, wie man aus der Konvergenzbedingung sofort ersieht. Dies ergibt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a + x_n + b + y_n) = \lim_{n\to\infty}(a + b + x_n + y_n).$$

Wir zeigen, dass es sich bei $(x_n + y_n)$ wieder um eine Nullfolge handelt: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein N_1 mit $|x_n| < \varepsilon/2\ \forall n \geq N_1$ und ein N_2 mit $|y_n| < \varepsilon/2\ \forall n \geq N_2$. Also gilt $|x_n| + |y_n| < \varepsilon\ \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$, und damit aufgrund der Dreiecksungleichung erst recht $|x_n + y_n| < \varepsilon$. Also ist $(x_n + y_n)$ eine Nullfolge, und

$$\lim_{n\to\infty}(a + b + x_n + y_n) = a + b.$$

Für die Produktfolge erhält man

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}((a + x_n)(b + y_n)) = \lim_{n\to\infty}(ab + ay_n + bx_n + x_n y_n).$$

Wir müssen beweisen, dass $(ay_n + bx_n + x_n y_n)$ eine Nullfolge ist, also nach dem oben Gezeigten, dass es sich bei den einzelnen Summanden um Nullfolgen handelt. Mit (y_n) ist auch (ay_n) eine Nullfolge: Zu ε gibt es ein N_3 mit $|y_n| < \varepsilon/|a|\ \forall n \geq$

N_3. Daraus folgt $|ay_n| = |a||y_n| < |a|\varepsilon/|a| = \varepsilon \ \forall n \geq N_3$. Ebenso ist (bx_n) eine Nullfolge. Dies gilt erst recht für $(x_n y_n)$: Es gibt ein N_4 mit $|x_n| < 1 \ \forall n \geq N_4$ (also $\varepsilon = 1$ vorgegeben). Die Nullfolgenbedingung für (y_n) ergibt dann für $\forall n \geq N_4$ auch die Folgenbedingung für $(x_n y_n)$. •

Aus Satz 2.3 folgt für $c \in \mathbb{R}$ auch

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n, \tag{2.4}$$

wie sofort klar wird, wenn man c als konstante Folge auffasst.

Für den Quotient konvergenter Folgen gilt

Satz 2.4 *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} b_n =:$ *b und $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$, die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0}$ konvergiert und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.5}$$

Lesehilfe
Man darf nicht durch 0 teilen. Daher stammen die im Vergleich mit Satz 2.3 zusätzlichen Klimmzüge in der Formulierung der Regel für den Quotienten und ihrem Beweis.

Beweis Fast alle Folgenglieder von (b_n) liegen in jeder ε-Umgebung von b. Mit $b \neq 0$ bedeutet dies: Für $\varepsilon = |b|/2$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass alle b_n mit $n \geq n_0$ in der $(|b|/2)$-Umgebung von b liegen, und für diese ist $|b_n| > |b|/2$ und insbesondere $b_n \neq 0$. Wir betrachten nun die Folge $(\frac{1}{b_n})$ und zeigen $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$: Es ist

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}\,|b-b_n| \overset{\forall n\geq n_0}{<} \frac{1}{(|b|/2)|b|}\,|b-b_n| = \frac{2}{|b|^2}\,|b-b_n|.$$

Nun ist aber $(b - b_n)$ eine Nullfolge, und daraus folgt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Zusammen mit Satz 2.3 erhalten wir dann wegen $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ die Behauptung. •

Zusammengefasst lässt sich wohl sagen, dass das Rechnen mit den Grenzwerten konvergenter Folgen keine Überraschungen bietet: Die Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $/$ übertragen sich von den Folgen auf die Grenzwerte.

2.1.4 Bestimmte Divergenz gegen Unendlich

Eine Folge, die nicht konvergent ist, ist divergent. Bei der Divergenz gibt es aber verschiedene Möglichkeiten: Eine divergente Folge kann in keinem Sinn konvergent sein, wie etwa $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$. Eine Folge kann aber auch

„in eine Richtung beliebig groß werden“; in diesem Fall spricht man von *bestimmter Divergenz* oder *uneigentlicher Konvergenz*:

Definition 2.3 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen heißt* bestimmt divergent *gegen* $+\infty$*, falls gilt:*

$$\forall G \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } a_n > G\ \forall n \geq N.$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt bestimmt divergent gegen* $-\infty$*, falls die Folge* $(-a_n)$ *bestimmt gegen* $+\infty$ *divergiert.*

Statt bestimmt divergent sagt man auch uneigentlich konvergent, *und man schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Lesehilfe

Die Aussage $a_n \to \infty$ bedeutet also in Worten: Für jede noch so große Zahl $G \in \mathbb{R}$ lässt sich eine Ordnungsnummer N finden, ab der die Folgenglieder a_n allesamt größer sind als G.

Zum Beispiel konvergiert die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ uneigentlich gegen ∞. Die Folge $((-1)^n n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0, -1, 4, -9, 16, \ldots)$ hingegen ist aufgrund der ständigen Vorzeichenwechsel nicht bestimmt divergent.

Die Bedeutungen der Symbole $+\infty$ und $-\infty$ werden durch die obige Definition festgelegt. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass sich diese beiden Objekte nicht als Zahlen im gewöhnlichen Sinn auffassen lassen; insbesondere kann man mit ihnen nicht einfach wie mit Zahlen rechnen!

Lesehilfe

Dass ∞ keine Zahl ist, erkennst du leicht: Dass $2 \cdot \infty$ wohl wieder ∞ ist – was bei Zahlen, außer Null, ja schon nicht geht –, ist vielleicht noch nicht so schlimm. Aber wie sieht es etwa mit dem Ausdruck $\frac{2\cdot\infty}{\infty}$ aus? Zuerst im Zähler $2 \cdot \infty = \infty$, dann ∞ kürzen und 1 erhalten? Oder direkt ∞ kürzen und 2 erhalten?

Vielleicht ist es auch hilfreich, sich klarzumachen, dass der Begriff „Unendlich“ ein reiner Verstandesbegriff ist. Es gibt nichts tatsächlich unendlich oft. Auch nicht Sandkörner oder Sterne.

Für $a_n \to \infty$ wachsen die Zahlen a_n über alle Grenzen an. Der Kehrwert dieser Zahlen wird daher beliebig klein. Umgekehrt wird der Kehrwert einer positiven Nullfolge beliebig groß. Bestimmt divergente Folgen und Nullfolgen verhalten sich daher präzise formuliert in folgender Weise „reziprok“ zueinander:

Satz 2.5

(1) *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei bestimmt divergent gegen* $+\infty$ *oder* $-\infty$. *Dann ist* $a_n \neq 0$ *für fast alle* n, *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

(2) *Die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei eine Nullfolge mit positiven (bzw. negativen) Folgengliedern. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \qquad \left(\textit{bzw.} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty\right).$$

Lesehilfe
Gäbe man in Teil (2) nicht vor, dass die Nullfolge positiv (bzw. negativ), also ohne Vorzeichenwechsel sein muss, so könnte ihr Kehrwert ständig das Vorzeichen wechseln und wäre damit nicht mehr bestimmt divergent.

Beweis

(1) Wir betrachten den Fall mit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Fast alle Folgenglieder liegen dann oberhalb jeder Schranke, also auch oberhalb von 0. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 1/\varepsilon \; \forall n \geq N$. Das bedeutet aber $1/a_n < \varepsilon \; \forall n \geq N$.
Für den Fall $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ betrachtet man die Folge $(-a_n)$.

(2) Für eine positive Nullfolge sei $G > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| < 1/G \; \forall n \geq N$. Also ist $1/|b_n| = 1/b_n > G \; \forall n \geq N$, also $(1/b_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$. Analog für negative Folgen. •

Beispiele

(1) Die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert für $x > 1$ bestimmt gegen Unendlich: Sei $G \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es nach Satz 1.5 ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $x^n > G$. Wegen $x > 1$ gilt dies dann auch für alle größeren n. Die Folge $(1/x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher für $x > 1$ gegen 0.

(2) Die Folge $(1/x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert für $0 < x < 1$ bestimmt gegen $+\infty$, siehe (2.1). Für $-1 < x < 0$ ist sie hingegen nicht bestimmt divergent.

2.1.5 Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen

Wir haben in Abschn. 1.1.2 gesehen, dass den rationalen Zahlen etwas fehlt, dass sie also in gewissem Sinn nicht „vollständig“ sind.

Dass dies bei den reellen Zahlen endgültig nicht mehr so ist, wird durch das Vollständigkeitsaxiom ausgedrückt. Zur Formulierung dieses Axioms benötigen wir den Begriff einer *Cauchy-Folge*[1]:

[1] Benannt nach dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857.

Definition 2.4 *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt eine* Cauchy-Folge, *wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N.$$

Lesehilfe
Diese Definition sieht zwar auf den ersten Blick ähnlich aus wie die Definition 2.1 der Konvergenz einer Folge. Aber genau hinsehen: Bei der Cauchy-Folge ist von keinem Grenzwert a die Rede. Es liegen lediglich die Folgenglieder a_n mit höher werdendem Index n beliebig dicht zusammen.

Man kann leicht zeigen, dass jede konvergente Folge mit $\lim a_n = a$ auch die Cauchy-Eigenschaft erfüllt: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ja ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt daher

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lesehilfe
Ob zunächst ε oder $\varepsilon/2$, ist egal, da ε eh beliebig vorgegeben werden kann, und es gibt immer ein passendes N. Mit anfangs $\varepsilon/2$ kommt dann hinten so schön ε heraus. Solche „Tricks“ haben wir beispielsweise auch schon in den Beweisen der Rechenregeln für Grenzwerte gesehen.

Ob umgekehrt jede Cauchy-Folge auch eine konvergente Folge ist, ist zunächst nicht klar. Genau dies aber besagt das *Vollständigkeitsaxiom*:

In $\mathbb{R}$ *konvergiert jede Cauchy-Folge.*

Dieses Axiom drückt aus, dass jede reelle Cauchy-Folge konvergiert, und dass sie gegen eine reelle Zahl konvergiert. Aus diesem Grund nennt man den Körper der reellen Zahlen *vollständig*.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen kein analoges Vollständigkeitsaxiom. Es gibt nämlich rationale Cauchy-Folgen, die gegen eine irrationale Zahl, also eine Zahl außerhalb $\mathbb{Q}$, konvergieren. Als ein Beispiel sei die Folge $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt. Ihre Folgenglieder sind rational, es handelt sich um eine Cauchy-Folge und sie besitzt einen Grenzwert, der allerdings keine rationale Zahl mehr ist; es gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \tag{2.6}$$

wobei e für die Euler-Zahl steht, eine irrationale Zahl (siehe (3.9) und Abschn. 6.2.3).

► **Zwischenfrage (2)** Warum sind denn die Folgenglieder $(1+\frac{1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$ rational?

2.2 Unendliche Reihen

Bisher haben wir nur endliche Summen, also Ausdrücke der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit einem $n \in \mathbb{N}$ betrachtet. Hier haben wir es mit $n + 1$ Summanden a_k zu tun, die einfach aufaddiert werden.

Dehnt man eine Summe auf unendlich viele Summanden aus, so spricht man von einer *unendlichen Reihe*, und die Situation wird wesentlich komplizierter, da z. B. nicht mehr klar ist, ob die Summe einen endlichen Wert hat.

Definition 2.5 *Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die* Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n. \tag{2.7}$$

Die Folge dieser Partialsummen, d. h. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, heißt dann die unendliche Reihe *mit den Gliedern a_k und wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.*

Eine unendliche Reihe ist also eine Folge, umgekehrt kann aber auch jede beliebige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Reihe dargestellt werden, denn es gilt

$$b_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}), \tag{2.8}$$

und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entspricht somit der Reihe $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k-1})$.

Lesehilfe
Wenn du die Darstellung der b_n als Summe mal für $n = 0, 1, 2, 3$ ausschreibst, siehst du, wie einfach diese Gleichung ist. Eine solche Summe, deren einzelne Glieder sich unmittelbar aufheben, nennt man eine „Teleskopsumme“ (analog einem Teleskopstock, der sich zusammenschieben lässt).

Wir halten fest: *Folgen und Reihen sind vollständig äquivalent zueinander.*

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Die Frage war, warum $(1 + \frac{1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$ rational ist.
Der Ausdruck $1 + \frac{1}{n}$ ist ein Bruch. Damit ist auch jede Potenz dieses Ausdrucks, also $(1 + \frac{1}{n})^n$, wieder ein Bruch, und damit eine rationale Zahl.

2.2.1 Unendliche geometrische Reihe

Betrachten wir ein erstes wichtiges Beispiel, indem wir die geometrische Reihe auf unendlich viele Summanden ausdehnen. Ihr Wert bleibt in bestimmten Fällen endlich, wie wir leicht zeigen können:

Satz 2.6 (Geometrische Reihe) *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *konvergiert für alle* x *mit* $|x| < 1$ *mit dem Grenzwert*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{2.9}$$

Beweis Für die Partialsummen gilt $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (siehe Satz 1.4). Nun ist $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ für $|x| < 1$ (siehe (2.1)), und damit $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/(1-x)$. •

Beispiele

(1) Für $x = \pm 1/2$ ergibt die geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}.$$

(2) Unendliche periodische Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Betrachten wir ein Beispiel:

$$x = 0{,}172\overline{58} = \frac{172}{1\,000} + \frac{58}{10^5} + \frac{58}{10^7} + \ldots = \frac{172}{1\,000} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{58}{10^{5+2k}}.$$

Nun ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{58}{10^{5+2k}} = \frac{58}{10^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{58}{10^5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(10^{-2}\right)^k = \frac{58}{10^5} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{58}{99\,000},$$

also

$$x = \frac{172}{1\,000} + \frac{58}{99\,000} = \frac{17\,086}{99\,000} = \frac{8\,543}{49\,500}.$$

Übrigens lässt sich das Umrechnen durchaus auch ohne geometrische Reihe erreichen. In diesem Beispiel ist letztendlich $\tilde{x} = 0{,}\overline{58}$ zu bewältigen: Damit ist $100\tilde{x} = 58{,}\overline{58}$, Subtrahieren ergibt $99\tilde{x} = 58$, also $\tilde{x} = 58/99$.

Lesehilfe
Zur Erinnerung: Willst du umgekehrt die Dezimalzahldarstellung eines Bruchs erhalten, so teilst du (schriftlich) Zähler durch Nenner, und erhälst dabei ggf. die Periodizität, weil sich die Zahlen immer wiederholen.

► **Zwischenfrage (3)** Die Griechen beschäftigten sich mit folgendem Paradoxon: Der schnelle Läufer Achill versucht eine Schildkröte einzuholen, die sich in bestimmtem Abstand vor ihm befindet und sich langsam von ihm wegbewegt. Aber es kann ihm trotz seiner größeren Geschwindigkeit nie gelingen, und zwar aus folgendem Grund: Achill läuft los, als die Schildkröte sich an Position (0) befindet. Wenn er (0) erreicht, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter, bei Position (1); wenn er dort ankommt, ist sie wieder weiter, bei Position (2); bis er dort ist, ist sie bei (3) usw. bis ins Unendliche. Sie bleibt ihm also immer ein Stück voraus.
Wie können wir dieses Paradoxon auflösen?

2.2.2 Konvergenz unendlicher Reihen

Bei der unendlichen geometrischen Reihe konnte man glücklicherweise sehen, unter welchen Bedingungen sie konvergent ist, und kennt dann sogar ihren Wert.

Aber nicht immer ist die Frage, ob eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, ohne Weiteres zu beantworten. Man kann hierzu verschiedene *Konvergenzkriterien* aufstellen, die dann eine Prüfung erlauben.

Überträgt man die Cauchy-Eigenschaft von Folgen auf Reihen, so erhält man das *Cauchy-Konvergenzkriterium*:

Satz 2.7 *Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N.$$

Beweis Es ist hier lediglich die Cauchy-Folgenbedingung 2.4 für eine Reihe niedergeschrieben. Die Konvergenz ergibt sich daher aus dem Vollständigkeitsaxiom für reelle Zahlen. Und umgekehrt ist jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge. •

Daraus ergibt sich die folgende *notwendige Bedingung* für die Konvergenz einer Reihe:

Satz 2.8 *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kann höchstens dann konvergieren, wenn die a_k eine Nullfolge bilden, d. h., wenn gilt* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Beweis Wenn die Reihe konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$. Insbesondere gilt daher für $n = m$: $|a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq N$, also $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. •

Lesehilfe
„Notwendig" heißt, die Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Reihe überhaupt konvergieren kann. Das heißt aber nicht, dass es dann tatsächlich schon so wäre. „Hinreichend" bedeutet hingegen, dass es ausreichen würde, um die Konvergenz sicherzustellen. Das müssen wir sorgfältig unterscheiden, zumal diese Begriffe in der Mathematik häufig verwendet werden.

Die Summanden einer unendlichen Reihe müssen also beliebig klein werden, damit Konvergenz vorliegen kann.

Dies ist jedoch *nicht hinreichend*, wie wir an folgenden **Beispielen** sehen können:

(1) Bei der so genannten *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gehen die Summanden gegen Null. Aber die Reihe divergiert, denn es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{2^k \text{ Summanden}} + \ldots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots\end{aligned}$$

Wie man sieht, ergeben sich unendlich viele Summanden $1/2$ und damit kein endlicher Gesamtwert der Reihe.

Lesehilfe
Bei der obigen Abschätzung passiert Folgendes: Es ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, die nächste Klammer liefe von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{16}$ und ist größer als $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ usw. bis zur k-ten Klammer und bis ins Unendliche.

Die *alternierende* harmonische Reihe hingegen, bei der jeder zweite Summand ein negatives Vorzeihen erhält, konvergiert mit dem Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{2.10}$$

Den Nachweis für diesen Wert werden wir mit der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus in Abschn. 7.5.3 nachholen.
(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Dies kann man sich wie folgt klarmachen: Für $n \geq 2$ ist $n^2 \geq n(n-1)$ und beides größer 0, so dass für die Kehrwerte gilt

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Dies bedeutet, wenn wir es für die einzelnen Summanden verwenden:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 2 - \frac{1}{m} \leq 2. \tag{2.11}$$

Lesehilfe
In der Teleskopsumme in der Mitte von (2.11) hebt sich fast alles auf.

Die Reihe ist somit beschränkt, ihr Wert bleibt für beliebige m kleiner als 2. Aufgrund ihrer positiven Reihenglieder steigt sie stets an, d. h., die Folge ihrer Partialsummen ist monoton steigend. Nach Satz 2.2 ist die Reihe daher konvergent. Übrigens kann ihr Wert exakt angegeben werden:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449. \tag{2.12}$$

Aus diesen Beispielen können wir bereits einiges über das Verhalten unendlicher Reihen ablesen:

- Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist es notwendig, dass die Reihenglieder a_n „hinreichend schnell“ gegen Null konvergieren. Bei $a_n = 1/n$ ist das offenbar noch nicht der Fall, wohl aber bei $1/n^2$.
- Bei alternierenden Reihen kompensieren sich die Reihenglieder teilweise gegenseitig. Dies führt beispielsweise dazu, dass die mit dem alternierenden Vorzeichen versehene Reihe $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ konvergiert, im Unterschied zur harmonischen Reihe $\sum_n 1/n$.

[2] Der Nachweis dieses Reihenwerts kann mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation der Fourier-Reihenentwicklung erfolgen.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Die Frage war, warum Achill die Schildkröte einholt. Wir haben es hier mit einer unendlichen Reihe zu tun: Aufsummiert werden die immer kürzer werdenden Zeitabschnitte bis zum Erreichen der zuletzt von der Schildkröte eingenommenen Position. Und eine solche unendliche Reihe muss keineswegs unendlich groß werden, sondern bleibt endlich, wenn die Summanden schnell genug klein werden. Die endliche Zeit bis zum Einholen wird also nur gedanklich in unendlich viele, immer kleiner werdende Zeitabschnitte zerlegt.
Wir können es auch ausrechnen: Achill bewege sich mit der Geschwindigkeit v_{A}, die Schildkröte mit $v_{\mathrm{S}} < v_{\mathrm{A}}$, und sie besitze anfangs den Vorsprung x_0. Die Anfangsposition (0) der Schildkröte erreicht Achill nach der Zeit $t_0 = x_0/v_{\mathrm{A}}$. Die Position (1) ist davon die Strecke $x_1 = v_{\mathrm{S}} t_0$ entfernt, so dass er dort $t_1 = x_1/v_{\mathrm{A}} = (v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}}) t_0$ später ankommt. Die Zeit für den nächsten Abschnitt beträgt $t_2 = x_2/v_{\mathrm{A}} = (v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}}) t_1 = (v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}})^2 t_0$ und die für den n-ten Abschnitt entsprechend $t_n = (v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}})^n t_0$. Wir haben daher die Gesamtzeit

$$t_g = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_{\mathrm{S}}}{v_{\mathrm{A}}}\right)^k t_0 = t_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_{\mathrm{S}}}{v_{\mathrm{A}}}\right)^k .$$

Wir haben also nichts anderes als die geometrische Reihe, die für $v_{\mathrm{S}} < v_{\mathrm{A}}$, d. h. $v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}} < 1$, nach Satz 2.6 einen endlichen Gesamtwert hat:

$$t_g = t_0 \frac{1}{1 - v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}}} = \frac{x_0}{v_{\mathrm{A}}} \frac{1}{1 - v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{A}}} . \tag{2.13}$$

2.2.3 Absolute Konvergenz

Man verwendet für Reihen noch einen stärkeren Konvergenzbegriff, den der *absoluten Konvergenz*:

Definition 2.6 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt* absolut konvergent, *wenn auch die Reihe der Beträge* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Beispielsweise ist die Reihe (2.10) zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Lesehilfe
Absolute Konvergenz bedeutet also, dass eine Reihe nicht auf Vorzeichenwechsel angewiesen ist, um zu konvergieren. Für Reihen ohne Vorzeichenwechsel bei den Summanden ist die absolute Konvergenz offenbar gleichbedeutend mit der normalen Konvergenz.

▶ **Zwischenfrage (4)** Warum ist eine absolut konvergente Reihe auch „normal" konvergent?

Folgende bemerkenswerte Tatsache halten wir ohne Beweis fest: Erst bei absolut konvergenten Reihen ist sichergestellt, dass auch jede Umordnung der Reihe gegen denselben Grenzwert konvergiert. Umordnung bedeutet, dass die Reihenfolge der Summanden verändert wird. Es ist vielleicht überraschend, dass eine solche Umordnung den Grenzwert einer Reihe verändern kann; man muss sich aber klarmachen, dass das Kommutativgesetz der Addition nur für endliche Summen gilt.

Lesehilfe
Das Kommutativgesetz wird normalerweise für zwei Summanden formuliert, $a + b = b + a$. Die wiederholte Anwendung dieses Gesetzes ergibt dann die Kommutativität für endlich viele Summanden. Aber nicht für unendlich viele!

Bei unendlichen Summen wie in (2.10) ist es möglich, durch eine Umordnung die negativen Summanden mit immer größerer Verzögerung gegen die positiven einfließen zu lassen, und dass diese umgeordnete Reihe dann divergiert, oder, mit einer anderen Umordnung, gegen einen beliebigen anderen Wert konvergiert.[3]

Erst absolut konvergente Reihen sind also „problemlos" in dem Sinn, dass die Reihenfolge der Summanden analog zum Kommutativgesetz keine Rolle spielt.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, warum eine absolut konvergente Reihe auch „normal" konvergent ist.
Dass die Reihe $\sum_k |a_k|$ konvergent ist, ist nach dem Cauchy-Konvergenzkriterium, Satz 2.7, gleichbedeutend mit:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N.$$

Die Summen $\sum_{k=m}^{n} |a_k|$ sind endliche Summen und die Dreiecksungleichung ergibt

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| .$$

Es gilt also erst recht $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$, gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe $\sum_k a_k$.

2.2.4 Quotientenkriterium

Als ein für uns im Folgenden noch wichtiges Beispiel für Konvergenzkriterien von Reihen betrachten wir das so genannte *Quotientenkriterium*:

[3] Das ist der Riemann-Umordnungssatz, benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann, 1826–1866.

Satz 2.9 (Quotientenkriterium) *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$. *Es gebe eine reelle Zahl* q *mit* $0 < q < 1$ *so, dass gilt*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ *absolut.*

Beweis Ein Ändern endlich vieler Summanden einer unendlichen Reihe verändert deren Konvergenzverhalten nicht (es ändert allenfalls den Grenzwert). Wir dürfen daher annehmen, dass gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es ist also $|a_{n+1}| \leq |a_n| q$, und daraus ergibt sich mit vollständiger Induktion

$$|a_n| \leq |a_0| q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies bedeutet, dass die Reihe $\sum_n |a_0| q^n$ in jedem einzelnen Summanden größer oder gleich der Reihe $\sum_n |a_n|$ ist, und beide Reihen enthalten nur nicht-negative Glieder. Mit Hilfe der geometrischen Reihe $(*)$, siehe Satz 2.6, erhält man aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_0| q^n = |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} q^n \stackrel{(*)}{=} \frac{|a_0|}{1-q}.$$

Diese Reihe konvergiert also, woraus folgt, dass auch die kleinere Reihe $\sum_n |a_n|$ konvergieren muss. •

Lesehilfe Beweis
Der kleine Nachweis mit vollständiger Induktion sollte nicht schwerfallen. Zur Klarheit: Die Behauptung lautet $|a_n| \leq |a_0| q^n \ \forall n \in \mathbb{N}$, und man darf die Ungleichung $|a_{n+1}| \leq |a_n| q \ \forall n \in \mathbb{N}$ verwenden. Und zur letzten Folgerung: Eine Reihe nicht-negativer Glieder ist eine monoton steigende Folge, außerdem ist sie hier endlich, so dass Satz 2.2 gilt.

Die im Quotientenkriterium enthaltene Bedingung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ mit einem $q < 1$ ist *nicht zu verwechseln* mit der schwächeren Bedingung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Letztere ist beispielsweise auch für die divergente harmonische Reihe $\sum_n \frac{1}{n}$ erfüllt: Es ist dann nämlich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

aber wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ gibt es kein $q < 1$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$.

Das Quotientenkriterium ist aber insbesondere dann erfüllt, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g \qquad \text{mit einem } g < 1. \tag{2.14}$$

Denn wenn sich die Quotienten $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ fast alle in jeder ε-Umgebung von $g < 1$ befinden, wählen wir z. B. $\varepsilon = (1-g)/2$, und damit liegen dann fast alle $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ unterhalb von $q = 1 - \varepsilon$.

Wir werden das Quotientenkriterium verwenden, um die absolute Konvergenz der Exponentialreihe zu beweisen, siehe Satz 3.1.

Das Wichtigste in Kürze

- Eine **Folge** ordnet jeder natürlichen Zahl n ein Folgenglied a_n zu.
- Besitzt eine Folge einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so nennt man sie **konvergent**. Es liegen dann fast alle Folgenglieder in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von a. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.
- **Bestimmte Divergenz** gegen Unendlich bedeutet, dass die Folgenglieder mit wachsendem n unendlich groß werden.
- Für die Berechnung von Grenzwerten gibt es eine Reihe von Rechenregeln. Zum Beispiel ist der Kehrwert einer bestimmt divergenten Folge eine Nullfolge.
- Die reellen Zahlen sind **vollständig**.
- Eine **Unendliche Reihe** ist eine unendliche Summe. Unendliche Summen können endliche Werte besitzen, wenn die Summanden schnell genug gegen Null konvergieren.
- Bei **absolut konvergenten Reihen** konvergiert auch die Reihe der Beträge. Erst die absolute Konvergenz stellt sicher, dass der Reihenwert bei einer Umordnung unverändert bleibt.
- Das **Quotientenkriterium** ist ein hinreichendes Kriterium für die absolute Konvergenz einer Reihe.

Und was bedeuten die Formeln?

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq N,$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N,$$

$$\forall G \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } a_n > G\ \forall n \geq N,$$

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \quad \lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n),$$

$$\lim(c a_n) = c \lim a_n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty,$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq n_0,\ 0 < q < 1.$$

Übungsaufgaben

A2.1 Begründe, warum jede konvergente Folge beschränkt ist.

A2.2 Begründe, warum eine beschränkte Folge nicht konvergent sein muss.

A2.3 Ist ∞ eine reelle Zahl?

A2.4 Stimmt die Aussage: „Der Kehrwert einer Nullfolge ist eine bestimmt divergente Folge"?

A2.5 Bestimme, sofern er existiert, den Grenzwert der Folgen für $n \to \infty$:

$$(1)\ \left(n^2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad (2)\ \left((-1)^n n^2 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
$$(3)\ \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad (4)\ \left(\frac{n-3}{n+7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(5)\ \left(\frac{2n-3}{n+7}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (6)\ \left(\frac{n-3}{2n^2+7}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

A2.6 Ist die Summe $\sum_{k=0}^{n}(k^2-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich?

A2.7 Stimmt die Aussage: „Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"?

A2.8 Lässt sich das Konvergenzverhalten einer Reihe ändern, indem man ihren Startwert ändert, also statt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ mit einem geeignet gewählten $n_0 \in \mathbb{N}$ betrachtet?

A2.9 Die Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, wie wir wissen. Wie sieht es mit den folgenden zwei Reihen aus?

$$s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad s_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Und warum geht die zweite Reihe erst bei $n = 2$ los?

A2.10 Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{7n^2+17n}$?

Funktionen und Grenzwerte

3

Die meisten Anwendungen der Analysis beziehen sich auf Funktionen, und die Analyse ihrer Eigenschaften ist einer der Hauptgegenstände der Analysis. Um ihr Verhalten verstehen zu können, müssen wir insbesondere den Grenzwertbegriff auf Funktionen übertragen.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Funktionen sind ein wesentlicher Gegenstand der Analysis. Dass wir uns intensiv mit ihnen beschäftigen, ist klar.
- Wir lernen einige grundlegende Beispiele von Funktionen und ihren Graphen kennen.
- Die Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik. Wir besprechen sie daher besonders intensiv. Und sind dabei froh, dass wir uns schon mit unendlichen Reihen beschäftigt haben. Darüber hinaus lernen wir, was eine Funktionalgleichung ist.
- Grenzwerte von Funktionen sind komplizierter als Folgengrenzwerte. Wir müssen uns ansehen, wie sie funktionieren.
- Die Stetigkeit ist eine wichtige Eigenschaft von Funktionen. Wir müssen ihre Bedeutung genau kennen.

3.1 Funktion und Funktionsgraph

Eine reelle Funktion ist nichts anderes als eine Abbildung von reellen Zahlen:

Definition 3.1 *Es sei D eine Teilmenge der reellen Zahlen, $D \subseteq \mathbb{R}$. Unter einer reellen* Funktion *auf D versteht man eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Die Menge D*

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_3

heißt der Definitionsbereich *von* f. *Der* Graph *von* f *ist die Menge*

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Lesehilfe
Der Definitionsbereich D ist eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Oft werden wir es hier mit (uneigentlichen) Intervallen zu tun haben, z. B. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Und natürlich ist auch $D = \mathbb{R}$ möglich.

Der Buchstabe „Γ" ist das große griechische Gamma. Es entspricht dem lateinischen „G", also dem Anfangsbuchstaben von „Graph".

Durch die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird jedem $x \in D$ *eindeutig* ein *Funktionswert* $f(x)$ zugeordnet. Der Graph von f ist eine Punktmenge im $\mathbb{R}^2$, die in einem kartesischen xy-Koordinatensystem dargestellt werden kann. Dabei werden die x-Werte in der Regel auf der *Rechtsachse* aufgetragen und die y-Werte auf der *Hochachse*. Der x-Wert eines Punkts kann dann auch als *Rechtswert* angesprochen werden und der y-Wert als *Hochwert*.[1]

Lesehilfe
Der Graph einer Funktion entspricht in der Regel einer „Linie" in einem xy-Koordinatensystem. Diese Linie ist aber nichts anderes als eine Menge einzelner Punkte. Und der Graph ist eben die spezielle Punktmenge, bei der zur „x-Koordinate" x die „y-Koordinate" $f(x)$ gehört.

Die Menge

$$f(D) := \{y = f(x) \mid x \in D\} \tag{3.1}$$

nennt man das *Bild der Funktion* f oder auch die *Bildmenge*. Sie ist die Menge aller $y \in \mathbb{R}$, die tatsächlich als Bild eines $x \in D$ vorkommen. Ebenso kann man für jede Teilmenge $T \subset D$ auch die Menge

$$f(T) := \{y = f(x) \mid x \in T\} \tag{3.2}$$

betrachten, also die Menge der Bilder aller $x \in T$.

Für ein gegebenes $y \in f(D)$ heißt ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ ein *Urbild von* y.

Beispiele
(1) Die *konstante Funktion* ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; sie ordnet jedem x-Wert denselben Funktionswert $c \in \mathbb{R}$ zu, also:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c. \tag{3.3}$$

[1] Den Rechtswert bezeichnet man auch als *Abszisse* und den Hochwert als *Ordinate*. Die Achsen wären dann die Abszissenachse und die Ordinatenachse.

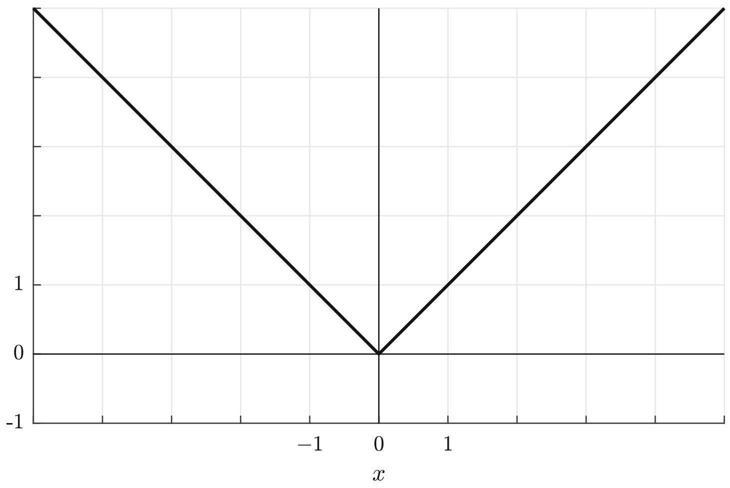

Abb. 3.1 Die Betragsfunktion abs : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet jeden x-Wert auf seinen Betrag $|x|$ ab. Für positive x entspricht ihr Graph dem der identischen Funktion id, für negative der Funktion $-$id (siehe auch (1.9))

(2) Die *identische Abbildung* bildet jedes $x \in \mathbb{R}$ auf sich selbst ab:

$$\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{id}(x) = x. \tag{3.4}$$

Lesehilfe
Hier und im Folgenden verwenden wir für manche Funktionen explizite Funktionsbezeichnungen. Diese Bezeichnungen sind oft praktisch. Du kennst sie von den Tasten auf einem Taschenrechner, etwa sin oder cos. Und auch id ist oft nützlich, wenn auch nicht auf dem Taschenrechner :-)

(3) Die *Betragsfunktion* ordnet einer Zahl ihren Betrag zu:

$$\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{abs}(x) := |x|. \tag{3.5}$$

Die Bezeichnung „abs" stammt von „Absolutbetrag". Ihr Graph ist in Abb. 3.1 dargestellt.
(4) Eine *Polynomfunktion* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad n gehorcht einer Funktionsvorschrift

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{3.6}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $a_n \neq 0$.

► **Zwischenfrage (1)** Warum wird bei der Polynomfunktion (3.6) $a_n \neq 0$ verlangt?

(5) Als Beispiel für eine etwas exotischere Funktion geben wir die so genannte *Dirichlet-Funktion* d an.[2] Sie ist wie folgt definiert:

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad d(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Den Graph dieser Funktion kann man nicht zeichnen. Er besteht aus unendlich vielen beliebig dicht beieinanderliegenden Punkten auf den Geraden $y = 0$ und $y = 1$, und diese Punkte bilden dennoch keine durchgehenden Geraden.

Lesehilfe
Die Angabe einer Funktion erfordert immer auch die Festlegung eines Definitionsbereichs. Hier kann man festlegen, was man möchte, z. B. wäre auch $\mathrm{id} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn es keine Gründe für eine Beschränkung gibt, wählen wir in der Regel den größtmöglichen Definitionsbereich.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, warum in einem Polynom n-ten Grads $a_n \neq 0$ sein muss.
Wenn das Polynom tatsächlich den Grad n besitzen soll, darf a_n nicht 0 sein. Ansonsten hätte es einen kleineren Grad.

3.2 Exponentialfunktion

Eine besonders wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Sie ergibt sich aus der *Exponentialreihe*. Für sie gilt

Satz 3.1 *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die* Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{3.8}$$

absolut konvergent.

Beweis Wir wenden das Quotientenkriterium an, siehe Satz 2.9: Mit $a_n := x^n/n!$ gilt für alle $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Für jedes beliebige $x \in \mathbb{R}^*$ geht dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0. Das Quotientenkriterium ist daher leicht zu erfüllen: Für $n \geq 2|x|$ etwa ist $\frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}$; also

[2] Benannt nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859.

haben wir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 2|x|.$$

Für $x = 0$ schließlich enthält die Reihe nur einen Summanden ungleich 0, $\exp(0) = 1$. •

Auch wenn der Beweis mit Hilfe des Quotientenkriteriums leichtfällt, so ist doch bemerkenswert, dass die Exponentialreihe auch für „große" x konvergiert. Für $x = 10$ etwa lauten ja die ersten Summanden

$$\exp(10) = 1 + \frac{10}{1} + \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{6} + \frac{10^4}{24} + \ldots,$$

sind also recht groß und wachsen zunächst auch an. Für größer werdende n setzt sich dann aber die Fakultät im Nenner durch und lässt die Summanden schließlich schnell sehr klein werden; so ist etwa

$$\frac{10^{50}}{50!} \approx \frac{10^{50}}{3 \cdot 10^{64}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-15}.$$

Mit der Exponentialreihe definiert man die so genannte *Euler-Zahl*[3]

$$\mathrm{e} := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \approx 2{,}71828. \tag{3.9}$$

Die Euler-Zahl ist eine irrationale Zahl. Für sie gibt es noch eine weitere Darstellung als Grenzwert einer Folge; es gilt nämlich auch

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

wie wir in Abschn. 6.2.3 zeigen werden.

Die *Exponentialfunktion* ist nun $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siehe Abb. 3.2. Wie wir gesehen haben, lassen sich zwei Werte der Exponentialfunktion sofort angeben:

$$\exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(1) = \mathrm{e}. \tag{3.10}$$

Außerdem gilt der

Satz 3.2 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y). \tag{3.11}$$

[3] Benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783.

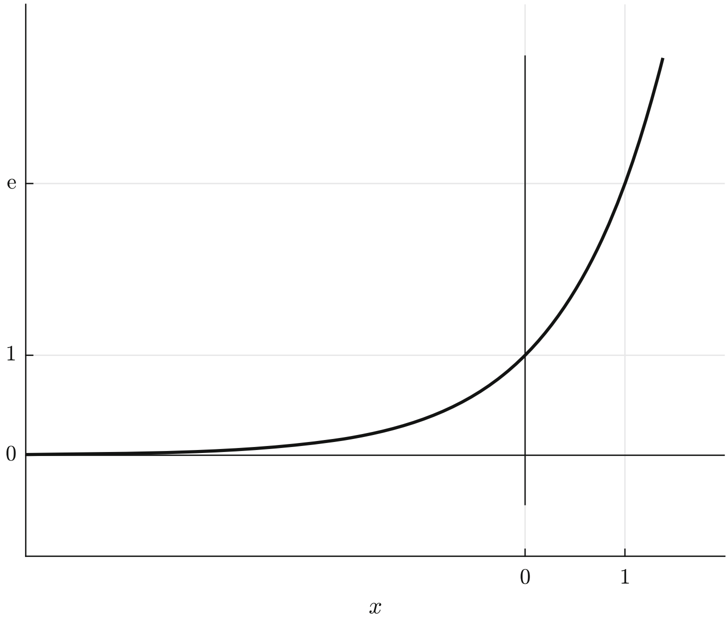

Abb. 3.2 Der Graph der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneidet die y-Achse bei 1 und besitzt bei $x = 1$ den Funktionswert e. Die Funktion nimmt nur positive Werte an, wobei sie mit größer werdendem x stets ansteigt

Diese wichtige Gleichung heißt *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*, weil nur Exponentialfunktionen die Eigenschaft aufweisen, dass der Funktionswert der Summe zweier Argumente gleich dem Produkt der einzelnen Funktionswerte ist, dass also gilt

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Auch für andere Funktionen gibt es – dann natürlich andere – „Funktionalgleichungen", etwa für den Logarithmus, wie wir in Satz 4.2 sehen werden.

3.2.1 Zum Beweis der Funktionalgleichung

Zum Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion benötigen wir zwei Sätze, die wir ohne Beweis angeben und verwenden wollen.

Es ist offenbar notwendig, zwei unendliche Reihen miteinander zu multiplizieren. Dies erlaubt das so genannte *Cauchy-Produkt* von Reihen:

Satz 3.3 *Es seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *zwei absolut konvergente Reihen. Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Lesehilfe
Zwei endliche Summen miteinander zu multiplizieren ist einfach, durch Ausmultiplizieren der einzelnen Summanden miteinander. Das Cauchy-Produkt stellt die Erweiterung des Ausmultiplizierens auf unendliche Summen dar, wobei aufgrund der unendlichen Summen auch eine Aussage über die Konvergenz getroffen werden muss.

Des Weiteren benötigen wir den *binomischen Lehrsatz*:

Satz 3.4 *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{3.12}$$

Der binomische Lehrsatz ist nichts anderes als die Verallgemeinerung der „binomischen Formeln". Die in ihm auftretenden *Binomialkoeffizienten*, die sich für $n \geq k \geq 0$ berechnen lassen als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{3.13}$$

ergeben das als *Pascal-Dreieck* bekannte Zahlenschema. Sein Beweis kann übrigens ohne größere Schwierigkeiten über vollständige Induktion und unter Verwendung der Rechenregeln für Binomialkoeffizienten erfolgen.

Lesehilfe
Das Pascal-Dreieck ist das Zahlenschema der Form

$$\begin{array}{rccccccccccl}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \quad \text{usw.,}
\end{array}$$

bei dem sich eine Zahl immer als die Summe der zwei diagonal darüberstehenden Zahlen ergibt. In der nullten Reihe steht der Binomialkoeffizient $\binom{0}{0}$, in der ersten die Koeffizienten $\binom{1}{0}$ und $\binom{1}{1}$, in der zweiten $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ und $\binom{2}{2}$ usw. Dieses Zahlenschema erlaubt die einfache Berechnung höherer Potenzen von $x + y$. Siehst du z. B. in die Zeile für $n = 4$, so liest du ab:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4\\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Genau dies ist die Aussage des binomischen Lehrsatzes.

► **Zwischenfrage (2)** Wie lautet der binomische Lehrsatz 3.4 mit seinen Binomialkoeffizienten ausgeschrieben für $n = 4$?

Mit Hilfe dieser beiden Sätze kann die Funktionalgleichung nun unmittelbar nachgerechnet werden: Wir bilden das Cauchy-Produkt von $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$. Der n-te Koeffizient der Produktreihe lautet

$$\begin{aligned}c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}\\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n;\end{aligned}$$

es ergibt sich also der n-te Koeffizient von $\exp(x + y)$. ○

3.2.2 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Wie wir gesehen haben, erfüllt die Exponentialfunktion (3.11),

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Daraus ergeben sich weitere grundlegende Eigenschaften:

Satz 3.5
(1) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$ *und* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
(2) *Für jede ganze Zahl* $k \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp(k) = \mathrm{e}^k$.

Beweis
(1) Aus der Funktionalgleichung folgt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$, also $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. Für $x \geq 0$ sieht man unmittelbar anhand der Reihe $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 > 0$. Für $x < 0$ ist $-x > 0$, also $\exp(-x) > 0$ und damit auch $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

(2) Wir zeigen mit vollständiger Induktion (und unter Verwendung der Rechenregeln für Potenzen, siehe ggf. Abschn. 1.2.2), dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(n) = \mathrm{e}^n$:
Induktionsanfang $n = 0$: $\exp(0) = 1 = \mathrm{e}^0$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: $\exp(n + 1) = \exp(n)\exp(1) \overset{\text{IV}}{=} \mathrm{e}^n \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n+1}$.
Ferner ist nach (1) $\exp(-n) = 1/\exp(n) = 1/\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{-n}$. Somit gilt $\exp(k) = \mathrm{e}^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. •

Lesehilfe zum Beweis
Der wesentliche Trick für (1) ist, die Funktionalgleichung zu verwenden, um die Gleichung $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$ zu erhalten. Dass $\exp(0) = 1$ ist, sollte klar sein – schreib im Zweifel einfach noch mal die Reihe für $\exp(0)$ hin. Nun gilt: Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Da $\exp(x)\exp(-x)$ immer gleich 1 ist, kann $\exp(x)$ nie 0 sein.

Die Formel $\exp(k) = \mathrm{e}^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist übrigens der Grund für die Bezeichnung „Exponentialfunktion". Man kann sagen, dass $\exp(x)$ die Potenzen e^k interpoliert und auf nicht-ganze Exponenten x ausdehnt. Man schreibt deshalb auch

$$\exp(x) =: \mathrm{e}^x. \tag{3.14}$$

In dieser Schreibweise lautet die Funktionalgleichung

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y.$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war nach dem binomischen Lehrsatz für $n = 4$ mit seinen Binomialkoeffizienten.
Für $n = 4$ ergibt der binomische Lehrsatz 3.4

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4.$$

3.3 Zusammengesetzte Funktionen

Funktionen mit demselben Definitionsbereich lassen sich über die so genannten *rationalen Operationen* zu weiteren Funktionen zusammensetzen:

Definition 3.2 *Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Dann definieren wir die Funktionen*

$$\begin{aligned} f + g : D \to \mathbb{R} \quad &\textit{durch} \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x),\\ cf : D \to \mathbb{R} \quad &\textit{durch} \quad (cf)(x) := cf(x),\\ fg : D \to \mathbb{R} \quad &\textit{durch} \quad (fg)(x) := f(x)g(x). \end{aligned}$$

Mit $D' := \{x \in D | g(x) \neq 0\}$ *definieren wir ferner*

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R} \quad \textit{durch} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Wir können also beispielsweise von der Summe oder dem Produkt von Funktionen reden, wobei sich diese Operationen für die Funktionen dann einfach auf die Funktionswerte übertragen.

Darüber hinaus können Funktionen auch „hintereinandergeschaltet“ werden, solange sichergestellt ist, dass die Funktionswerte der ersten Funktion im Definitionsbereich der zweiten Funktion liegen:

Definition 3.3 *Es seien* $g : D \to \mathbb{R}$ *und* $f : E \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $g(D) \subseteq E$. *Dann definieren wir*

$$f \circ g : D \to \mathbb{R} \quad \textit{durch} \quad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Man nennt $f \circ g$ *die* Verkettung *der Funktionen* f *und* g.

Lesehilfe
Das Zeichen „$\circ$“ wird hier als „nach“ gesprochen, also „f nach g“. Diese Sprechweise gibt die Bedeutung unmittelbar wieder.

Beispiele
(1) Eine *rationale Funktion* ist der Quotient zweier Polynomfunktionen: Es seien p und q zwei Polynomfunktionen und $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$. Dann wird durch $r : D \to \mathbb{R}$ mit

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \tag{3.15}$$

eine rationale Funktion definiert.
(2) Wir betrachten die Funktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, und $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Es ist $\mathrm{id}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, so dass die Funktion $\exp \circ \mathrm{id}^2$ wohldefiniert ist. Sie bildet x ab auf e^{x^2}. Umgekehrt ist $\mathrm{id}^2 \circ \exp$ die Funktion, die x abbildet auf $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

3.4 Grenzwerte bei Funktionen

Wir wollen nun den Grenzwertbegriff von Folgen auf Funktionen übertragen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des *Häufungspunkts einer Menge*. Wir wollen ihn über seine für uns relevante Eigenschaft wie folgt definieren:

Definition 3.4 *Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge der reellen Zahlen. Ein Punkt* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *heißt* Häufungspunkt von D*, falls es eine Folge* (x_n) *von Punkten* $x_n \in D \setminus \{a\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *gibt.*

Einem Häufungspunkt a kann man sich also mit einer Folge (x_n) beliebig genau annähern. Dabei kann der Häufungspunkt in der Menge liegen, oder auch an ihrem Rand.

Betrachten wir etwa das Intervall

$$D = \mathbb{R}_+^* =]0, \infty[.$$

Jeder Punkt des Intervalls ist auch ein Häufungspunkt. Aber auch $a = 0$ ist ein Häufungspunkt, da für die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, die vollständig in $D \setminus \{0\} = D$ liegt, gilt $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$. Auch ∞ ist ein Häufungspunkt dieses Intervalls, da für die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gilt $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Lesehilfe

Der Name „Häufungspunkt“ besagt, dass sich um ihn herum beliebig viele Elemente der Menge „anhäufen“. Denn wenn es eine Folge mit Grenzwert a gibt, die in $D \setminus \{a\}$ liegt, so müssen in jeder ε-Umgebung von a fast alle, also unendlich viele Folgenglieder liegen.

► **Zwischenfrage (3)** Warum ist jeder Punkt eines Intervalls auch ein Häufungspunkt dieses Intervalls?

Wir können nun den *Grenzwert einer Funktion* wie folgt definieren:

Definition 3.5 *Es sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *ein Häufungspunkt von* D*. Dann sagen wir, es sei*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge (x_n) *von Punkten* $x_n \in D \setminus \{a\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Dabei kann c *eine reelle Zahl oder auch* $+\infty$ *oder* $-\infty$ *sein.*

Der Grenzwert für Funktionen wird also zurückgeführt auf den Grenzwert der Folgen $(f(x_n))$. Entscheidend für die Existenz des Funktionengrenzwerts ist, dass sich für *jede beliebige* Folge (x_n) mit $x_n \neq a$ und $x_n \to a$ *derselbe* Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ ergibt. Diesen gemeinsamen Wert nennt man dann den *Grenzwert der Funktion* f *für* $x \to a$. Das Verhalten der Funktion f an der Stelle a selbst spielt dabei keine Rolle (siehe Abb. 3.3).

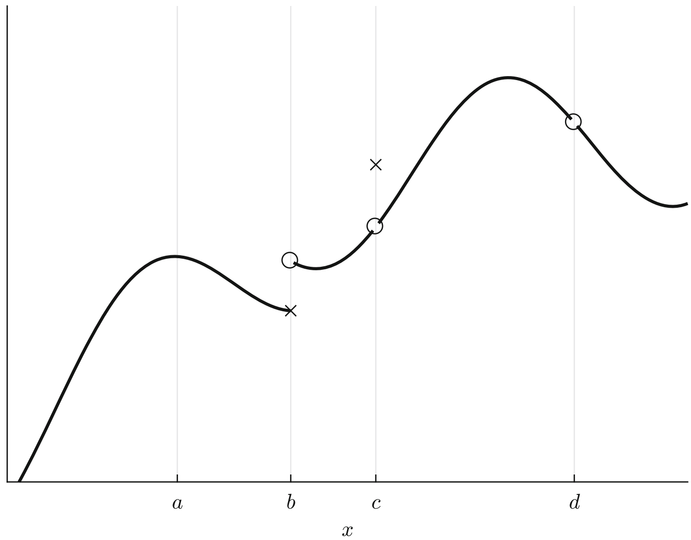

Abb. 3.3 Eine Funktion f besitzt an einer vorgegebenen Stelle a einen Grenzwert, wenn dieser eindeutig bestimmt ist, wenn also für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to a$ die Folgen $(f(x_n))$ denselben Grenzwert besitzen. Dies ist nicht der Fall, wenn der Graph einen Sprung aufweist (b), da sich rechts- und linksseitiger Grenzwert dann unterscheiden. Ein eindeutiger Grenzwert liegt aber vor, wenn der Graph nur eine isolierte Lücke aufweist, egal ob mit anderem Funktionswert (c) oder ohne Funktionswert (d)

Wir werden sehen, dass das Ermitteln von Funktionengrenzwerten insbesondere an den Rändern des Definitionsbereichs, z. B. bei Unendlich, von praktischer Bedeutung ist.

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war, warum jeder Punkt eines Intervalls auch Häufungspunkt ist.
Zunächst könnte man intuitiv (und auch richtig) antworten, dass sich offenbar für einen Punkt a im Intervall, auch wenn er am Rand liegt, in jeder Umgebung unendlich viele Punkte des Intervalls „anhäufen". Und es lässt sich auch leicht eine Folge konstruieren: Je nach Lage des Punkts nimmt man $(a + 1/n)$ oder $(a - 1/n)$, wobei man für n ggf. einen ausreichend großen Startwert wählt, so dass die Folge vollständig im Intervall liegt. Natürlich kann man auch so etwas wie $(a + 1/n^2)$ oder $(a - 1/n^2)$ oder $(a - (-1)^n/n^2)$ wählen.

3.4.1 Rechts- und linksseitiger Grenzwert

Es ist manchmal nützlich, bei einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ den *rechts-* oder *linksseitigen* Grenzwert zu betrachten, also den Grenzwert, bei dem man sich einem Häufungspunkt a von D von rechts, also von größeren x-Werten her nähert, bzw. von links, also von kleineren x-Werten her. Man schreibt dann $x \searrow a$, „x von oben gegen a“, bzw. $x \nearrow a$, „x von unten gegen a“.[4] Genauer:

Definition 3.6 *Es sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Der Punkt* a *sei Häufungspunkt der Menge* $D^* := \{x \in D | x > a\}$, *und für jede Folge* (x_n) *mit* $x_n \in D^*$ *und* $x_n \to a$ *gelte* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. *Dann sagt man, es gelte* $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$.
Analog definiert man $\lim_{x \nearrow a} f(x)$.

Wenn bei einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für einen Häufungspunkt a von D rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, so ist $\lim_{x\to a} f(x) = c$ gleichbedeutend mit $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = c$.

Beispiele
(1) Die so genannte *Heaviside-Funktion*[5] $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$H(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Der rechtsseitige Grenzwert dieser Funktion an der Stelle 0 ist $\lim_{x \searrow 0} H(x) = 1$, der linksseitige hingegen $\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0$. Ohne Einschränkung auf rechts- oder linksseitig besitzt die Funktion daher keinen Grenzwert bei 0, da sich nicht für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to 0$ derselbe Wert ergibt.
(2) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^n$, mit $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig vorgegeben. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1/x^n = 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} 1/x^n = +\infty, \tag{3.18}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} 1/x^n = \begin{cases} -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ +\infty & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \tag{3.19}$$

(3) Bei durch rationale Operationen zusammengesetzten Funktionen kann der Grenzwert aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte, siehe Abschn. 2.1.3, auf die einzelnen „Teilgrenzwerte“ heruntergebrochen und oftmals auf diese Weise ermittelt werden. So ist etwa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{7x^3 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(3 - 2/x + 5/x^3)}{x^3(7 + 1/x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \overset{\to 0}{2/x} + \overset{\to 0}{5/x^3}}{7 + \underset{}{\overset{\to 0}{1/x^2}}} = \frac{3}{7}. \tag{3.20}$$

[4] Für $x \searrow a$ gibt es auch die Schreibweise $x \to a+$, und $x \to a-$ für $x \nearrow a$.
[5] Benannt nach dem britischen Mathematiker und Physiker Oliver Heaviside, 1850–1925.

Mit dem hier angewendeten „Trick“, Nenner und Zähler durch die höchste auftretende Potenz in x zu teilen, lassen sich sämtliche Grenzwerte gegen Unendlich von gebrochen rationalen Funktionen leicht ermitteln.

3.4.2 Beispiel: Exponentialfunktion

Die Expontialfunktion exp ist aufgrund ihrer Definition als unendliche Reihe sicherlich eine nicht auf den ersten Blick zu durchschauende Funktion. Als Beispiel für einen Funktionengrenzwert wollen wir nun $\lim_{x\to 0} \exp(x)$ ermitteln. Ergibt sich tatsächlich für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to 0$ derselbe Grenzwert?

Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir zunächst eine *Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion*:

Satz 3.6 (Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion) *Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

mit

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Der Fehler, den man macht, wenn die Exponentialreihe nach $n + 1$ Gliedern abgebrochen wird, ist also im angegebenen x-Bereich kleiner als das Zweifache des nächstfolgenden Glieds.

Beweis Der Fehler $R_{n+1}(x)$ entspricht den fehlenden Reihengliedern von $n + 1$ bis ∞. Er lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{|x|^{n+3}}{(n+3)!} + \dots \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \dots\right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht der Form einer geometrischen Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots = 1/(1-z)$ für $|z| < 1$. Für $z = 1/2$ besitzt sie den Wert 2, so dass für $z = \frac{|x|}{n+2} \leq \frac{1}{2}$, also für $|x| \leq 1 + \frac{n}{2}$, die Klammer kleiner als 2 bleibt. •

Lesehilfe zum Beweis
Es ist offenbar $R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, und das heißt zunächst $|R_{n+1}(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}|$. In der Summe können sich Reihenglieder ggf. aufgrund unterschiedlicher Vorzeichen noch gegenseitig teilweise kompensieren, so dass sie sicher $\leq$ der Reihe ist, in der alle Glieder positiv sind. Daher das erste $\leq$ in (3.21). Bei dem zweiten $\leq$ werden die Nenner der Summanden durch kleinere Nenner ersetzt, was die einzelnen Brüche vergrößert, und die geometrische Reihe ergibt.

Sehen wir uns nun die Exponentialfunktion bei 0 an: Zunächst liefert die Restgliedabschätzung für $n = 0$

$$\exp(x) = 1 + R_1(x) \quad \text{mit } |R_1(x)| \leq 2|x| \text{ für } |x| \leq 1,$$

das heißt

$$|\exp(x) - 1| \leq 2|x| \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Es sei nun (x_n) eine beliebige Nullfolge. Dann ist $|x_n| < 1$ für fast alle n, und für diese gilt also

$$|\exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n|.$$

Wegen $|x_n| \to 0$ folgt daraus $\lim_{n\to\infty} |\exp(x_n) - 1| = 0$, und daher $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$. Da dies für alle Nullfolgen (x_n) gleichermaßen richtig ist, haben wir also den Funktionengrenzwert $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$. •

3.5 Stetigkeit

Bei einer „stetigen“ Funktion bewirken kleine Veränderungen des Arguments nur kleine Veränderungen des Funktionswerts; die Funktion kann daher keinen „Sprung“ machen. Die *Stetigkeit* ist zunächst eine lokale Eigenschaft und wie folgt definiert:

Definition 3.7 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heißt* stetig im Punkt a*, falls gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Die Funktion f heißt stetig in D*, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.*

Stetigkeit bedeutet also, dass der *Grenzwert einer Funktion gleich dem Funktionswert* ist. Dies schließt natürlich ein, dass der Grenzwert existieren muss. Und es heißt auch, dass die *Funktion mit der Limesbildung vertauscht werden darf*:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a). \tag{3.22}$$

Äquivalent zur obigen Definition lässt sich die Stetigkeit auch mit dem so genannten *ε-δ-Kriterium* charakterisieren:

Satz 3.7 (ε-δ-Kriterium der Stetigkeit) *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass gilt*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \ \forall x \in D \ \textit{mit} \ |x - a| < \delta.$$

Beweis „$\Rightarrow$" Die Funktion f sei stetig in a, d. h., für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Nehmen wir an, das ε-δ-Kriterium sei nicht erfüllt. Das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass kein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - a| < \delta$. Für jedes beliebige $\delta > 0$ muss also mindestens ein $x \in D$ existieren mit $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Betrachten wir nun speziell $\delta = \delta_n := 1/n$ für natürliche Zahlen $n \geq 1$: Zu jedem n muss es dann ein $x_n \in D$ geben mit $|x_n - a| < 1/n$, aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Das aber heißt nichts anderes als $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, und daraus folgt nach Voraussetzung der Stetigkeit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Dies aber steht im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ für alle $n \geq 1$.

„$\Leftarrow$" Das ε-δ-Kriterium sei erfüllt. Wir müssen zeigen, dass dann für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Es sei also ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und es liege ein $\delta > 0$ gemäß ε-δ-Kriterium vor. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$. Nach dem ε-δ-Kriterium ist daher $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$; das aber heißt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. •

Lesehilfe zum Beweis
Bei Satz 3.7 handelt es sich um eine Äquivalenzaussage:

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow \varepsilon\text{-}\delta\text{-Kriterium erfüllt.}$$

Eine solche Aussage $A \Leftrightarrow B$ lässt sich zeigen, indem beide darin enthaltenen Implikationen bewiesen werden, also $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Genau das passiert oben: „$\Rightarrow$" setzt Stetigkeit voraus und schließt daraus auf das ε-δ-Kriterium, und bei „$\Leftarrow$" umgekehrt.

In „$\Rightarrow$" wird ein Widerspruchsbeweis durchgeführt, siehe ggf. noch einmal die Lesehilfe zum Beweis in Abschn. 1.1.2. Außerdem wurde in beiden Beweisteilen die Grenzwertbedingung aus Definition 2.1 verwendet.

Die Funktion f ist also genau dann stetig in a, wenn gilt: Der Funktionswert $f(x)$ weicht beliebig wenig von $f(a)$ ab, wenn x nur hinreichend nahe bei a liegt.

Als ein anschauliches und für die meisten praktischen Fälle ausreichendes Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion können wir festhalten:

Alle „normalen" Funktionen auf einem Intervall, deren Funktionsgraphen sich ohne den Stift abzusetzen zeichnen lassen, deren Graphen also keine Sprünge aufweisen, sind stetig.

Lesehilfe
Die Kurzformel „Stetigkeit = keine Sprünge im Graphen" ist einfach und nützlich. Ein wenig aufpassen müssen wir jedoch auch hier: Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$. Sie ist bei 0 nicht definiert, und ihr Graph besteht bekanntlich aus zwei Hyperbelzweigen. Sie ist stetig auf ihrem Definitionsbereich, d. h. in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^*$. Trotzdem muss man den Stift absetzen, um den Graphen zu zeichnen. Daher enthält die obige Aussage den Zusatz „auf einem Intervall". Und $\mathbb{R}^*$ ist eben kein Intervall, sondern aus zwei Intervallen zusammengesetzt, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

3.5.1 Beispiel: Stetigkeit der Exponentialfunktion

Betrachten wir die Exponentialfunktion. Ihren Graphen haben wir schon gesehen, siehe Abb. 3.2, und „wissen" daher, dass sie in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Um dies tatsächlich zu beweisen, müssen wir zeigen, dass gilt $\lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$:

Es sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$, und damit wegen $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$, siehe Abschn. 3.4.2, auch

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1.$$

Mit der Funktionalgleichung für exp ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \exp(a + x_n - a) = \lim_{n\to\infty} [\exp(a) \exp(x_n - a)] \\ &= \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(a).\end{aligned}$$ •

3.5.2 Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

Die Eigenschaft der Stetigkeit überträgt sich von „Grundfunktionen" auf aus diesen zusammengesetzte Funktionen:

Satz 3.8 *Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind, und $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Ferner sei $h : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subseteq E$, die in $b := f(a)$ stetig sei. Dann gilt:*

(1) *Die Funktionen*

$$f+g : D \to \mathbb{R}, \quad cf : D \to \mathbb{R}, \quad fg : D \to \mathbb{R}$$

sind stetig in a. *Ist* $g(a) \neq 0$, *so ist auch die Funktion*

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R} \quad \textit{mit } D' := \{x \in D | g(x) \neq 0\}$$

stetig in a.

(2) *Die Funktion* $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ *ist stetig in* a.

Beweis

(1) Der Beweis von (1) ergibt sich aus den entsprechenden Rechenregeln für Zahlenfolgen.

(2) Es sei (x_n) ein Folge in D mit $x_n \to a$. Da f in a stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, also $b_n := f(x_n) \to b$. Aus der Stetigkeit von h in b folgt $\lim_{n\to\infty} h(b_n) = h(b)$. Dies ergibt

$$\lim_{n\to\infty} (h \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} h(b_n) = h(b) = h(f(a)). \qquad \bullet$$

Beispiele

(1) Die konstanten Funktionen und die identische Funktion id sind stetig. Daraus folgt mit Satz 3.8, dass auch sämtliche rationalen Funktionen, siehe (3.15), in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

(2) Die Betragsfunktion $\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{abs}(x) = |x|$, ist stetig. Für Stellen $a \neq 0$ kann abs auf id bzw. $-$id zurückgeführt werden. Betrachten wir nun $a = 0$: Es sei (x_n) eine Nullfolge. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = |0|,$$

also ist abs auch bei 0 stetig.

(3) Mit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $|f| : D \to \mathbb{R}$ stetig, denn es ist $|f| = \text{abs} \circ f$.

(4) Die Funktionen exp und id^2 sind stetig. Somit sind auch die Verkettungen $f := \exp \circ \text{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g := \text{id}^2 \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei gilt

$$f(x) = \exp(x^2) = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad g(x) = (\exp(x))^2 = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}.$$

(5) Die Dirichlet-Funktion, siehe (3.7), ist in keinem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig. Und die Heaviside-Funktion, (3.16), ist bei 0 nicht stetig.

Lesehilfe

Die Stetigkeit ist keine exotische Eigenschaft für Funktionen. Man muss sich schon Mühe gehen, Beispiele für nicht stetige Funktionen zu finden.

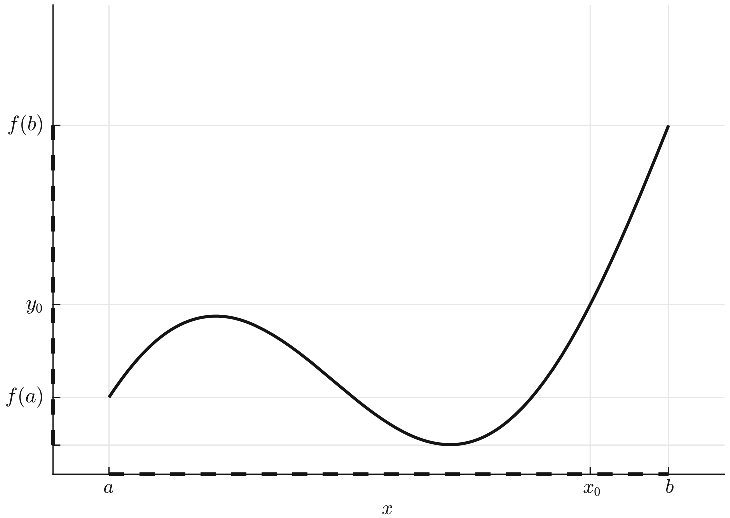

Abb. 3.4 Wir betrachten den Graphen einer auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetigen Funktion f. An den Randpunkten nimmt f die Funktionswerte $f(a)$ bzw. $f(b)$ an. Jeder Wert y_0, der zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, kommt dann als Funktionswert von f in diesem Intervall vor, d. h., es gibt mindestens eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = y_0$. Das Bild des gesamten Intervalls, also die Menge $f(I)$, ist wieder ein Intervall. Man macht sich leicht klar, dass diese Eigenschaften nicht mehr erfüllt sein müssen, wenn die Funktion nicht stetig ist, der Graph also Sprünge aufweisen kann

3.5.3 Zwischenwertsatz

Wir haben bereits festgehalten, dass der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall „ohne den Stift abzusetzen" gezeichnet werden kann, also aus einer durchgehenden Kurve besteht. Es ist daher anschaulich klar, dass gilt (siehe Abb. 3.4):

Satz 3.9 (Zwischenwertsatz) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und y_0 sei eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

Beweis Der formale Beweis erfordert etwas höheren Aufwand, und wir belassen es bei dem obigen anschaulichen Argument. ○

Diese Aussage bezeichnet man als den *Zwischenwertsatz*, da sie besagt, dass jeder Wert zwischen den Endwerten angenommen wird. Natürlich kann es dabei auch mehrere Stellen x_{0i} geben, an denen der Funktionswert y_0 angenommen wird.

► **Zwischenfrage (4)** Gilt die Aussage des Zwischenwertsatzes auch für Funktionen, die nur in einzelnen Punkten nicht stetig sind?

Aus dem Zwischenwertsatz folgt beispielsweise, dass eine stetige Funktion, die an einer Stelle negativ ist und an einer anderen positiv, zwischen diesen beiden Stellen eine Nullstelle besitzen muss.

Des Weiteren bilden stetige Funktionen Intervalle stets wieder auf Intervalle ab (siehe Abb. 3.4):

Satz 3.10 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis Wir verzichten auch hier auf den formalen Beweis. Die Aussage ist erneut zumindest anschaulich klar, wenn man sich die Stetigkeit des Funktionsgraphen vor Augen hält. ∘

Lesehilfe
Wenn I ein Intervall ist, handelt es sich um ein „zusammenhängendes Stück" auf der x-Achse. Und der Satz besagt, dass dieses durch eine stetige Funktion auf ein zusammenhängendes Stück auf der y-Achse abgebildet wird. Dass das so sein muss, ist klar, wenn der Graph durchgehend gezeichnet werden muss.

Übrigens ist natürlich auch $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ ein Intervall.

Schließlich halten wir fest:

Satz 3.11 *Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.*

Beweis Erneut ohne formalen Beweis, aber anschaulich nachvollziehbar. ∘

Zu beachten ist, dass diese Aussage *nur bei abgeschlossenen Intervallen* gilt. Betrachten wir etwa die Funktion $\mathrm{id} : [0, 1[\to \mathbb{R}$ auf einem halboffenen Intervall. Die Funktion ist stetig, nimmt aber ihr Maximum nicht an: Das Supremum der Funktionswerte ist 1, die Funktion nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, die 1 selbst jedoch nicht, so dass die Funktionswerte kein Maximum besitzen.

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Die Frage war, ob der Zwischenwertsatz gültig bleibt für Funktionen, die nur in einzelnen Punkten nicht stetig sind.
Tatsächlich gilt der Zwischenwertsatz nur, wenn die Funktion in jedem Punkt stetig ist. Betrachten wir z. B. die Heaviside-Funktion H, siehe (3.16), etwa auf dem Intervall $[-2, 3]$. Sie ist nur bei 0 nicht stetig. Es ist $H(-2) = 0$ und $H(3) = 1$. Die Zwischenwerte zwischen 0 und 1 werden jedoch nicht angenommen, weil ihr Graph eben nicht durchgehend ist, sondern eine Lücke aufweist.

Das Wichtigste in Kürze

- Eine **Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Element des Definitionsbereichs $x \in D$ eindeutig einen Funktionswert $f(x)$ zu. Die Menge aller vorkommenden Bilder $f(D)$ heißt die Bildmenge. Mit Hilfe des Graphen kann eine Funktion anschaulich dargestellt werden.
- Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist über die Exponentialreihe definiert. Die Exponentialreihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Die Exponentialfunktion erfüllt die **Funktionalgleichung**.
- Die **Euler-Zahl** e ist definiert als $\mathrm{e} := \exp(1)$. Für die Exponentialfunktion schreibt man auch $\exp(x) =: \mathrm{e}^x$.
- Funktionen lassen sich durch rationale Operationen oder durch Verkettung zu weiteren Funktionen zusammensetzen.
- Der **Grenzwert** einer Funktion f für $x \to a$ wird auf den Grenzwert von Folgen $(f(x_n))$ mit $x_n \to a$ zurückgeführt.
- Damit der Grenzwert einer Funktion im Inneren eines Intervalls existiert, müssen **rechts- und linksseitiger Grenzwert** existieren und gleich sein.
- Eine Funktion heißt **stetig** in einem Punkt, falls ihr Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt. Der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall lässt sich „zeichnen ohne abzusetzen".
- Die Stetigkeit überträgt sich auf zusammengesetzte Funktionen.
- Stetige Funktionen erfüllen den **Zwischenwertsatz**.

Und was bedeuten die Formeln?

$$\Gamma_f := \big\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \,\big|\, y = f(x)\big\}, \quad f(T) := \{y = f(x) \,|\, x \in T\},$$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \exp(0) = 1, \quad \mathrm{e} := \exp(1), \quad \mathrm{e}^x := \exp(x),$$

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (f \circ g)(x) := f(g(x)),$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x) \quad \text{mit} \quad |R_{n+1}(x)| \le 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ und } |x| \le 1 + \frac{n}{2},$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = c, \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = c, \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Übungsaufgaben

A3.1 Bestimme die Gleichung der Parabel, die bei a und b, $a \neq b$, die x-Achse schneidet und den maximalen Wert $c > 0$ besitzt. Ist sie nach oben oder unten geöffnet?

A3.2 Gib jeweils den maximal möglichen Definitionsbereich der reellen Funktionen mit den folgenden Funktionsvorschriften an:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = \sqrt{2x}, \qquad f_3(x) = \sqrt{2x^2+1},$$
$$f_4(x) = \frac{1}{2x^2-1}, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f_6(x) = \frac{x-\pi}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$f_7(x) = \frac{3x^2+6x-1}{3x^3-18x^2+33x-18}, \qquad f_8(x) = \exp(-2x).$$

A3.3 Besitzen quadratische Funktionen immer Nullstellen? Wie sieht es mit einem Polynom dritten Grads aus? Und allgemein für den Grad n?

A3.4 Vorsicht, für diese Aufgabe muss etwas gerechnet werden: Die Funktion f mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{2x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 44x + 48}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

besitzt eine Nullstelle bei $x = 4$. Bestimme sämtliche anderen Nullstellen, die Polstellen und die Asymptoten ihres Graphen.

A3.5 Gib – wenn möglich – den Wert der folgenden Grenzwerte an:

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$
$$(4)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2} \qquad (5)\ \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100} \qquad (6)\ \lim_{x\to 0} \frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100}$$
$$(7)\ \lim_{x\to\infty} \exp(-x) \qquad (8)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^6+x^4+2x^2+1}{\frac{7}{6}x^6+7x^5} \qquad (9)\ \lim_{r_1\to\infty} \left((n-1)\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right).$$

A3.6 Wird der Zwischenwertsatz so richtig wiedergegeben?

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion auf dem Intervall* $[a,b]$, *und* y_0 *sei eine Zahl zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$. *Dann gibt es genau ein* $x_0 \in [a,b]$ *mit* $f(x_0) = y_0$.

4 Umkehrfunktionen

Bei vielen wichtigen Funktionen handelt es sich um Umkehrfunktionen bekannter Funktionen. So ist das Wurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens, und der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Der Logarithmus ist neben seinen praktischen Anwendungen auch deshalb von besonderem Interesse, weil wir ihn benötigen, um die Exponentialfunktion zu einer beliebigen Basis zu definieren.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Unter bestimmten Bedingungen kann man eine Funktion „umkehren", und damit aus dem Funktionswert das Argument bestimmen. Wir müssen genau wissen, was dafür notwendig ist.
- Wir lernen den Begriff der strengen Monotonie von Funktionen kennen.
- Jeder kennt die Wurzel einer Zahl. Wir wollen uns hier genau ansehen, was Wurzelfunktionen sind.
- Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Daraus ergeben sich seine teilweise überraschenden Eigenschaften. Dabei lernen wir wieder eine Funktionalgleichung kennen. Und wir werden sehen, was logarithmische Skalen sind.
- Die allgemeine Exponentialfunktion hat eine andere Basis als e. Wir lernen, warum dafür der Logarithmus notwendig ist.
- Schließlich werden wir sehen, inwiefern die Exponentialfunktion „stark" ist und der Logarithmus „schwach".

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_4

4.1 Definition der Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ordnet jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in f(D) =: D'$ zu, d. h., für jedes $x \in D$ gibt es ein $y \in D'$ mit

$$x \overset{f}{\longmapsto} y. \tag{4.1}$$

Erfolgt diese Zuordnung *eineindeutig*, taucht also jedes $y \in D'$ nur genau einmal als Bild eines $x \in D$ auf, so nennt man die Funktion

$$f : D \to D'$$

bijektiv. Bei einer bijektiven Funktion gibt es also *zu jedem Element der Bildmenge genau ein Urbild*.

Lesehilfe
Das eigenartige Wort „eineindeutig" ist nichts anderes als ein deutsches Wort für „bijektiv". Eine Funktion ordnet ja grundsätzlich einem x-Wert genau einen y-Wert zu – sie ist also eindeutig. Wenn nun jeder y-Wert nur genau einmal vorkommt, und man daher aus ihm auf den x-Wert rückschließen kann, die Funktion also auch in dieser Richtung eindeutig ist, nennt man sie eineindeutig.

Eine Zuordnung (4.1), die mit einer bijektiven Funktion f verbunden ist, lässt sich umkehren:

$$y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x. \tag{4.2}$$

Auf diese Weise erhält man die *Umkehrfunktion zu* f, für die man normalerweise die Schreibweise f^{-1} verwendet:

$$f^{-1} : D' \to D, \quad y \mapsto x = f^{-1}(y). \tag{4.3}$$

Es ist also

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}, \quad \text{also } f^{-1}(f(x)) = x. \tag{4.4}$$

Lesehilfe
Die Schreibweise f^{-1} darfst du hier keinesfalls mit dem Kehrwert der Funktion, d. h. der Funktion $1/f$ verwechseln.

Und die gefährlich aussehende Gleichung $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ besagt nur, dass mit Hin- und Zurücklaufen nichts passiert: Mit f läuft man von x nach y und mit f^{-1} wieder zurück.

Natürlich sind nicht alle Funktionen bijektiv, so dass durchaus *nicht* für jede Funktion eine Umkehrfunktion angegeben werden kann. Wir werden im Folgenden die strenge Monotonie als ein einfaches Kriterium verwenden, das die Umkehrbarkeit einer Funktion oder eines Teilbereichs der Funktion sicherstellt.

4.1.1 Monotonie

Den Begriff einer monotonen Folge haben wir im Zusammenhang mit Satz 2.2 bereits kennengelernt. Wir benötigen die Monotonie jetzt für Funktionen:

Definition 4.1 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt*

$$\begin{aligned} &\text{monoton steigend,} && \textit{falls } \forall x_1, x_2 \in D \textit{ mit } x_1 < x_2 \textit{ gilt} && f(x_1) \leq f(x_2);\\ &\text{streng monoton steigend,} && \textit{falls } \forall x_1, x_2 \in D \textit{ mit } x_1 < x_2 \textit{ gilt} && f(x_1) < f(x_2);\\ &\text{monoton fallend,} && \textit{falls } \forall x_1, x_2 \in D \textit{ mit } x_1 < x_2 \textit{ gilt} && f(x_1) \geq f(x_2);\\ &\text{streng monoton fallend,} && \textit{falls } \forall x_1, x_2 \in D \textit{ mit } x_1 < x_2 \textit{ gilt} && f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Die Funktionswerte einer streng monoton steigenden Funktion steigen also mit größer werdenden x-Werten stets an; bei einer „nur“ monoton steigenden Funktion können sie auch auf einem konstanten Wert verharren (und analog natürlich bei (streng) monoton fallenden Funktionen).

Beispiele
(1) Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist streng monoton steigend. Die Funktion $-\mathrm{id}$ ist streng monoton fallend.
(2) Konstante Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, sind sowohl monoton steigend als auch monoton fallend, aber sie sind nicht streng monoton.
(3) Die Quadratfunktion $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist nicht monoton. Die auf $\mathbb{R}_+$ eingeschränkte Funktion $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}_+}$ ist allerdings streng monoton steigend (siehe Abb. 4.1), denn wenn eine Zahl größer wird, wird auch ihr Quadrat größer.

Allgemeiner gilt: Alle Funktionen $\mathrm{id}^n|_{\mathbb{R}_+}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ sind streng monoton steigend.

> **Lesehilfe**
> Man nennt $f|_{D^*}$ die Einschränkung der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf die Menge $D^* \subset D$. Es handelt sich also einfach um die Funktion $f : D^* \to \mathbb{R}$.

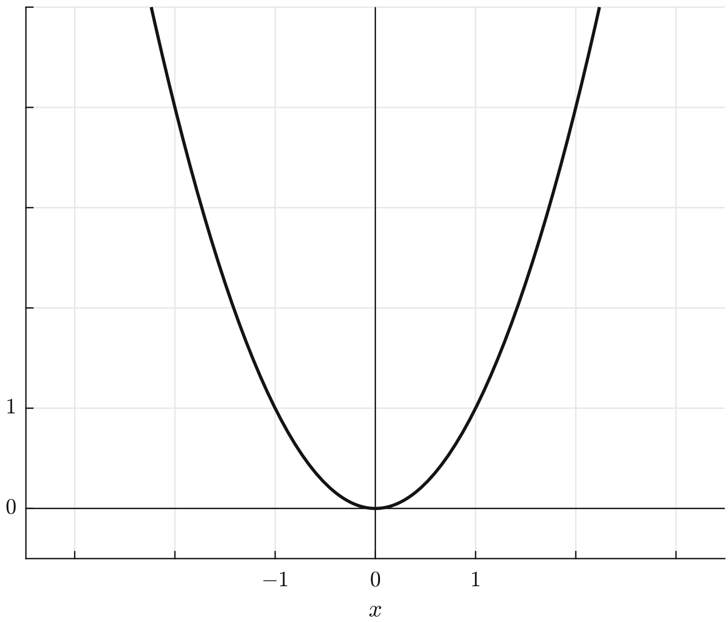

Abb. 4.1 Der Graph der Quadratfunktion $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, entpricht der so genannten „Normalparabel“. Die Funktion ist nicht monoton. Schränkt man sie jedoch ein auf den Bereich nicht-negativer x-Werte, betrachtet also nur den Zweig in der nicht-negativen Halbebene, so ergibt sich eine streng monoton steigende Funktion. Umgekehrt handelt es sich bei der Einschränkung auf die nicht-positive Halbebene um eine streng monoton fallende Funktion

4.1.2 Umkehrfunktion und Graph

Wir können nun unsere zentrale Aussage zu Umkehrfunktionen treffen:

Satz 4.1 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton steigende (oder fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall I bijektiv auf das Intervall $I' := f(I)$ ab, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : I' \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig und streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Beweis Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f(I)$ wieder ein Intervall ist, siehe Satz 3.10. Aus der strengen Monotonie folgt die Bijektivität von f und auch die strenge Monotonie von f^{-1}, wie man sich anschaulich anhand des Graphen klarmachen kann. Die Stetigkeit von f^{-1} lässt sich formal aus dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit gewinnen; auch sie ist anschaulich klar, so dass wir auf den formalen Beweis verzichten wollen. ○

Lesehilfe
Die strenge Monotonie ist also hier die Eigenschaft, die sicherstellt, dass die Funktionen bijektiv sind und somit umgekehrt werden können.

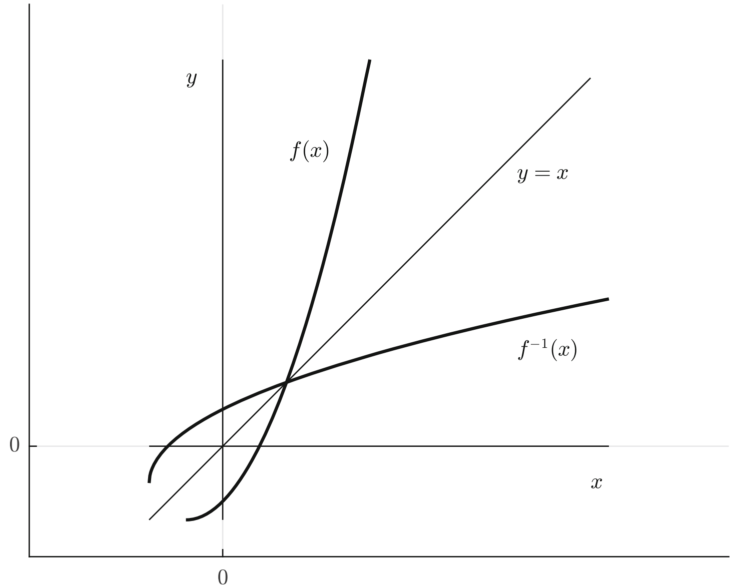

Abb. 4.2 Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $y = x$. Beim Übergang von f zu f^{-1} tauschen x und y ihre Rollen

Der *Graph der Umkehrfunktion* f^{-1} ergibt sich aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $y = x$, siehe Abb. 4.2. Dies ist einsichtig, wenn man sich noch einmal klarmacht, dass mit der Umkehrfunktion die Zuordnung $x \mapsto y$ umgekehrt wird zu $y \mapsto x$, dass also x und y ihre Rolle tauschen. Genau das aber passiert bei der Spiegelung des Graphen an der Geraden $y = x$.

► **Zwischenfrage (1)** Folgt auch aus der normalen Monotonie einer Funktion bereits, dass sie bijektiv ist?

4.2 Wurzelfunktionen

Bei den Wurzelfunktionen handelt es sich um die Umkehrung der Potenzfunktionen id^n:

Definition 4.2 *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist die Funktion $\mathrm{id}^n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, stetig und streng monoton steigend, und sie bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die Umkehrfunktion*

$$\mathrm{sqrt}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

ist somit stetig und streng monoton steigend und wird als n-te Wurzel *bezeichnet.*

Lesehilfe
Kurz zu den Schreibweisen: Die Funktion $\mathrm{id}^n|_{\mathbb{R}_+}$ ist bijektiv. Schreibt man sie als $\mathrm{id}^n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, so ist zu beachten, dass hinter dem Pfeil zunächst einmal nur die Wertemenge steht, was etwas anderes ist als die Bildmenge $\mathrm{id}^n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, also die Menge aller tatsächlich vorkommenden y-Werte.
Und: Die Funktionsbezeichnung sqrt leitet sich vom Englischen „square root“ ab. Sie ist allgemein üblich, auch wenn man zugeben muss, dass es sich für $n > 2$ gar nicht um eine „Quadratwurzel“ handelt.

Unsere Definition für die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ beschränkt sich auf nichtnegative Argumente und kann so für alle n gleich formuliert werden.

Für *ungerade* n ist diese Einschränkung nicht nötig: Dann ist die Funktion $x \mapsto x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und bijektiv, und die n-te Wurzel kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden.

Lesehilfe
Die dritte Wurzel kann man auch aus negativen Zahlen ziehen, z. B. ist $\sqrt[3]{-27} = -3$, gleichbedeutend mit $(-3)^3 = -27$. Und das geht bei ungeradzahligen Wurzeln immer, etwa auch: $\sqrt[11]{-2\,048} = -2$.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, ob die normale Monotonie einer Funktion bereits ihre Bijektivität sicherstellt.
Nein, die normale Monotonie reicht nicht aus. Die Nullfunktion etwa ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ die 0 zu und sie ist monoton steigend (und gleichzeitig auch monoton fallend). Aber sie ist mitnichten bijektiv, denn aus dem Funktionswert 0 lässt sich offenbar nicht auf einen eindeutigen x-Wert rückschließen.

Beispiele
(1) Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton steigend. Ihre Umkehrfunktion ist die *Quadratwurzel* $x \mapsto \sqrt[2]{x} =: \sqrt{x}$, siehe Abb. 4.3.
(2) Die dritte Wurzel $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $x \mapsto x^3$, die auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigt. Beide Funktionen bilden $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab, siehe Abb. 4.4.
(3) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = y = \sqrt[3]{2x^2 - 8x}. \tag{4.5}$$

Wir wollen eine Umkehrfunktion angeben. Dazu ist zunächst festzustellen, dass die Funktion f nicht global umkehrbar ist, da sie nicht streng monoton und nicht bijektiv ist. Zur Angabe einer Umkehrfunktion müssen wir sie also auf einen geeigneten Bereich einschränken.

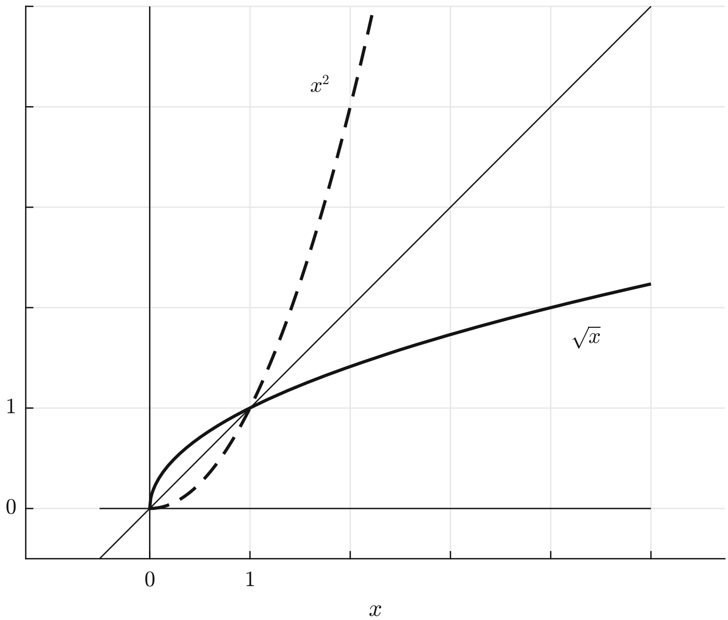

Abb. 4.3 Die Quadratfunktion $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist global nicht streng monoton. Ihr nichtnegativer Zweig, d. h. die eingeschränkte Funktion $\mathrm{id}^2|\mathbb{R}_+$ ist allerdings streng monoton steigend und bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Ihre Umkehrfunktion ist die Quadratwurzel $\mathrm{sqrt} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Auch sie ist bijektiv und streng monoton steigend

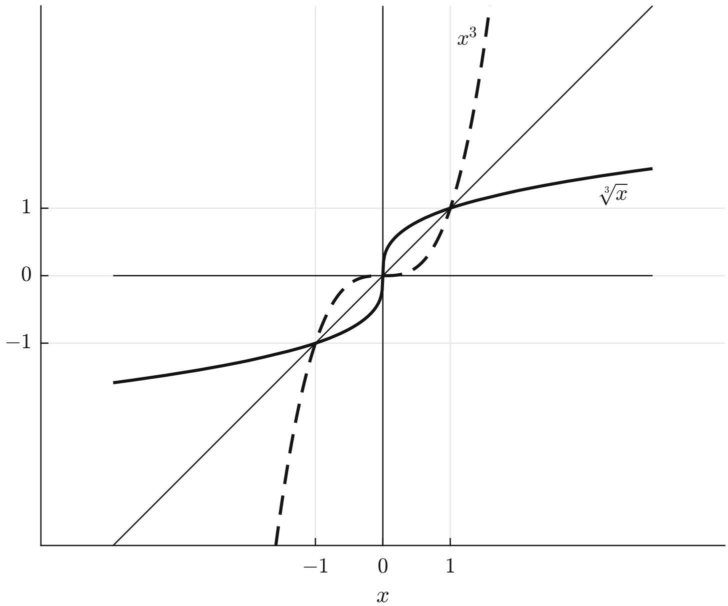

Abb. 4.4 Die Funktion $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist streng monoton steigend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Ihre Umkehrfunktion ist die dritte Wurzel $\mathrm{sqrt}_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, ebenfalls eine bijektive und streng monoton steigende Funktion

Der Radikant hat die Form

$$2x^2 - 8x = 2(x^2 - 4x) = 2\left((x-2)^2 - 4\right) = 2(x-2)^2 - 8.$$

Er steigt daher für $x \geq 2$ streng monoton an, und dies gilt dann auch für die Funktion f, da sqrt_3 streng monoton steigt. Es ist $f(2) = \sqrt[3]{-8} = -2$, außerdem $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, so dass f das Intervall $[2, \infty[$ bijektiv auf das Intervall $[-2, \infty[$ abbildet. Die eingeschränkte Funktion $f|_{[2,\infty[} =: f_*$ ist daher umkehrbar mit

$$f_*^{-1} : [-2, \infty[\to [2, \infty[.$$

Zur Ermittlung ihrer Funktionsvorschrift halten wir zunächst allgemein fest:

Wird eine umkehrbare Funktion durch die Funktionsvorschrift $y = f(x)$ beschrieben, so ergibt sich die Funktionsvorschrift der Umkehrfunktion f^{-1}, indem man diese Gleichung nach x auflöst:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x \tag{4.6}$$

In unserem Beispiel lösen wir also (4.5) nach x auf:

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{2x^2 - 8x} \Leftrightarrow \quad & y^3 = 2x^2 - 8x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 8x - y^3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x - \frac{y^3}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{y^3}{2}}. \end{aligned}$$

Da der Bildbereich von f_*^{-1} das Intervall $[2, \infty[$ ist und die Quadratwurzel stets nicht-negativ ist, kommt in dieser letzten Gleichung nur das $+$-Zeichen in Frage. Es ist also

$$f_*^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4 + \frac{x^3}{2}}. \tag{4.7}$$

4.3 Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion

4.3.1 Natürlicher Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Zwar „kennen“ wir bereits Graphen der Exponentialfunktion, wollen uns aber noch einmal klarmachen, dass sie tatsächlich umkehrbar ist. Dazu zeigen wir, dass sie streng monoton steigt und $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abbildet:

- Strenge Monotonie: Für $\Delta > 0$ gilt

$$\exp(\Delta) = 1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \ldots > 1.$$

Es sei nun $x_1 < x_2$. Dann ist $\Delta := x_2 - x_1 > 0$, also $\exp(\Delta) > 1$, woraus folgt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \Delta) = \exp(x_1)\exp(\Delta) > \exp(x_1).$$

- Bildbereich $\mathbb{R}_+^*$: Die Exponentialfunktion ist stetig (siehe Abschn. 3.5.1), und es ist $\exp(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (siehe Satz 3.5). Des Weiteren können wir leicht zeigen, dass gilt
$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0,$$
denn für $x > 0$ ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots > 1 + x$, so dass exp für $x \to \infty$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, und umgekehrt konvergiert daher $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ gegen 0. •

Wir können nun formulieren:

Satz 4.2 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *ist bijektiv und streng monoton steigend. Ihre Umkehrfunktion* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton steigend und heißt natürlicher Logarithmus. Sie erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y. \tag{4.8}$$

Beweis Es bleibt die Funktionalgleichung zu zeigen. Für $x, y > 0$ sei $a := \ln x$ und $b := \ln y$; somit gilt $\exp(a) = x$ und $\exp(b) = y$. Nun ist nach der Funktionalgleichung von exp

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b) = xy$$

und damit nach Definition der Umkehrfunktion

$$\ln(xy) = a + b = \ln x + \ln y.$$ •

Lesehilfe zum Beweis
Es wird hier die Eigenschaft von Funktion und Umkehrfunktion verwendet. Der Zusammenhang $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ lautet hier $a = \ln x \Leftrightarrow \exp(a) = x$, und $f(f^{-1}(x)) = x$ wird zu $\ln(\exp(a + b)) = a + b$.

Genauso wie die Funktionalgleichung beweist man die Rechenregel

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \tag{4.9}$$

denn mit den Bezeichnungen von oben folgt aus $\frac{x}{y} = \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ die Gleichung $\ln \frac{x}{y} = a - b$.

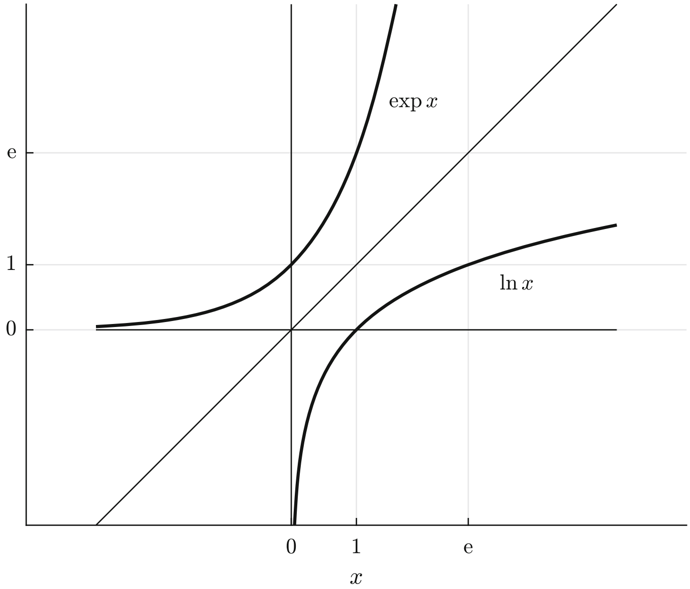

Abb. 4.5 Der Graph des natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ergibt sich aus dem Graphen der Exponentialfunktion durch Spiegelung an der Achse $y = x$. Er schneidet die x-Achse an der Stelle 1, d. h., es ist $\ln 1 = 0$, er läuft für $x \to 0$ gegen $-\infty$ und wächst für $x \to \infty$ unbeschränkt

Der Graph der ln-Funktion ergibt sich in üblicher Weise durch Spiegelung an der Achse $y = x$ aus dem Graphen der Exponentialfunktion, siehe Abb. 4.5. Man sieht insbesondere, dass gilt:

$$\ln 1 = 0, \tag{4.10}$$

$$\ln \mathrm{e} = 1, \tag{4.11}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty, \tag{4.12}$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty. \tag{4.13}$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass Logarithmen grundsätzlich nur für positive Argumente definiert sind.

4.3.2 Beispiel: Zerfallsgesetz und Halbwertszeit

Wie wir bereits gesehen haben, handelt es sich bei $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ um eine fallende Exponentialfunktion, die bei $x = 0$ den Wert 1 besitzt und für wachsende x immer weiter abfällt. Fügt man nun im Argument noch einen Faktor $k > 0$ hinzu, also $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, so fällt die Funktion offenbar für $k < 1$ langsamer und für $k > 1$ schneller ab.

Mit einer solchen Funktion lassen sich Zerfallsprozesse beschreiben, wie zum Beispiel der radioaktive Zerfall: Das *Zerfallsgesetz* lautet

$$N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \tag{4.14}$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne zum Zeitpunkt t angibt und N_0 die Anzahl der Kerne zum (Start-) Zeitpunkt t_0 ist. Die *Zerfallskonstante* λ gibt die Schnelligkeit des Zerfalls an und hängt vom betrachteten Zerfallsprozess ab. Da das Argument einer Exponentialfunktion immer einheitenlos sein muss, besitzt λ die Einheit $1/\text{Zeit}$, also z. B. $1/\text{s}$.

Lesehilfe
Der Ausdruck e^x ist definiert für reelle x. Hat man es im Argument mit Zeiten t zu tun, so ist das eine einheitenbehaftete Größe, z. B. $t = 10\,\text{s}$. Der Ausdruck e^t ist dann gar nicht definiert, ebenso wenig wie $\mathrm{e}^{3\,\text{Birnen}}$ definiert wäre. Soll also die Zeit im Argument einer Exponentialfunktion vorkommen, so muss sie mindestens von einer Konstante begleitet werden, so dass sich die Einheiten aufheben können.

Unter der *Halbwertszeit* $t_{1/2}$ eines radioaktiven Stoffs versteht man die Zeit, in der die Hälfte der Kerne zerfällt. Für sie gilt daher

$$N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0,$$

also unabhängig von N_0

$$\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}. \tag{4.15}$$

Wir lösen diese Gleichung nach $t_{1/2}$ auf, indem wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus ln anwenden. Dies ergibt zunächst

$$-\lambda t_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

und mit (4.9) und $\ln 1 = 0$ schließlich den Zusammenhang

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{4.16}$$

zwischen Halbwertszeit und Zerfallskonstante. Je größer die Zerfallskonstante ist, desto schneller zerfallen die Kerne und desto kleiner ist die Halbwertszeit.

4.3.3 Allgemeine Exponentialfunktion

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus definiert man die *Exponentialfunktion zu einer beliebigen Basis $a > 0$*:

Definition 4.3 *Für eine reelle Zahl $a > 0$ wird die Funktion* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\exp_a(x) := \exp(x \ln a).$$

Lesehilfe
Wir haben es hier natürlich mit nichts anderem als „a^x" zu tun. Aber etwas Geduld; das sehen wir uns jetzt genau an.

Die Funktion $\exp_a$ ist als Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. Sie besitzt dieselben Eigenschaften wie die „normale" Exponentialfunktion exp:

Satz 4.3
(1) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt* $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
(2) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt* $\exp_a(-x) = 1/\exp_a(x)$.
(3) *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt* $\exp_a(k) = a^k$.
(4) *Für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ gilt* $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$.

Beweis
(1) Ergibt sich unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: $\exp_a(x+y) = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a + y \ln b) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
(2) Folgt aus (1) mit $y = -x$: $\exp_a(x-x) = \exp_a(0) = 1 = \exp_a(x)\exp_a(-x)$.
(3) Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n. \tag{4.17}$$

Induktionsanfang $n = 0$: $\exp_a(0) = \exp(0) = 1 = (\exp_a(x))^0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\exp_a((n+1)x) = \exp_a(nx + x) \overset{(1)}{=} \exp_a(nx) \cdot \exp_a(x) \overset{\text{IV}}{=} (\exp_a(x))^n \exp_a(x) = (\exp_a(x))^{n+1}$.
Wegen $\exp_a(1) = \exp(\ln a) = a$ und $\exp_a(-1) = 1/a$ folgt daraus für $x = 1$ bzw. $x = -1$: $\exp_a(n) = a^n$ und $\exp_a(-n) = a^{-n}$. Also ist $\exp_a(k) = a^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
(4) Es ist $a^p \overset{(3)}{=} \exp_a(p) = \exp_a(q \cdot \frac{p}{q}) \overset{(4.17)}{=} (\exp_a(\frac{p}{q}))^q$. Durch Ziehen der q-ten Wurzel ergibt sich daraus die Behauptung. •

▶ **Zwischenfrage (2)** Warum ist $q \geq 2$ in Teil (4) des Satzes 4.3?

Aus Teil (3) von Satz 4.3 motiviert sich die allgemein übliche Bezeichnung

$$a^x := \exp_a(x) = \exp(x \ln a) = \mathrm{e}^{x \ln a}. \tag{4.18}$$

Mit dieser Schreibweise lautet Teil (1) des Satzes

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{4.19}$$

Nach Teil (4) des Satzes, d. h. mit $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, kann das *Rechnen mit Wurzeln auf das Rechnen mit Potenzen zurückgeführt* werden. Insbesondere ist für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}. \tag{4.20}$$

Lesehilfe
Für das Rechnen im Kopf ist die Formel $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ oft nützlich. So ist beispielsweise $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ leicht zu berechnen.

Die Potenzen erfüllen weitere **Rechenregeln**:

Satz 4.4 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\ln(a^x) = x \ln a, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad (1/a)^x = a^{-x}.$$

Beweis Es ist $a^x = \exp(x \ln a)$, also $\ln a^x = x \ln a$. Daraus folgt $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}$. Ferner ist $(ab)^x = \exp(x \ln(ab)) = \exp(x(\ln a + \ln b)) = \exp(x \ln a + x \ln b) = \exp(x \ln a) \exp(x \ln b) = a^x b^x$. Schließlich: $a^{-x} = \exp(-x \ln a) = 1/\exp(x \ln a) = 1/a^x = (1/a)^x$; das letzte Gleichheitszeichen wird wie folgt klar: $(1/a)^x = \exp(x \ln(1/a)) = \exp(x(\ln 1 - \ln a)) = 1/a^x$. •

Lesehilfe
Die zweite, dritte und vierte Regel von Satz 4.4 kennen wir schon, zumindest für ganzzahlige Exponenten, siehe Abschn. 1.2.2.

Als grundlegende Eigenschaften der Exponentialfunktionen halten wir fest:

- *Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ sind nur für positive Zahlen $a > 0$ definiert.* An der Stelle 0 besitzen sie den Funktionswert 1: $a^0 = \exp(0 \cdot \ln a) = \exp(0) = 1$.
- Für $a > 1$ handelt es sich um streng monoton steigende Funktionen. Der Graph von $x \mapsto 2^x$ beispielsweise ähnelt dem der gewöhnlichen Exponentialfunktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$; er verläuft wegen $2 < \mathrm{e}$ insgesamt etwas flacher (siehe Abb. 4.6).
- Für $0 < a < 1$ sind die Exponentialfunktionen streng monoton fallend. Wegen $(1/2)^x = 1/2^x = 2^{-x}$ entspricht beispielsweise der Graph von $x \mapsto (1/2)^x$ dem an der y-Achse gespiegelten Graphen von $x \mapsto 2^x$ (siehe Abb. 4.6).

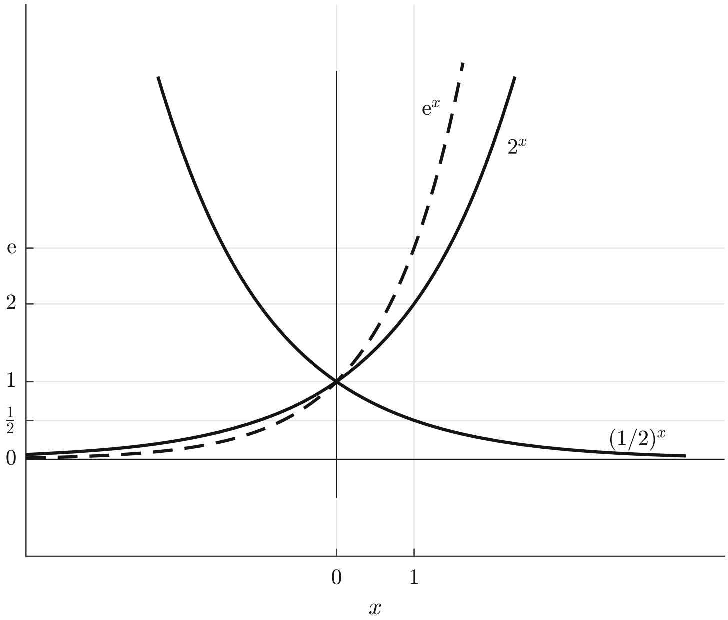

Abb. 4.6 Der Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ ähnelt dem Graphen von $x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$. Wegen $2 < \mathrm{e}$ verläuft er insgesamt etwas flacher. Der Graph von $x \mapsto (1/2)^x = 2^{-x}$ ergibt sich aus dem Graphen von $x \mapsto 2^x$ durch Spiegelung an der y-Achse. Alle Exponentialfunktionen schneiden die y-Achse bei 1

Lesehilfe
Die Ersetzung $x \to -x$ in einer Funktion bewirkt das Vertauschen von „rechts" und „links" auf der x-Achse; ihr Graph wird daher an der y-Achse gespiegelt.

- Für $a = 1$ schließlich ist $a^x = 1^x = \exp(x \ln 1) = \exp(0) = 1$ eine Konstante.

Alternativer Blick auf Potenzen
Wir haben die Potenzen a^x in diesem Kapitel definiert als $a^x := \exp(x \ln a)$, also letztendlich über die Exponentialreihe. Diese Definition wirkt etwas unhandlich. Wir wollen daher noch einmal einen zusammenfassenden Blick auf die Potenzen werfen und überlegen, in welcher Weise es auch anders ginge:

(1) Für $x \in \mathbb{N}$ lassen sich die Potenzen a^x auf natürliche Weise definieren, indem der Faktor a x-mal aufgeschrieben wird (siehe Abschn. 1.2.2). Dies ist ohne Einschränkung für alle $a \in \mathbb{R}$ möglich. Die Erweiterung

auf negative ganzzahlige Exponenten ergibt sich, indem man für $a \neq 0$ setzt $a^{-x} := (1/a)^x$.

(2) Die Erweiterung auf rationale Exponenten $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$, könnte nun erfolgen, indem man analog zu Satz 4.3 (4) *definiert* $a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}$. Diese Definition erlaubt für ungeradzahlige q beliebige Argumente a, für geradzahlige q muss das Argument der Wurzel jedoch nicht-negativ sein, d. h., für geradzahlige p wären zwar negative a erlaubt, für ungeradzahlige p jedoch nicht. Eine auf ganz $\mathbb{Q}$ definierte Funktion $x \mapsto a^x$ ist daher nur für $a > 0$ möglich.

(3) Es bliebe die Frage, was a^x ($a > 0$) für irrationale Exponenten x bedeutet, was also heißt etwa $a^{\sqrt{2}}$? Die Antwort kann lauten, dass man die Funktion $x \mapsto a^x$ von rationalen x auf irrationale x stetig fortsetzt, also für eine irrationale Zahl x setzt $a^x := \lim_{y \to x, y \in \mathbb{Q}} a^y$.

Insgesamt wird man wohl sagen können, dass der Zugang über $a^x := \exp(x \ln a)$, $a > 0$, keine größeren Schwierigkeiten aufweist als der oben skizzierte Weg über elementarere Definitionen.

Hinzu kommt, dass die Exponentialfunktion nicht nur für reelle, sondern auch für komplexe Argumente z von Bedeutung ist, wie wir in Kap. 8 sehen werden. Und auch das funktioniert mit der Exponentialreihe, unverändert über $a^z := \exp(z \ln a)$.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Die Frage war, warum in der Formel $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$ die Zahl $q \geq 2$ sein muss.

Das q im Nenner des Exponenten ergibt die q-te Wurzel. Eine Wurzel ist aber erst ab 2, also ab der zweiten Wurzel definiert.

4.3.4 Allgemeiner Logarithmus

Wie wir gesehen haben, sind die Funktionen $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$, für $a > 1$ streng monoton steigend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend, und sie bilden $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ ab. Analog zum natürlichen Logarithmus können wir daher den allgemeinen Logarithmus wie folgt definieren:

Definition 4.4 *Die Funktion* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, *bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}_+^*$ *ab. Ihre Umkehrfunktion* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *heißt* Logarithmus zur Basis a.

▶ **Zwischenfrage (3)** Warum ist $a = 1$ in Definition 4.4 nicht erlaubt?

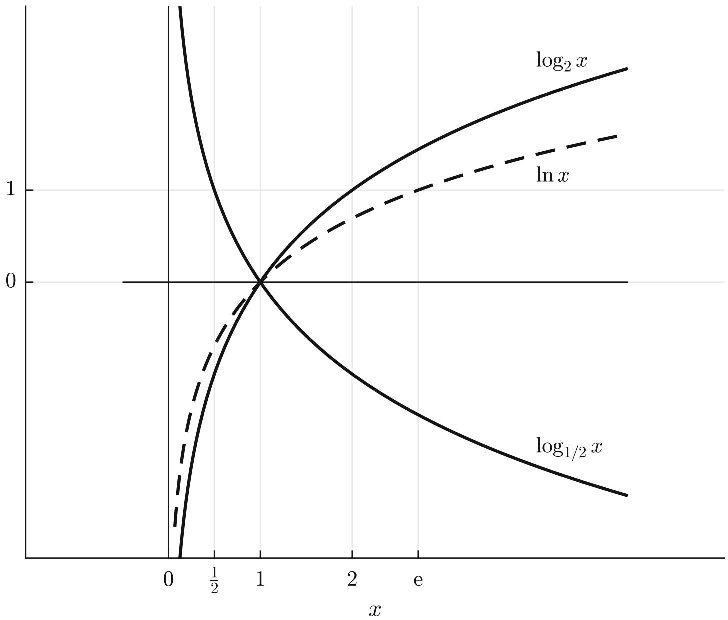

Abb. 4.7 Der Graph des Zweierlogarithmus $\log_2$ ist streng monoton steigend. Er ähnelt dem Graphen des natürlichen Logarithmus $\ln = \log_e$. Bei einer Basis kleiner 1 ist der Logarithmus streng monoton fallend, hier am Beispiel $\log_{1/2}$. Alle Logarithmen schneiden die x-Achse bei 1

Der Logarithmus von x zur Basis a, $\log_a x$, ist also die Zahl, mit der a potenziert werden muss, um x zu erhalten:

$$y := \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x. \tag{4.21}$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen $\exp_a$ (siehe Abb. 4.6) ergibt sich: Die Funktion $\log_a$ ist streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$, siehe Abb. 4.7. Dabei gilt stets

$$\log_a 1 = 0. \tag{4.22}$$

Übrigens entspricht der natürliche Logarithmus dem Logarithmus zur Basis e:

$$\ln = \log_e . \tag{4.23}$$

Die **Rechenregeln** für den natürlichen Logarithmus lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den allgemeinen Logarithmus übertragen; wir fassen sie hier noch einmal zusammen:

Satz 4.5 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $a > 0$, $a \neq 1$, gilt*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{4.24}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \tag{4.25}$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x. \tag{4.26}$$

Darüber hinaus erfüllt der Logarithmus den so genannten Basiswechselsatz *(es sei hier $b > 0$, $b \neq 1$)*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{4.27}$$

Beweis Der Beweis der Formeln (4.24) bis (4.26) erfolgt analog zum natürlichen Logarithmus, siehe Abschn. 4.3.1. Den Basiswechselsatz sieht man wie folgt ein: Es sei $z := \log_a x$, das heißt $a^z = x$. Die Anwendung von $\log_b$ auf diese Gleichung ergibt

$$\log_b(a^z) = \log_b x.$$

Nun ist aber nach (4.26)

$$\log_b(a^z) = z \log_b a, \quad \text{also} \quad z \log_b a = \log_b x. \qquad \bullet$$

Lesehilfe

Vielleicht empfindest du die Rechenregeln für den Logarithmus teilweise als wenig intuitiv. Sie sind tatsächlich ungewöhnlich, insbesondere der Basiswechselsatz ist bemerkenswert. Wie du siehst, ist sein Beweis dennoch erstaunlich einfach; man muss nur das Richtige hinschreiben – was, zugegeben, eben doch gar nicht so leicht ist.

Auf Taschenrechnern finden sich üblicherweise Tasten für den natürlichen Logarithmus, normalerweise als „ln", und für den Zehnerlogarithmus, $\log_{10}$, oftmals abgekürzt mit „log" oder „lg". Ein beliebiger Logarithmus kann dann auch ohne Vorliegen einer entsprechenden Taste mit Hilfe von (4.27) berechnet werden. Zum Beispiel

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \overset{\text{oder}}{=} \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3} \approx 1{,}7712.$$

Besonders einfache Logarithmen lassen sich natürlich auch ohne Hilfsmittel angeben. So ist

$$\log_{10} 1\,000 = 3, \quad \log_2 16 = 4, \quad \log_3 27 = 3, \quad \log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \text{usw.}$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Die Frage war, warum es keinen Logarithmus zur Basis 1 gibt.
Mit $a = 1$ hat man zwar durchaus eine Exponentialfunktion, wenn auch eine langweilige: Es ist $1^x = \mathrm{e}^{x \ln 1} = \mathrm{e}^0 = 1$. Aber sie ist nicht bijektiv und daher nicht umkehrbar. Es gibt also keinen Logarithmus zur Basis 1.

4.3.5 Beispiel: Logarithmische Skalen

Für Logarithmen gilt die Funktionalgleichung (4.24). In Worten ausgedrückt besagt sie:

Nimmt man das Argument eines Logarithmus mit einem Faktor mal, so vergrößert sich der Logarithmus um einen bestimmten Summanden.

Diese Eigenschaft findet Anwendung in Naturwissenschaft und Technik, wenn man „logarithmische Skalen" verwendet. Als ein Beispiel sehen wir uns die Dezibel-Skala (dB) für die Lautstärke an. Sie gibt den so genannten Schallpegel L an gemäß

$$L/\mathrm{dB} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}, \tag{4.28}$$

wobei I für die Schallintensität steht und I_0 für einen Bezugswert (in der Regel die Hörschwelle bei einem 1 000 Hz-Ton). Bei jeder Verzehnfachung von I nimmt der Schallpegel um 10 dB zu, denn der neue Schallpegel lautet dann

$$L'/\mathrm{dB} = 10 \log_{10} \frac{10I}{I_0} = 10 \left(\log_{10} 10 + \log_{10} \frac{I}{I_0} \right) = 10 + L/\mathrm{dB}. \tag{4.29}$$

Eine Verzehnfachung der Intensität empfindet der Mensch als eine Verdoppelung der „Lautheit". Das heißt beispielsweise, dass wenn zehn gleichlaute Instrumente einen Ton spielen, dieses als doppelt so laut empfunden wird, als wenn ihn ein Instrument alleine spielt. Bezogen auf die dB-Skala bedeutet dies: Pro 10 dB Zunahme des Schallpegels verdoppelt sich die Lautheit des Geräuschs. Beispielsweise ist ein 70 dB-Geräusch doppelt so laut wie 60 dB, und viermal so laut wie 50 dB.

► **Zwischenfrage (4)** In (4.29) sind ziemlich viele Zehnen im Spiel. Warum ist $\log_{10} \frac{10I}{I_0} = \log_{10} 10 + \log_{10} \frac{I}{I_0}$, und warum $10 \log_{10} 10 = 10$?

4.3.6 Einige Grenzwerte

Abschließend betrachten wir einige Grenzwerte, die einen weiteren Einblick in das Verhalten von Logarithmus- und Exponentialfunktionen erlauben.

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \tag{4.30}$$

d. h., im Sinn dieses Grenzwerts „wächst die Exponentialfunktion schneller gegen Unendlich als jede Potenzfunktion".

Lesehilfe
Mit der Sprechweise „wächst schneller gegen Unendlich" ist große Vorsicht geboten. Beispielsweise wächst $2x$ ja auch schneller gegen Unendlich als x, der Grenzwert von $2x/x$ ist aber nicht unendlich, sondern 2. Daher der Zusatz „im Sinn dieses Grenzwerts". Aber die Sprechweise ist sehr intuitiv, und richtig angewandt ist sie einfach und nützlich.

Umgekehrt gilt (siehe Satz 2.5):

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0. \tag{4.31}$$

Nachweis In $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ sind sämtliche Potenzen von x enthalten. Für positive x gilt daher insbesondere

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$ •

(2) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty, \tag{4.32}$$

d. h., der Logarithmus wächst unbeschränkt, und Richtung 0 fällt er auf $-\infty$.

Den **Nachweis** wollen wir darin sehen, dass der Logarithmus die Umkehrung der Exponentialfunktion ist und die Grenzwerte der Exponentialfunktion bei $-\infty$ und ∞ bekannt sind. Daraus lässt sich das Verhalten des Logarithmus bei 0 und ∞ erschließen (siehe die Graphen in Abb. 4.5). •

(3) Für alle reellen Zahlen $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\searrow 0} x^a = 0, \quad \text{und umgekehrt} \quad \lim_{x\searrow 0} x^{-a} = \infty. \tag{4.33}$$

Aufgrund dieses Grenzwerts setzt man

$$0^a := 0 \quad \text{für alle reellen Zahlen } a > 0; \tag{4.34}$$

vergleiche hierzu (1.16).

Lesehilfe
Diese Grenzwerte noch einmal in Worten: Für einen beliebigen Exponenten $a > 0$, also zum Beispiel $a = 1/2$ (was dann einer Wurzel entspräche), geht der Ausdruck x^a, also z. B. $x^{1/2} = \sqrt{x}$, gegen Null, wenn x gegen Null geht. Und steht dieser Ausdruck im Nenner, geht es gegen Unendlich.

Nachweis Es sei (x_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt wegen $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = -\infty$ für $a > 0$ auch $\lim_{n\to\infty}(a \ln x_n) = -\infty$. Aus $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} x_n^a = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\ln x_n}\right)^a = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a \ln x_n} = 0. \qquad \bullet$$

(4) Für alle reellen Zahlen $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \tag{4.35}$$

d. h., im Sinn dieses Grenzwerts „wächst der Logarithmus langsamer gegen Unendlich als jede Potenzfunktion".

Lesehilfe
Machen wir uns diese Aussage noch einmal an einem Beispiel klar: Die Potenzfunktion $x \mapsto x^{1/10} = \sqrt[10]{x}$ ordnet etwa dem Argument $x = 10^{10}$, also einer „sehr großen" Zahl, den Funktionswert $\sqrt[10]{10^{10}} = 10$ zu, sie wächst also recht „langsam". Der Logarithmus jedoch strebt – im Sinn des obigen Grenzwerts – noch „langsamer" gegen Unendlich (ungeachtet der Tatsache, dass er mit $\ln 10^{10} \approx 23$ an dieser Stelle noch oberhalb von sqrt_{10} liegt), und dies bleibt auch dann richtig, wenn man den Exponenten beliebig weiter verkleinert, also $x^{1/1\,000}$ oder noch höhere Wurzeln betrachtet.

Nachweis Es sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann gilt auch $y_n := a \ln x_n \to \infty$. Nun ist $\mathrm{e}^{y_n} = \mathrm{e}^{a \ln x_n} = x_n^a$, und außerdem $y_n = \ln x_n^a = a \ln x_n$ bzw. $\ln x_n = y_n/a$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n/a}{\mathrm{e}^{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\, y_n \mathrm{e}^{-y_n}\right) \overset{(4.31)}{=} 0. \qquad \bullet$$

(5) Für alle reellen Zahlen $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\searrow 0}(x^a \ln x) = 0, \tag{4.36}$$

d. h., bei diesem konkurrierenden Grenzwertprozess, bei dem x^a gegen 0 strebt und $\ln x$ gegen $-\infty$, „setzt sich im Sinn dieses Grenzwerts die Potenzfunktion gegen den Logarithmus durch“.

Nachweis Wegen $\ln(1/x) = \ln 1 - \ln x = -\ln x$ und $x = \frac{1}{1/x}$ gilt

$$x^a \ln x = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^a}.$$

Mit $x \searrow 0$ strebt $1/x \to \infty$, so dass der Grenzwert (4.36) aus (4.35) folgt. •

Zusammenfassend können wir festhalten:

Im Sinn der hier betrachteten Grenzwerte setzt sich bei konkurrierenden Grenzwertprozessen eine Exponentialfunktion gegen jede Potenzfunktion durch, ist also „stärker“ als jede Potenzfunktion, während der Logarithmus umgekehrt „schwächer“ ist als jede Potenzfunktion.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, warum gilt $\log_{10} \frac{10I}{I_0} = \log_{10} 10 + \log_{10} \frac{I}{I_0}$ und $10 \log_{10} 10 = 10$.
Die Funktionalgleichung für den Logarithmus lautet $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, siehe (4.24). Daher ist $\log_{10} \frac{10I}{I_0} = \log_{10}(10\frac{I}{I_0}) = \log_{10} 10 + \log_{10} \frac{I}{I_0}$.
Außerdem ist $\log_{10} 10 = 1$; die 10 muss mit 1 potenziert werden, um 10 zu erhalten.
Natürlich stimmt das nicht nur für die 10. Es gilt $\log_a a = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Das Wichtigste in Kürze

- Die Zuordnung, die mit einer bijektiven Funktion f verbunden ist, kann umgekehrt werden. Auf diese Weise erhält man die **Umkehrfunktion** f^{-1}. Es ist also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
- Nicht alle Funktionen sind bijektiv und damit umkehrbar.
- Eine **stetige, streng monotone** Funktion f auf einem Intervall I bildet dieses Intervall bijektiv auf das Intervall $f(I)$ ab. Eine solche Funktion bzw. die Einschränkung einer Funktion auf ein solches Intervall ist umkehrbar.
- Der **Graph der Umkehrfunktion** f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung an der Achse $y = x$ aus dem Graphen von f.
- Bei der **n-ten Wurzel** handelt es sich um die Umkehrung der Potenzfunktion $x \mapsto x^n$.
- Der **natürliche Logarithmus** ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Er bildet $\mathbb{R}_+^*$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Er erfüllt die **Funktionalgleichung des Logarithmus**.
- Die **allgemeine Exponentialfunktion** zu einer Basis $a > 0$ ist definiert als $a^x := \exp_a(x) := \mathrm{e}^{x \ln a}$. Dabei gilt insbesondere $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.
- Der **allgemeine Logarithmus** $\log_a$ zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$, ist die Umkehrfunktion zu $\exp_a$. Daher ist $\log_a x$ die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten. Die Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus $\ln = \log_\mathrm{e}$ übertragen sich auf den allgemeinen Logarithmus.

- Die Exponentialfunktion geht **„schneller"** gegen Unendlich als jede Potenzfunktion. Der Logarithmus wächst **„langsamer"** gegen Unendlich als jede Potenzfunktion.

Und was bedeuten die Formeln?

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}, \quad f(x_1) < f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \text{ mit } x_1 < x_2, \quad f^{-1} \neq 1/f,$$
$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y), \quad \mathrm{sqrt}_n := (\mathrm{id}^n)^{-1}, \quad \mathrm{sqrt}_n(x) = \sqrt[n]{x},$$
$$\ln := \exp^{-1}, \quad \exp_a(x) := \exp(x \ln a), \quad \exp_a(p/q) = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$
$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \log_a(1) = 0, \quad a^0 = 1,$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x,$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

Übungsaufgaben

A4.1 Wenn jemand sagt, die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto 1/x$ seien beides Funktionen, die gleich ihrer Umkehrfunktion wären. Und es seien die beiden einzigen. Hat er damit recht?

A4.2 Löse folgende Gleichungen jeweils nach x auf:

(a) $1 - \mathrm{e}^{2x^2-3} = 0$ (b) $2^x = \sqrt{8}$ (c) $\ln(x^2 + 2x + 1) = 2$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2+3}} - \dfrac{1}{4} = 0$ (e) $x^5 = -243$ (f) $\sqrt[3]{x^5} = -32.$

A4.3 Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x^3}$ umkehrbar? Falls ja, ermittle die Umkehrfunktion f^{-1} einschließlich ihres Definitionsbereichs und ihres Bilds.

A4.4 Wir nehmen an, die Fallgeschwindigkeit v beim Fallschirmspringen werde gegeben durch die Formel

$$v(t) = \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right), \quad t \geq 0.$$

Darin steht t für die Zeit nach dem Absprung, m für die Masse des Fallschirmspringers, g für die Fallbeschleunigung und c ist ein „Reibungsfaktor", der von den äußeren Bedingungen des Sprungs abhängt.

a) Welche maximale Endgeschwindigkeit, abhängig von m, g und c, erreicht der Fallschirmspringer? Nach welcher Zeit wird die halbe Endgeschwindigkeit erreicht?

b) Bestimme die Konstante c für einen Springer mit der Masse $m = 100\,\mathrm{kg}$ (und $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$) so, dass er eine maximale Endgeschwindigkeit von $200\,\mathrm{km/h}$ erreicht. Nach welcher Fallzeit hat er die halbe Geschwindigkeit erreicht?

A4.5 Stimmt die Aussage, dass sämtliche Logarithmusfunktionen $\log_a$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, nur auf $\mathbb{R}_+^*$ definiert und streng monoton steigend sind? Und warum ist eigentlich die Basis 1 nicht erlaubt?

A4.6 Gib – wenn möglich – den Wert der folgenden Grenzwerte an:

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \lim\limits_{x\to\infty}(x^2\,\mathrm{e}^{-x}) & (2)\ \lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x) & (3)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x} \\
(4)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1+\mathrm{e}^x}{x^2+7x} & (5)\ \lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x} & (6)\ \lim\limits_{x\searrow 0}(x\ln x).
\end{array}$$

Winkelfunktionen

5

Der Zugang zu den Winkelfunktionen, also zu Sinus und Cosinus[1], kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen. Hier verfolgen wir zunächst einen geometrischen Zugang, da auf diese Weise die grundlegenden Eigenschaften und die vielfältigen praktischen Anwendungen der Funktionen besonders klar werden.

Ähnlich wie die Exponentialfunktion können Sinus und Cosinus aber auch durch unendliche Reihen wiedergegeben werden, was wir uns in Kap. 7 genauer ansehen werden. Und betrachtet man die Exponentialfunktion im Komplexen, so erkennt man darüber hinaus einen engen Zusammenhang mit Sinus und Cosinus, wie wir in Kap. 8 sehen werden.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Winkelfunktionen besitzen Winkel als Argumente. Wir sehen uns daher zunächst die verschiedenen Winkelmaße an.
- Wir werden sehen, was der Einheitskreis ist. Und wie sich darin Sinus und Cosinus finden lassen, und außerhalb auch Tangens und Cotangens.
- Sinus und Cosinus besitzen viele grundlegende und einfach zu erkennende Eigenschaften. Wie werden uns mit ihnen vertraut machen.
- Winkelfunktionen haben nicht nur mit dem Einheitskreis, sondern auch mit rechtwinkligen Dreiecken zu tun. Wir werden sehen, dass das eine im anderen zu finden ist.
- Nicht alle Dreiecke sind rechtwinklig. Inwiefern Sinus und Cosinus trotzdem weiterhelfen können, müssen wir uns ansehen.
- Wir lernen die „Additionstheoreme“ kennen.
- Natürlich kann man Winkelfunktionen auch umkehren. Dabei müssen wir allerdings genau hinsehen.
- Schwingungen und Wellen werden mit Sinus- oder Cosinusfunktionen beschrieben. Wir lernen hier, wie das geht.

[1] „Cosinus“ wird oft auch mit „K“, also „Kosinus“ geschrieben.

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_5

5.1 Einheitskreis und Winkelmaße

Unter dem *Einheitskreis* versteht man einen Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems übereinstimmt. Ein aus dem Ursprung kommender Strahl schneidet den Einheitskreis in einem Punkt $P(u, v)$, dessen Koordinaten der Bedingung $u^2 + v^2 = 1$ genügen, siehe Abb. 5.1.[2] Die Lage des Punkts P hängt vom Winkel ab, den der Strahl mit der Rechtsachse einschließt. Dabei ist der Winkel *positiv*, wenn er von der Rechtsachse aus *gegen den Uhrzeigersinn* abgetragen wird, und andernfalls negativ.

Lesehilfe
Dass ein mathematisch positiver Winkel gegen den Uhrzeigersinn läuft, ist reine Konvention, aber allgemein so üblich. Hierzu gibt es eine „Rechte-Hand-Regel“: Zeigen die gekrümmten Finger der rechten Hand in mathematisch positive Drehrichtung, so zeigt ihr Daumen nach oben. (Die Rechte-Hand-Regel funktioniert natürlich nicht mit links.)

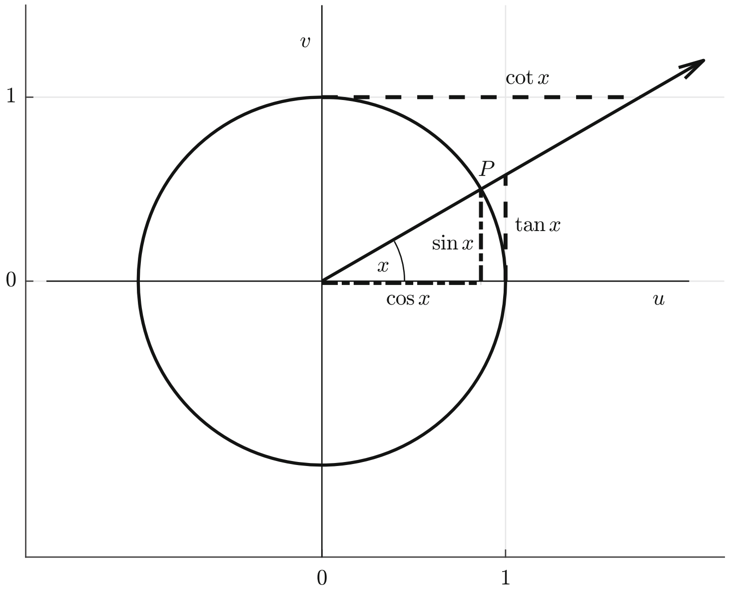

Abb. 5.1 Der Mittelpunkt des Einheitskreises liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Ein aus dem Ursprung kommender Strahl schließt mit der Rechtsachse einen Winkel x ein und schneidet den Einheitskreis im Punkt $P(u, v)$. Der Winkel x im Bogenmaß entspricht der Länge des überstrichenen Bogens. Der Sinus des Winkels ist gleich v, der Cosinus ist gleich u. Tangens und Cotangens entstehen auf den Tangenten an den Einheitskreis: der Tangens auf der Tangente durch den Punkt $(1, 0)$ und der Cotangens auf der Tangente durch den Punkt $(0, 1)$

[2] Wir verwenden hier die Koordinatenbezeichnungen u und v, weil wir später den Winkel mit x bezeichnen wollen.

Zur Angabe der Größe eines Winkels gibt es verschiedene lineare Maße:

- **Bogenmaß**: Das Bogenmaß für einen Winkel α entspricht der *Länge des von diesem Winkel auf dem Einheitskreis überstrichenden Bogens*. Es ist somit $\alpha_{\text{Vollwinkel}} = 2\pi$, also gleich dem Umfang des Einheitskreises. Ein rechter Winkel entspricht $\pi/2$.
  Das Bogenmaß ist dimensionslos. Zur Unterscheidung von anderen Winkeleinheiten kann der Zusatz „rad" (von „Radiant") verwendet werden.
  Das Bogenmaß kann auf Kreise mit beliebigem Radius r übertragen werden: Überstreicht ein Mittelpunktswinkel α die Bogenlänge b, so gilt
  $$\alpha_{\text{Bogenmaß}} = \frac{b}{r} \qquad \text{bzw.} \qquad b = r\alpha_{\text{Bogenmaß}}. \tag{5.1}$$
- **Grad**: Bei der Gradeinteilung wird der Vollwinkel in 360° eingeteilt. Ein rechter Winkel entspricht 90°.
  Ein Grad kann sexagesimal unterteilt werden,[3]
  $$1^\circ = 60' \quad (\textit{Winkelminuten}), \qquad 1' = 60'' \quad (\textit{Winkelsekunden}), \tag{5.2}$$
  oder dezimal durch gewöhnliche Nachkommastellen. So ist beispielsweise $1{,}5^\circ = 1^\circ 30'$ und es ist $1^\circ = 3\,600''$.
  Statt von Winkelminuten und Winkelsekunden spricht man auch von *Bogenminuten* und *Bogensekunden*.
- **Neugrad** bzw. **Gon**: Bei der Neugradeinteilung wird der Vollwinkel in 400 gon eingeteilt. Ein rechter Winkel entspricht 100 gon. Gon werden mit gewöhnlichen dezimalen Nachkommastellen verwendet.

Eine Umrechnung zwischen den unterschiedlichen Winkelmaßen kann jederzeit erfolgen über die Relation

$$\frac{\alpha_{\text{Bogenmaß}}}{2\pi} = \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{360^\circ} = \frac{\alpha_{\text{Neugrad}}}{400\,\text{gon}}. \tag{5.3}$$

Das bedeutet insbesondere

$$\alpha_{\text{Bogenmaß}} = \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{180^\circ/\pi} = \frac{\alpha_{\text{Neugrad}}}{200\,\text{gon}/\pi}. \tag{5.4}$$

Fasst man den jeweiligen Umrechnungsfaktor zusammen zu $\varrho_{\text{Grad}} := 180^\circ/\pi$ und $\varrho_{\text{Neugrad}} := 200\,\text{gon}/\pi$, so liest sich (5.1) als

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{\varrho_{\text{Grad}}} = \frac{\alpha_{\text{Neugrad}}}{\varrho_{\text{Neugrad}}}, \tag{5.5}$$

was man sich unabhängig vom Winkelmaß merken kann als „*b zu r wie α zu ϱ*".

[3] Sexagesimale Unterteilungen gehen letztendlich auf die Babylonier zurück, die ein 60er-Zahlensystem verwendet haben. Die Zahl 60 hat den Vorteil, sehr viele Teiler zu besitzen: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30. Daher lassen sich viele Bruchteile ganzzahlig ausdrücken.

In der Mathematik ist das Bogenmaß das übliche Winkelmaß. Wenn nichts anderes gesagt ist, *verwenden auch wir im Folgenden grundsätzlich das Bogenmaß.*

▶ **Zwischenfrage (1)** Geodäten verwenden zur Vermessung Winkelmessinstrumente, so genannte Theodolite (bzw. Tachymeter, mit denen zusätzlich Abstände gemessen werden können). Ein „Sekundengerät" weist dabei einen Winkelfehler von maximal einer Winkelsekunde auf. Welcher Querabweichung entspricht dies bei $1\,\mathrm{km}$ Beobachtungsdistanz? Und bei $10\,\mathrm{km}$? (Taschenrechner darf benutzt werden.)

5.2 Sinus und Cosinus

Bei den Winkelfunktionen Sinus und Cosinus handelt es sich um Strecken, die durch einen Strahl aus dem Koordinatenursprung, der einen bestimmten Winkel mit der Koordinatenachse einschließt, auf natürliche Weise am Einheitskreis entstehen (siehe Abb. 5.1):[4]

Definition 5.1 *Der Mittelpunkt eines Einheitskreises entspreche dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Ein aus dem Ursprung kommender Strahl, der mit der Rechtsachse den Winkel x (im Bogenmaß) einschließe, schneidet den Einheitskreis im Punkt $P(u, v)$, dessen Koordinaten mit*

$$u =: \cos x \quad \textit{und} \quad v =: \sin x$$

bezeichnet werden. Auf diese Weise werden die Funktionen Sinus *und* Cosinus *definiert:*

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \sin x, \\ \cos &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

Lesehilfe
In dieser geometrischen Definition für Sinus und Cosinus sind alle auftretenden Größen reelle Zahlen, d. h. einheitenlos: Das Argument x entspricht dem Winkel im Bogenmaß und auch die Koordinaten u und v besitzen als mathematische Koordinaten keine Einheit.

Dass die auf diese Weise definierten Funktionen sin und cos stetig sind, ist anschaulich klar: Kleine Änderungen im Winkel x führen zu kleinen Verschiebungen des Punkts $P(u, v)$ und damit zu kleinen Veränderungen seiner Koordinaten.

[4] Statt von Winkelfunktionen spricht man oft auch von „Kreisfunktionen" (wegen ihres Zusammenhangs mit dem Einheitskreis) oder von „trigonometrischen Funktionen" (wegen ihrer Bedeutung im Zusammenhang mit Dreiecksberechnungen).

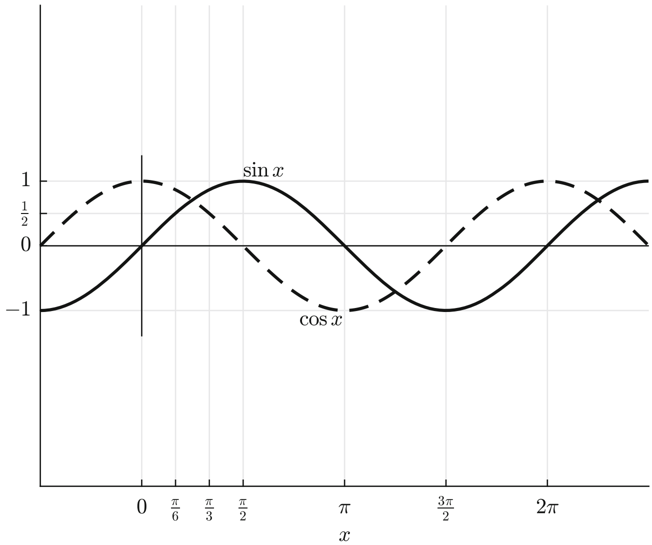

Abb. 5.2 Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind periodisch mit der Periode 2π, d. h., nach jeweils 2π wiederholen sich ihre Funktionsgraphen. Die beiden Graphen sind um $\pi/2$ gegeneinander verschoben. Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$. Die Graphen oszillieren zwischen den Maximalwerten $+1$ und -1

Die Graphen von sin und cos sind in Abb. 5.2 dargestellt. Beide Graphen sind lediglich um $\pi/2$ gegeneinander verschoben und ansonsten gleich. Und natürlich sind sie periodisch mit der Periode 2π, weil nach Durchlauf eines Vollwinkels sich jeweils wieder dieselbe Situation ergibt.

Betrachtet man statt der normalen Sinusfunktion die Funktion $x \mapsto \sin(2x)$, so wird der Sinus mit wachsendem x „in doppelter Geschwindigkeit" durchlaufen, d. h., bei $x = 2\pi$ hat der Graph dann bereits zwei volle Perioden absolviert. Umgekehrt hat die Funktion $x \mapsto \sin(x/2)$ bei 2π erst den ersten positiven Bogen hinter sich.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, wie groß die Querabweichung bei einem sekundengenauen Theodolit bei vorgegebener Beobachtungsdistanz ist.
Die Querabweichung entspricht näherungsweise der Länge des Bogens b, der mit dem Radius $r = 1\,\text{km}$ vom Winkel $1'' = 1°/3\,600$ überstrichen wird. Nach (5.1) ist

$$b = r\alpha_{\text{Bogenmaß}},$$

und für den Winkel haben wir

$$\alpha_{\text{Bogenmaß}} = \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{180°/\pi} = \frac{\pi}{180°}\alpha_{\text{Grad}} = \frac{\pi}{180°}\frac{1°}{3\,600}.$$

Wir erhalten also insgesamt für $1\,\mathrm{km}$ Beobachtungsdistanz

$$b = r\frac{\pi}{180^\circ}\frac{1^\circ}{3\,600} = 1\,000\,\mathrm{m}\frac{\pi}{180 \cdot 3\,600} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \approx 5\,\mathrm{mm}.$$

Bei $10\,\mathrm{km}$ Beobachungsdistanz ergibt sich der 10-fache Wert, also $5\,\mathrm{cm}$.

5.2.1 Einige Sinus- und Cosinuswerte

Folgende markante Werte entnimmt man der Definition am Einheitskreis sofort:

$$\begin{aligned} &\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin(2\pi) = 0;\\ &\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos(2\pi) = 1. \end{aligned}$$

Anhand geometrischer Überlegungen lassen sich aber noch andere Sinus- und Cosinuswerte leicht angeben:

- Fügt man für $x = \pi/6$ dem durch den Strahl und Sinus und Cosinus gebildeten Dreieck seine Spiegelung an der Rechtsachse hinzu, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen 1. Es ist daher

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

  Der Satz des Pythagoras ergibt dann

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{5.7}$$

- Für $x = \pi/4$ hat man es mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck zu tun. Der Satz des Pythagoras ergibt daher

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{5.8}$$

Lesehilfe
Kurz zum Pythagoras: Bei $x = \pi/6$ ergibt sich der Cosinus v aus $1^2 = (1/2)^2 + v^2$, also $v^2 = 3/4$, und bei $x = \pi/4$ sind Sinus und Cosinus beide gleich u und daher $1^2 = 2u^2$, also $u^2 = 1/2$. Und es ist $\sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

- Für $x = \pi/3$ hat man dasselbe Dreieck wie bei $\pi/6$, nur mit vertauschten Rollen für Sinus und Cosinus, d. h.

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \tag{5.9}$$

Zusammengefasst lassen sich diese Werte wie folgt wiedergeben und merken:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_{\text{Bogenmaß}} & x_{\text{Grad}} & \sin x & \cos x \\ \hline 0 & 0^\circ & \frac{1}{2}\sqrt{0} & \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ \pi/6 & 30^\circ & \frac{1}{2}\sqrt{1} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \pi/4 & 45^\circ & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \pi/3 & 60^\circ & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{1} \\ \pi/2 & 90^\circ & \frac{1}{2}\sqrt{4} & \frac{1}{2}\sqrt{0}. \end{array} \tag{5.10}$$

Lesehilfe
Bei der Verwendung eines Taschenrechners im Zusammenhang mit Winkelfunktionen ist unbedingt auf die Einstellung des Winkelmaßes zu achten. Die entsprechende Taste oder Funktion heißt oft „DRG“, und dann steht in der Regel „DEG“ für Grad, „RAD“ für Bogenmaß und „GRAD“ für Neugrad.

Sieh mal bei deinem Taschenrechner oder deiner Taschenrechner-App nach.

▶ **Zwischenfrage (2)** Was bedeutet „sin 10“?

5.2.2 Grundlegende Eigenschaften

Folgende Eigenschaften und Zusammenhänge von sin und cos lassen sich unmittelbar angeben:

(1) Der Betrag von sin und cos wird nicht größer als 1:

$$-1 \leq \sin x \leq +1, \quad -1 \leq \cos x \leq +1. \tag{5.11}$$

(2) Der Sinus ist ungerade, d. h., es gilt

$$\sin(-x) = -\sin x, \tag{5.12}$$

und der Cosinus ist gerade, d. h., es gilt

$$\cos(-x) = \cos x. \tag{5.13}$$

Lesehilfe
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem bzgl. der Null symmetrischen Definitionsbereich D heißt *gerade*, wenn $\forall x \in D$ gilt $f(-x) = f(x)$. Der Graph einer geraden Funktion ist daher *achsensymmetrisch* zur y-Achse.

Umgekehrt heißt eine Funktion f *ungerade*, wenn $\forall x \in D$ gilt $f(-x) = -f(x)$. In diesem Fall ist der Graph *punktsymmetrisch* zum Ursprung.

(3) Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $u = \cos x$ und $v = \sin x$ am Einheitskreis gilt der Satz des Pythagoras, d. h., es ist

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Diese Gleichung wird manchmal als der „trigonometrische Pythagoras“ bezeichnet.

Lesehilfe
Die Ausdrücke $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ sind nichts anderes als abkürzende Schreibweisen für $(\sin x)^2$ bzw. $(\cos x)^2$.

(4) Die Periodizität von Sinus und Cosinus drückt sich aus durch die folgenden Gleichungen:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{Z}. \tag{5.15}$$

Die Nullstellen befinden sich bei:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tag{5.16}$$
$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{(k + 1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.17}$$

(5) Sinus und Cosinus sind periodisch und um $\pi/2$ gegeneinander verschoben. Aus diesen Tatsachen ergeben sich die so genannten *Reduktionsformeln*, die sich aus den Graphen ablesen lassen:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \qquad &&\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \qquad &&\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,\\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{5.18}$$

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Die Frage war, was „$\sin 10$" bedeutet.
Die Sinusfunktion ist für reelle Zahlen als Argumente definiert. Sie geben einen Winkel im Bogenmaß an. Der Ausdruck $\sin 10$ wäre also der Sinuswert für den Winkel 10 im Bogenmaß. Wegen $10 \approx 3\pi$ hätten wir also $\sin 10 \approx 0$.
Natürlich ist auch $\sin 10°$ möglich; das muss dann aber auch so da stehen. Es ist dann $\sin 10° = \sin(10\pi/180) = \sin(\pi/18) \approx 0{,}17$.

5.2.3 Numerische Berechnung

Die Sinusfunktion ist offenbar vollständig bekannt, wenn man nur die Werte auf dem ersten Halbbogen kennt, d. h. für $x \in [0, \pi/2]$. Die Form dieses Halbbogens wiederholt sich ständig: x-Werte des zweiten Halbbogens lassen sich über $\sin x = \sin(\pi - x)$ auf Werte des ersten Halbbogens zurückführen, für den dritten Halbbogen verwendet man $\sin x = -\sin(x - \pi)$ usw. Dasselbe gilt natürlich für den Cosinus.

Die numerische Berechnung der Werte auf dem ersten Halbbogen – und auch darüber hinaus, wenn man mag – kann unter Verwendung der „Sinusreihe" erfolgen. Für den Sinus gibt es nämlich ebenso wie für den Cosinus eine Darstellung als unendliche Reihe, wie wir in Abschn. 7.5.1 sehen werden:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Lesehilfe
Natürlich setzen die Reihendarstellungen normale Zahlen als Argumente voraus, also Winkel x im Bogenmaß. Etwa $\sin(30°) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(30°)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ hinzuschreiben, wäre offenbar nicht sinnvoll.

Beide Reihen weisen dieselben guten Konvergenzeigenschaften wie die Exponentialreihe auf. Daher liefern schon die ersten Glieder auf dem ersten Halbbogen sehr gute Werte. So ist zum Beispiel für $x = \pi/6$

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{(\pi/6)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 = 0{,}5000021326,$$

man liegt also schon mit nur drei Gliedern bereits dicht am exakten Wert $\sin(\pi/6) = 0{,}5$. Mit mehr Gliedern lassen sich natürlich leicht größere Genauigkeiten erzielen. Übrigens macht ein Taschenrechner mit seiner Sinus- oder Cosinustaste nichts anderes.

▶ **Zwischenfrage (3)** Ermittle einen Näherungswert für $\cos(\pi/4)$, der mindestens die ersten drei Nachkommastellen des exakten Werts wiedergibt (es ist $\cos(\pi/4) = 0{,}707107$), natürlich unter Verwendung eines Taschenrechners, aber ohne dessen Cosinustaste.

5.2.4 Übertragung auf rechtwinklige Dreiecke

Zunächst vereinbaren wir:

Im Folgenden seien Dreiecke stets so bezeichnet, dass der Innenwinkel α der Seite a gegenüberliegt, der Winkel β der Seite b und der Winkel γ der Seite c.

Bei einem *rechtwinkligen* Dreieck ist ein Innenwinkel ein rechter Winkel, also etwa $\gamma = \pi/2$. Die Seite c heißt dann die *Hypothenuse*, die beiden anderen Seiten a und b die *Katheten*. Zum Winkel α heißt dabei a die *Gegenkathete* und b die *Ankathete*.

In *ähnlichen* Dreiecken sind die Verhältnisse der Seitenlängen gleich. Im Einheitskreis bildet das Dreieck mit den Seiten $\sin x$, $\cos x$ und dem Strahl unter dem Winkel x ein rechtwinkliges Dreieck. Jedes rechtwinklige Dreieck mit $\gamma = \pi/2$ und $\alpha = x$ ist ähnlich zu diesem Dreieck, siehe Abb. 5.3, so dass wir gleiche Seitenverhältnisse haben. Das heißt es ist

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \tag{5.19}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}. \tag{5.20}$$

Sinus und Cosinus erlauben somit die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, und diese Anwendung ist natürlich von großer praktischer Bedeutung.

Lesehilfe

Dreiecke heißen ähnlich zueinander, wenn sie in zwei (und damit in allen drei) Winkeln übereinstimmen. Ähnliche Dreiecke sind also im Vergleich untereinander nur vergrößert oder verkleinert.

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Es sollte ein Näherungswert für $\cos(\pi/4)$ ermittelt werden.

Für den Näherungswert verwenden wir die Cosinusreihe. Es ist

$$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k \frac{(\pi/4)^{2k}}{(2k)!} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}6916,$$

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \frac{(\pi/4)^{2k}}{(2k)!} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = 0{,}7074,$$

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{(\pi/4)^{2k}}{(2k)!} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 = 0{,}707103,$$

die zweite Summe reicht also bereits aus.

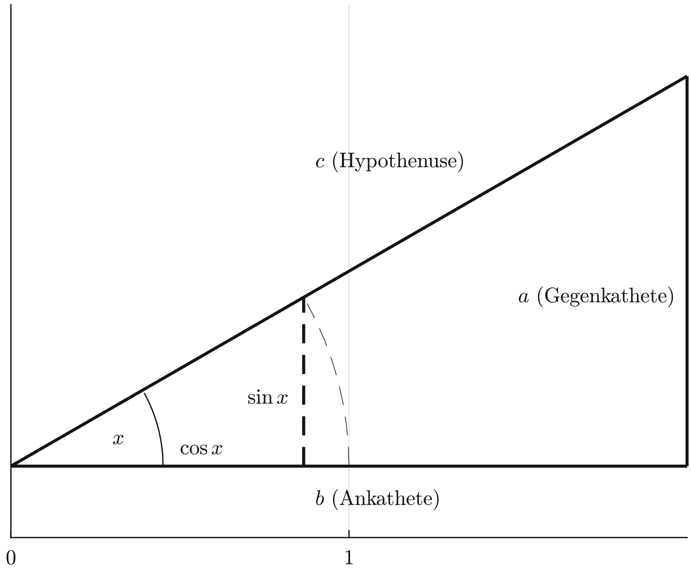

Abb. 5.3 In ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse der Seitenlängen gleich. Ergänzt man daher das rechtwinklige Dreieck, das am Einheitskreis von $\sin x$, $\cos x$ und der Hypothenuse mit der Länge 1 gebildet wird, zu einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit der Gegenkathete a, der Ankathete b und der Hypothenuse c, so erkennt man, dass gilt: $\sin x = a/c$, $\cos x = b/c$

5.2.5 Sinussatz und Cosinussatz

In beliebigen Dreiecken ohne rechten Winkel können Sinus und Cosinus nicht unmittelbar auf die Innenwinkel angewendet werden. Hier gilt jedoch

Satz 5.1 *In einem beliebigen Dreieck mit den in üblicher Weise bezeichneten Seiten a, b, c und Innenwinkeln α, β, γ gilt:*

(1) Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}. \tag{5.21}$$

(2) Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{5.22}$$

Beweis Wir führen den Beweis mit geometrischen Methoden: Für den Sinussatz zeichnet man im Dreieck eine Höhe ein. Dadurch entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die Sinusdefinition angewandt werden kann; Auflösen dieser beiden Gleichungen nach der Höhe und anschließendes Gleichsetzen ergibt den Sinussatz. Falls einer der Innenwinkel größer als $\pi/2$ ist, verwendet man die Reduktionsformel $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Für den Cosinussatz verwenden wir Vektoren und das gewöhnliche Skalarprodukt: Man stellt die Seiten des Dreiecks durch Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dar. Bei richtiger Wahl der Orientierung der Vektoren ist dann $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Bildet man nun das Skalarprodukt $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = c^2$, so erhält man

$$c^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ schließen den Winkel γ ein. Ihr Skalarprodukt ist daher $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \gamma$, so dass wir den Cosinussatz erhalten. •

Wir halten noch einmal fest: *Im Unterschied zu Sinus und Cosinus allein können Sinus- und Cosinussatz in beliebigen Dreiecken verwendet werden.*

In praktischen Anwendungen werden zusätzlich zu Sinus, Cosinus, Sinussatz und Cosinussatz natürlich die üblichen geometrischen Grundsätze ausgenutzt, an die hier kurz erinnert sei: Innenwinkelsumme, Stufenwinkel, Wechselwinkel, Winkel eingeschlossen von paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkeln usw.

▶ **Zwischenfrage (4)** Gilt im Dreieck auch $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$? Und: Dürfen Sinus- und Cosinussatz auch in rechtwinkligen Dreiecken verwendet werden?

5.2.6 Additionstheoreme

Die *Additionstheoreme* sind die zentralen Formeln für Sinus und Cosinus:

Satz 5.2 (Additionstheoreme) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{5.23}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{5.24}$$

Beweis Der Beweis kann geometrisch erfolgen, indem man den Vektor $(\cos x, \sin x)$ einer Drehung um den Winkel y unterwirft.

Viel einfacher erfolgt der Beweis jedoch unter Verwendung der Euler-Formel, mit der sich die Additionstheoreme dann aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergeben. Wir holen ihn in Abschn. 8.4.1 nach. ∘

Mit $x - y = x + (-y)$ und unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus, siehe (5.12) und (5.13), können die Additionstheoreme auch geschrieben werden in der Form

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Aus den Additionstheoremen ergeben sich nach kurzer Rechnung Formeln wie

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right), \tag{5.25}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right), \tag{5.26}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{5.27}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{5.28}$$

Lesehilfe
Die Additionstheoreme sind *die* Formeln für Sinus und Cosinus. Man mache sich klar, dass $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$, $\sin(xy) = (\sin x)(\sin y)$ oder $\sin(ax) = a\sin(x)$ einfach nur falsch wäre.

Nimmt man noch den Zusammenhang

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

hinzu, so lassen sich weitere Formeln ableiten. Zum Beispiel:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \quad \text{d.h.}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \qquad \text{und} \tag{5.29}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)). \tag{5.30}$$

Auf diese Weise lassen sich also $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ durch $\cos(2x)$ ausdrücken. Außerdem ist

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \tag{5.31}$$

so dass sich das Produkt $\sin x \cos x$ durch $\sin(2x)$ ausdrücken lässt.

Schlägt man nach, so findet man unzählige weitere Formeln für Sinus oder Cosinus, wie etwa

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \text{oder} \qquad \cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right);$$

all diese Formeln ergeben sich aus (mehrfacher) Anwendung der Additionstheoreme und des „trigonometrischen Pythagoras“, indem man beispielsweise zunächst schreibt $\sin(3x) = \sin(2x + x)$ usw.

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, ob in einem Dreieck auch $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ gilt. Und ob man Sinus- und Cosinussatz auch in rechtwinkligen Dreiecken verwenden darf.

Ja, es gilt auch $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, und auch $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Entscheidend ist nur: Links steht eine Seite, rechts die beiden anderen zusammen mit dem Winkel, der von ihnen eingeschlossen wird.

Und: Natürlich dürfen Sinus- und Cosinussatz auch in rechtwinkligen Dreiecken verwendet werden. Es ist ja von beliebigen Dreiecken die Rede. Allerdings reduzieren sich wegen $\sin(\pi/2) = 1$ und $\cos(\pi/2) = 0$ ihre Aussagen dann auf die normale Sinusdefinition bzw. auf den Satz des Pythagoras.

5.2.7 Beispiel: Schwingungen und Wellen

Sich periodisch wiederholende Vorgänge sind in Natur und Technik allgegenwärtig. Lässt sich ihr zeitlicher Verlauf durch eine Sinusfunktion beschreiben, so spricht man von *harmonischen Schwingungen*. Sie besitzen allgemein die Form

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{5.32}$$

Darin steht t für die Zeit, und A_0 ist die Amplitude der Schwingung. Der Faktor ω ist die *Winkelgeschwindigkeit*; für sie gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5.33}$$

mit der Periodendauer T, die für einen vollständigen Durchlauf der Schwingung benötigt wird. Soll die Schwingung für $t = 0$ nicht bei 0 beginnen, sondern von einem anderen Zustand aus starten, so verwendet man dazu den Winkel φ. Das Argument einer Schwingung nennt man ihre *Phase*, und der Winkel φ gibt somit die *Anfangsphase* an.

Die Schwingung (5.32) kann man sich gut an einem Zeigerdiagramm klarmachen: Dazu betrachten wir ähnlich wie beim Einheitskreis jetzt einen Zeiger mit der Länge A_0, der im Koordinatenursprung beginnt. Er schließe zu $t = 0$ den Winkel φ mit der Rechtsachse ein, und er beginne dann mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu rotieren. Seine Projektion auf die Hochachse entspricht dann der harmonischen Schwingung $A(t)$, siehe Abb. 5.4.

Ferner gilt: *Addiert man zwei beliebige harmonische Schwingungen mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω, so ergibt sich wieder eine harmonische Schwingung mit dieser Winkelgeschwindigkeit.*

Das ist mit Hilfe der Zeigerdiagramme sofort klar: Zwei Schwingungen heißt, dass man es mit zwei Zeigern zu tun hat, die unterschiedlich lang sein und verschiedene Anfangsphasen besitzen können. Diese Zeiger rotieren aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit, ändern also nicht ihre relative Lage zueinander. Ihre Summe ergibt sich daher aus der Vektorsumme der beiden Zeiger, wobei dieser resultierende Zeiger wieder mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotiert.

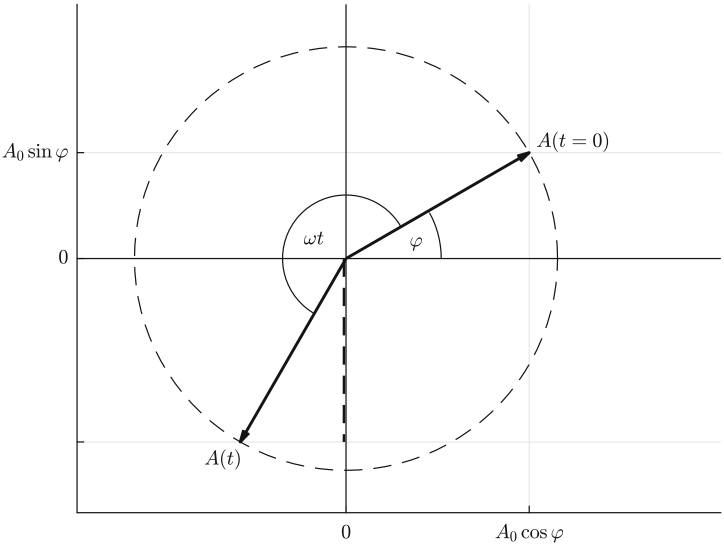

Abb. 5.4 Eine Schwingung $A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ entspricht einem rotierenden Zeiger der Länge A_0, der zum Zeitpunkt $t = 0$ den Winkel φ mit der Rechtsachse einschließt. Anfangs ergibt seine Projektion auf die Rechtsachse $A_0 \cos\varphi$ und auf die Hochachse $A_0 \sin\varphi$. Rotiert der Zeiger nun mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so erhält man $A(t)$ als Projektion des Zeigers zum Zeitpunkt t auf die Hochachse

Speziell kann eine beliebige „Sinusschwingung" der Form (5.32) auch dargestellt werden als die folgende Überlagerung zweier Schwingungen:

$$A(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t). \tag{5.34}$$

Das Additionstheorem ergibt ja

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{A_0 \cos\varphi}_{=:\,A_1} \sin(\omega t) + \underbrace{A_0 \sin\varphi}_{=:\,A_2} \cos(\omega t), \tag{5.35}$$

und aus dem Zeigerdiagramm ergeben sich ferner die Zusammenhänge

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \text{und} \qquad \tan\varphi = \frac{A_2}{A_1}, \tag{5.36}$$

siehe Abb. 5.4 und Abschn. 5.3 für den Tangens.

Eine *Welle* ist ein zeitlich *und* räumlich periodischer Vorgang. Eine sich in x-Richtung ausbreitende harmonische Welle wird beschrieben durch eine Wellenfunktion

$$u(t, x) = u_0 \sin(\omega t - kx + \varphi). \tag{5.37}$$

Analog zu ω, wo es um die zeitliche Periodizität geht, gibt die Wellenzahl k die räumliche Periodizität an: Es ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.38}$$

mit der Wellenlänge λ, also der räumlichen Ausdehnung eines vollständigen Durchlaufs der Schwingung. Dies ist die Strecke, die die Welle in der Zeit T zurücklegt, so dass für ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit c gilt

$$c = \frac{\lambda}{T}. \tag{5.39}$$

Ein konkretes Beispiel für Wellen sind Lichtwellen. Bei ihnen handelt es sich um Schwingungen von elektrischen und magnetischen Feldern, die sich wechselseitig selbst erzeugen. Sichtbares Licht weist Wellenlängen im Bereich von 0,5 µm und Periodendauern um $1{,}7 \cdot 10^{-15}$ s auf, mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von ungefähr 300 000 km/s.

5.3 Tangens und Cotangens

Mit Tangens und Cotangens lernen wir nun zwei weitere Winkelfunktionen kennen:

Definition 5.2 *Die Funktion* Tangens *ist für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *definiert durch*

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Die Funktion Cotangens *ist für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *definiert durch*

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Beide Funktionen sind nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, weil die Nennerfunktionen Cosinus bzw. Sinus Nullstellen aufweisen. Diese Nennernullstellen entsprechen Sprungstellen in den Graphen, siehe Abb. 5.5. Sowohl Tangens als auch Cotangens sind *ungerade*, d. h., es gilt

$$\tan(-x) = -\tan x, \qquad \cot(-x) = -\cot x. \tag{5.40}$$

► **Zwischenfrage (5)** Warum sind Tangens und Cotangens ungerade?
Und welchen Wert haben $\tan 0$, $\tan\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{3}$, $\tan\frac{\pi}{2}$? Und $\cot 0$, $\cot\frac{\pi}{6}$, $\cot\frac{\pi}{4}$, $\cot\frac{\pi}{3}$, $\cot\frac{\pi}{2}$?

Auch der Tangens entspricht einem Streckenstück am Einheitskreis: Die Bezeichnung „Tangens" stammt von „Tangente" und weist darauf hin, dass sich $\tan x$ über den Schnittpunkt des unter dem Winkel x aus dem Zentrum kommenden Strahls mit der Tangente im Punkt $(1, 0)$ des Einheitskreises ergibt, siehe Abb. 5.1. Dass die Länge dieses Streckenstücks gleich $\sin x / \cos x$ ist, ergibt sich aus der

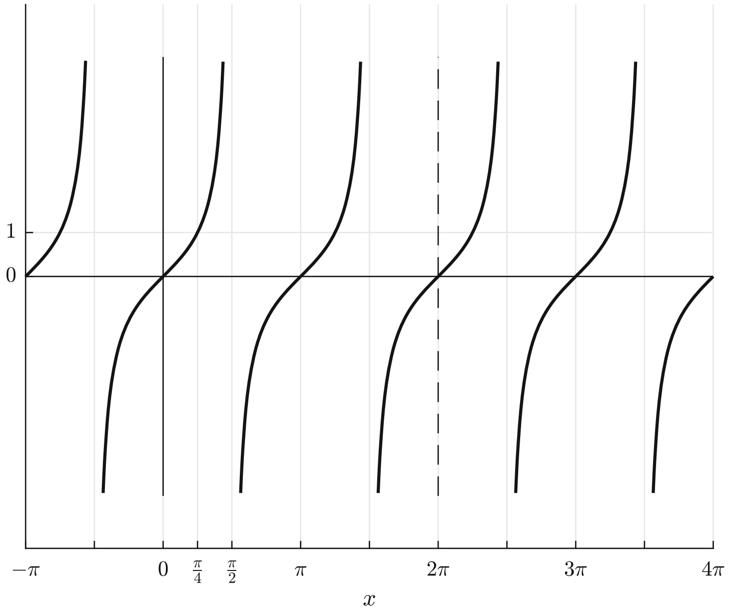

Abb. 5.5 Die Funktion $\tan : \mathbb{R} \setminus \{(k+1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ ist wie Sinus und Cosinus periodisch mit der Periode 2π. An den Lücken im Definitionsbereich findet jeweils ein Sprung von $+\infty$ nach $-\infty$ statt

Ähnlichkeit der Dreiecke, die durch den Mittelpunktsstrahl mit den Streckenstücken $\sin x$ und $\tan x$ gebildet werden. Analog entsteht der Cotangens an der Tangente im Punkt $(0, 1)$.

Der Verlauf des Graphen der Tangensfunktion lässt sich am Einheitskreis gut nachvollziehen: Mit $x \to \pi/2$ schneidet der Mittelpunktsstrahl die Tangente immer weiter „oben" und schließlich im Unendlichen bzw. gar nicht mehr. Übersteigt x den Wert $\pi/2$, so ist der Strahl rückwärtig zu verlängern, und der Schnittpunkt ergibt sich aus $-\infty$ kommend „unten" auf der Tangente usw.

In rechtwinkligen Dreiecken mit den üblichen Bezeichnungen und $\gamma = \pi/2$ gilt offenbar (siehe Abb. 5.3 und (5.19) und (5.20))

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}. \tag{5.41}$$

Da der Cotangens nichts anderes ist als der Kehrwert des Tangens und daher bei Bedarf durch diesen ersetzt werden kann, spielt der Cotangens in Anwendungen eine untergeordnete Rolle.

Schließlich lässt sich für den Tangens folgendes **Additionstheorem** angeben:

Satz 5.3 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*, für die* $\tan x$*,* $\tan y$ *und* $\tan(x+y)$ *definiert sind, gilt*

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}. \tag{5.42}$$

Beweis Der Beweis ergibt sich aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$
$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y \left(1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$ •

► **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war, warum Tangens und Cotangens ungerade sind, und nach einigen Funktionswerten.
Aus den Symmetrien von Sinus und Cosinus folgt:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \; \cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x.$$

Es ist $\tan x = \sin x / \cos x$, und die Sinus- und Cosinuswerte der fraglichen Winkel sind bekannt. Daher ist $\tan 0 = 0/1 = 0$, $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}$, $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$, $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, und $\tan \frac{\pi}{2}$ ist nicht definiert.
Der Cotangens ergibt sich als $\cot x = \cos x / \sin x$ bzw. als Kehrwert des Tangens: $\cot 0$ ist nicht definiert, $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\cot \frac{\pi}{4} = 1$, $\cot \frac{\pi}{3} = 1/\sqrt{3}$ und $\cot \frac{\pi}{2} = 0/1 = 0$.

5.4 Umkehrfunktionen

Bei den Winkelfunktionen handelt es sich um periodische Funktionen, die global nicht bijektiv und daher nicht umkehrbar sind. Schränkt man ihren Definitionsbereich jedoch geeignet ein, so lassen sich in sinnvoller Weise Umkehrfunktionen definieren:

Definition 5.3
(1) *Die Funktion* sin *ist auf dem Intervall* $[-\pi/2, \pi/2]$ *streng monoton steigend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die Umkehrfunktion heißt* Arcussinus*,*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

(2) *Die Funktion* cos *ist auf dem Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die Umkehrfunktion heißt* Arcuscosinus*,*

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

(3) *Die Funktion* tan *ist auf dem Intervall* $]-\pi/2, \pi/2[$ *streng monoton steigend und bildet es bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die Umkehrfunktion heißt* Arcustangens*,*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \,]-\pi/2, \pi/2[.$$

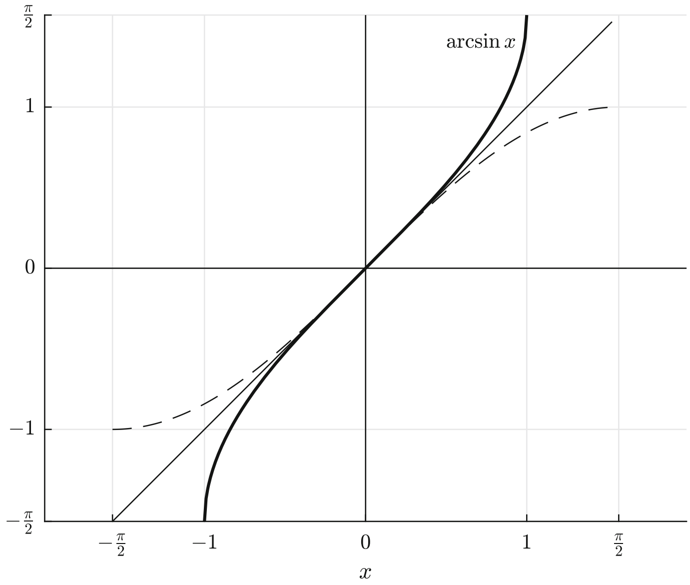

Abb. 5.6 Die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ist die Umkehrfunktion der eingeschränken Sinusfunktion $\sin |[-\pi/2, \pi/2]$

Lesehilfe
Für die Umkehrfunktionen sind auch die Schreibweisen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ möglich – so findet man sie in der Regel auf dem Taschenrechner. Verwendet man stattdessen die Vorsilbe „Arcus", so besteht nicht die Gefahr einer Verwechslung mit dem Kehrwert. Besonders kritisch ist das im Zusammenhang mit dem Cotangens: Es ist ja $\cot x = 1/\tan x = (\tan x)^{-1}$. Die Umkehrfunktion des Tangens aber ist $\arctan x$, vielleicht auch geschrieben als $\tan^{-1}$, und hat nichts mit dem Cotangens zu tun.

Die strenge Monotonie der Funktionen auf den angegebenen Intervallen lässt sich anhand der Funktionsgraphen jeweils leicht verifizieren. Für den Arcustangens gilt insbesondere

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}. \tag{5.43}$$

Die Graphen der Funktionen arcsin, arccos und arctan sind in den Abb. 5.6, 5.7 und 5.8 dargestellt. Und natürlich können auch hier anhand bekannter Werte für sin, cos und tan etliche Werte exakt angegeben werden, z. B.

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

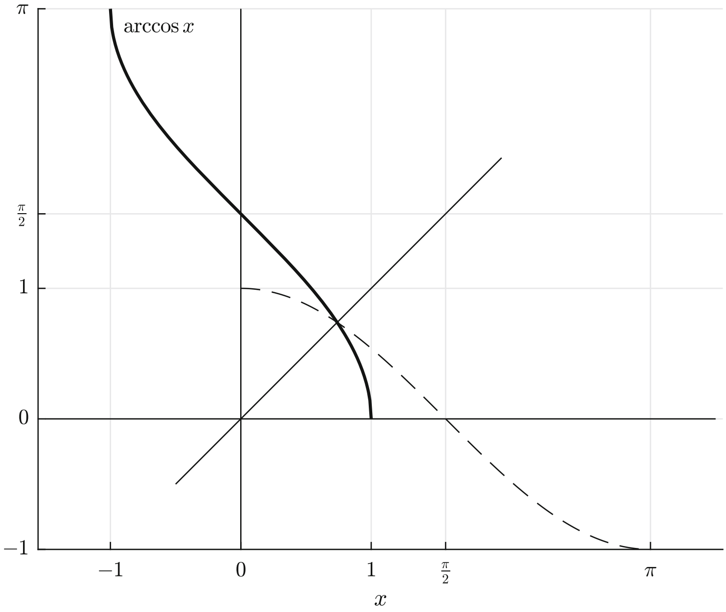

Abb. 5.7 Die Funktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ist die Umkehrfunktion der eingeschränken Cosinusfunktion $\cos|[0, \pi]$

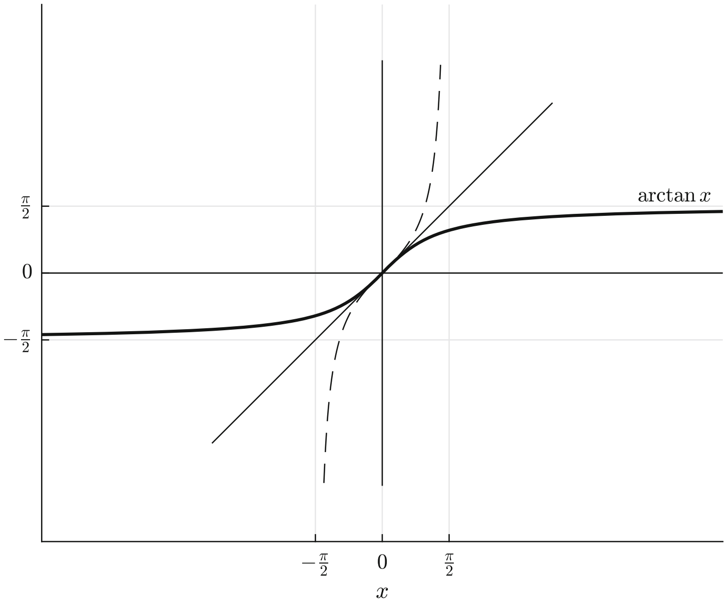

Abb. 5.8 Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ ist die Umkehrfunktion der eingeschränken Tangensfunktion $\tan|]-\pi/2, \pi/2[$. Für $x \to \pm\infty$ strebt der Arcustangens gegen die Grenzwerte $\pm\pi/2$

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden in Anwendungen naturgemäß oftmals dazu verwendet, Winkel zu berechnen. *Dabei ist grundsätzlich zu beachten, dass dies aufgrund der Einschränkung der Arcusfunktionen zu Mehrdeutigkeiten führen kann.* So ist z. B.

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \text{aber} \qquad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \tag{5.44}$$

Es ist also im Einzelfall und anhand der vorliegenden Fragestellung zu prüfen, welcher Winkel tatsächlich gesucht wird. Zum Beispiel kann es sein, wie hier, dass man mit den Arcusfunktionen statt eines gesuchten Winkels α den Komplementärwinkel $\pi - \alpha$ erhält.

Das Wichtigste in Kürze

- Winkel können mit verschiedenen Maßen angegeben werden. Beim **Bogenmaß** wird der Vollwinkel durch 2π wiedergegeben, in Grad entspricht er $360°$. Das Bogenmaß ist das in der Mathematik gebräuchliche Maß.
- Beim **Einheitskreis** handelt es sich um einen Kreis mit dem Radius Eins im Zentrum eines kartesischen Koordinatensystems. Aus dem Ursprung kommt unter einem bestimmten Winkel mit der Rechtsachse ein Strahl, der den Einheitskreis schneidet. Auf diese Weise entstehen Streckenstücke, die dem **Sinus** und dem **Cosinus** des Winkels entsprechen.
- Für verschiedene Winkel können die **Sinus- und Cosinuswerte** aufgrund geometrischer Überlegungen am Einheitskreis leicht angegeben werden. Darüber hinaus ist eine numerische Berechnung mit Hilfe der Reihenentwicklungen ohne Weiteres möglich.
- Sinus und Cosinus sind **periodische** Funktionen. Der Sinus ist **ungerade**, der Cosinus **gerade**. Für sie gelten die **Reduktionsformeln**, der **trigonometrische Pythagoras** und die **Additionstheoreme**.
- Sinus und Cosinus entsprechen Streckenverhältnissen in **rechtwinkligen** Dreiecken. In **beliebigen** Dreiecken können der **Sinussatz** und der **Cosinussatz** verwendet werden.
- Der **Tangens** entspricht einem Streckenstück auf einer Tangente an den Einheitskreis. Auch er ist eine periodische Funktion, und auch er erfüllt ein Additionstheorem.
- Die Winkelfunktionen können so eingeschränkt werden, dass bijektive Funktionen entstehen. Die Umkehrung dieser Funktionen ergibt die **Arcusfunktionen**. Zu beachten ist, dass die Winkelargumente jeweils nur in einem bestimmten Bereich wiedergegeben werden.

Und was bedeuten die Formeln?

$$x_{\text{Bogenmaß}} = \frac{b}{r}, \quad \frac{x_{\text{Bogenmaß}}}{2\pi} = \frac{x_{\text{Grad}}}{360^\circ} = \frac{x_{\text{Neugrad}}}{400\,\text{gon}},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2},$$

$$\cot x \neq \arctan x, \quad \arctan 1 = \pi/4.$$

Übungsaufgaben

A5.1 Beantworte zur Erinnerung die folgenden Fragen: Was ist ein gleichseitiges Dreieck? Was ist ein rechtwinkliges Dreieck? Was ist der Thales-Kreis? Was ist ein gleichschenkliges Dreieck? Wo liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks? Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks?

A5.2 Ein Array von Radioteleskopen besitze eine Winkelauflösung von $0{,}001''$. Welcher lateralen Streckenauflösung entspricht dies im etwa 26 000 Lichtjahre entfernten Zentrum der Milchstraße? (Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000\,\text{km/s}$)

A5.3 An welchen Stellen zwischen 0 und 4π weist der Sinus den Wert $1/2$ auf? Und wo ist der Cosinus gleich $-\sqrt{3}/2$?

A5.4

a) Zwei Seiten eines Dreiecks mit den Längen 6 cm bzw. 2 cm schließen einen Winkel von 60° ein. Wie lang ist die dritte Seite?

b) Die Seitenlängen eines Dreiecks betragen $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$. Welche Innenwinkel besitzt das Dreieck?

A5.5 Zeige die Gültigkeit folgender Formeln:

$$(1)\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(2)\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x))$$

$$(3)\ \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$(4)\ \cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$(5)\ \tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}.$$

A5.6 Wir wir wissen, ist $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, und es ist auch $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Und umgekehrt? Ist $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ auch richtig?

A5.7 Man sagt, es sei $\arctan\infty = \frac{\pi}{2}$. Was bedeutet das genau, und warum ist das so? Und ist in diesem Sinn auch $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$?

A5.8 Begründe, dass gilt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

6 Differenziation

Wir kommen nun zu dem Begriff der Ableitung einer Funktion, dem wahrscheinlich wichtigsten Begriff der gesamten Analysis. Die Ableitung einer Funktion entspricht der Steigung ihres Graphen und gibt damit die Änderungsrate der Funktion an. Sie besitzt daher eine Vielzahl von theoretischen und praktischen Anwendungen.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Die Ableitung ist ein bestimmter Grenzwert. Wir werden sehen, welcher. Und wir lernen seine geometrische Bedeutung kennen.
- Etliche Grundfunktionen können über die Ermittlung des Grenzwerts abgeleitet werden. Und auch ihre Umkehrfunktionen haben wir dann im Griff.
- „Differenzierbar" bedeutet „linear approximierbar". Wir wollen sehen, was es damit auf sich hat. Und sind dann auch gleich bei der Tangentengleichung.
- Das Ableiten findet in Anwendungen in der Regel nicht elementar über den Grenzwert, sondern unter Verwendung diverser Ableitungsregeln statt. Wir müssen sie kennenlernen und anwenden können.
- Man kann eine Funktion nicht nur einmal ableiten, sondern auch mehrfach. Was das genau heißt und wie man das aufschreibt, müssen wir uns ansehen.
- Eine wichtige Anwendung der Ableitung ist die Suche nach lokalen Extrema. Wir werden sehen, wie das geht.
- Differenzierbare Funktionen erfüllen den Mittelwertsatz. Seine Aussage ist einfach und wichtig zugleich.
- Der Satz von l'Hospital erlaubt es, etliche Grenzwerte, die wir schon kennen, auf einfachere Weise zu berechnen. Deswegen wollen wir unbedingt wissen, wie das geht.

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_6

6.1 Definition der Ableitung

Die „Steigung“ einer Gerade $y = y(x)$ ist ein wohlbekannter Begriff. Sie ergibt sich aus dem Steigungsdreieck zu $m = \Delta y/\Delta x$. Aber auch für gekrümmte Funktionsgraphen kann man von einer Steigung reden, die sich dann allerdings von Punkt zu Punkt ändert. Man spricht von der „Ableitung“ der Funktion. Sie ist ein spezieller Grenzwert:

Definition 6.1 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt im Punkt $x \in I$* differenzierbar*, falls der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Bei den Grenzwerten ist dabei natürlich $w = x + h \in I$ vorauszusetzen.

Der Grenzwert $f'(x)$ heißt die Ableitung *von f im Punkt x. Die Funktion f heißt* differenzierbar*, falls f in jedem Punkt von I differenzierbar ist.*

Den Ausdruck $\frac{f(w)-f(x)}{w-x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x)$ nennt man den *Differenzenquotienten* von f, und seinen Grenzwert, also die Ableitung, bezeichnet man als *Differenzialquotienten*. Dabei sind folgende Schreibweisen üblich:[1]

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x). \tag{6.1}$$

Lesehilfe
Für $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sagt man „$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$“, analog für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ „d nach $\mathrm{d}x$“. Und das $\mathrm{d}x$ ist so etwas wie das „unendlich kleine Δx“, das aber trotzdem nicht Null ist.

Die Schreibweise mit den *Differenzialen* $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ ist oftmals sehr praktisch; man hat jedoch darauf zu achten, dass es sich dabei nicht um „normale“ Terme handelt, sondern sämtliche Operationen mit diesen Ausdrücken zunächst einmal nur im Sinn des obigen Grenzwerts ausgeführt werden dürfen. Den Ausdruck $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ nennt man den *Differenzialoperator*: Er besagt, dass die hinter ihm stehende Funktion abgeleitet werden soll.

Geometrische Bedeutung
Der Differenzenquotient entspricht der Steigung der *Sekante* des Graphen von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(w, f(w))$. Mit dem Grenzübergang $w \to x$ geht die Sekante über in die *Tangente* an den Graphen im Punkt $(x, f(x))$, siehe Abb. 6.1.

[1] Das „x“ tritt hier streng genommen in zwei unterschiedlichen Bedeutungen auf: einerseits als die Variable der Funktion und andererseits als die Stelle, an der die Ableitung vorgenommen wird. Wir wollen hier dennoch darauf verzichten, die Stelle mit einem anderen Symbol, etwa x_0, zu bezeichnen.

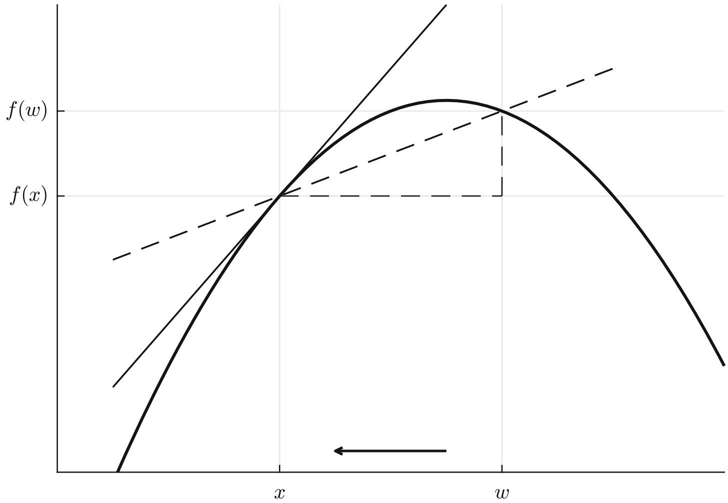

Abb. 6.1 Eine Sekante an den Graphen der Funktion f wird festgelegt durch die zwei Punkte $(x, f(x))$ und $(w, f(w))$. Der Differenzenquotient $\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ entspricht der Steigung dieser Sekante. Beim Grenzübergang $w \to x$ geht die Sekante über in die Tangente an den Graphen im Punkt $(x, f(x))$, und die Ableitung $f'(x) = \lim_{w\to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ gibt die Steigung dieser Tangente an

Die Ableitung $f'(x)$ gibt somit die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ an.

Mit der Steigung $m = f'(x)$ lässt sich natürlich auch der Winkel α angeben, den die Tangente mit der x-Achse einschließt, denn es ist

$$m = \tan\alpha. \tag{6.2}$$

► **Zwischenfrage (1)** Warum gilt für die Steigung der Tangente $m = \tan\alpha$?

Lesehilfe
Man mache sich noch einmal klar, dass die Ableitung nur über einen Grenzwertprozess zu realisieren ist. Denn wie ermittelt man die Steigung eines gekrümmten Graphen, etwa einer Parabel? Über die Tangente in dem Punkt, könnte man antworten. Und wie bekommt man aber die Tangente hin? Präzise wohl nur über einen Sekantengrenzwertprozess wie in Definition 6.1.

6.2 Ableitung einiger Grundfunktionen

Wir bestimmen die Ableitung einiger Grundfunktionen anhand ihrer Differenzialquotienten:
(1) Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$, erhält man die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Lesehilfe
Bei einer linearen Funktion erhält man als Ableitung also ihre „normale" Steigung. Und das muss natürlich auch so sein.

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, warum $m = \tan\alpha$ gilt. Betrachte ein Steigungsdreieck an der Tangente. Für seine Katheten Δx und Δy gilt $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit dem Winkel α zwischen der (Parallelen zur) x-Achse und der Tangente.

(2) Die Quadratfunktion mit $f(x) = x^2$ ergibt die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Ableitung einer beliebigen Potenzfunktion $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit dem Differenzialquotienten durchführen.

Lesehilfe
Der Differenzenquotient ergibt für $h = 0$ zunächst immer $0/0$. Es ist stets eine Umformung, ein „Trick" notwendig, um dieses Problem zu beheben.

► **Zwischenfrage (2)** Was ergibt der Differenzialquotient für $f : x \mapsto x^n$ und ein beliebiges $n \geq 2$? Und wieso ist dabei der binomische Lehrsatz bzw. das Pascal-Dreieck von Bedeutung?

(3) Für die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, erhält man den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{(x+h)x} \xrightarrow{h\to 0} -\frac{1}{x^2}, \quad (6.5)$$

also $(1/x)' = -1/x^2$. Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Ableitung einer beliebigen Funktion $x \mapsto 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, erhalten.
(4) Zur Ermittlung der Ableitung der Exponentialfunktion ist etwas größerer Aufwand nötig: Zunächst ist

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}}_{g}.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass der verbleibende Grenzwert $g = 1$ ist, dass also gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1. \quad (6.6)$$

Dazu verwenden wir die Restgliedabschätzung für die Exponentialreihe, siehe Satz 3.6, mit $n = 1$:

$$\exp(x) = 1 + x + R_2(x) \qquad \text{mit } |R_2(x)| \le 2|x|^2/2 = |x|^2 \text{ für } |x| \le 3/2.$$

Es ist also

$$\exp(x) - (1+x) = R_2(x)$$

und die Restgliedabschätzung besagt somit

$$|\exp(x) - (1+x)| = |R_2(x)| \le |x|^2$$

für x mit hinreichend kleinem $|x|$. Teilen durch $|x|$ ergibt nun

$$\frac{|\exp(x) - (1+x)|}{|x|} = \left|\frac{\exp(x)-1-x}{x}\right| = \left|\underbrace{\frac{\exp(x)-1}{x}}_{\tilde{g}} - 1\right| \le |x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Da der Ausdruck $\tilde{g}$ somit gegen 0 konvergiert, ist der Nachweis für den Grenzwert (6.6) erbracht. In Summe haben wir das wichtige Ergebnis:

Die Ableitung der Exponentialfunktion exp *ergibt wieder die Exponentialfunktion* exp,

$$\exp'(x) = \exp(x) \qquad \textit{bzw.} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x. \quad (6.7)$$

(5) Als weitere wichtige Grundfunktion betrachten wir den Sinus. Dazu erinnern wir zunächst an (5.27):

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \\ &= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)}_{=\cos x}\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)}_{=:k}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Lesehilfe
Es ist hier also $\alpha = x + h$ und $\beta = x$. Wie so oft in Herleitungen oder Beweisen: Warum dieses Vorgehen etwas bringt, sieht man erst im Nachhinein. Von alleine hat man solche Ideen allenfalls, wenn man sich lange mit dem Problem auseinandersetzt und schon manches andere erfolglos probiert hat.

Wir zeigen nun mit Hilfe einer geometrischen Überlegung, dass der verbleibende Grenzwert

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{6.9}$$

ist: Wir betrachten einen kleinen Winkel x am Einheitskreis und die zugehörigen Strecken $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$. Das Dreieck mit den Katheten $\sin x$ und $\cos x$ schließt die Fläche $\frac{1}{2}\sin x\cos x$ ein, und das Dreieck mit den Katheten 1 und $\tan x$ die Fläche $\frac{1}{2}\tan x$. Von diesen zwei Dreiecken eingeschlossen wird der Kreissektor mit der Fläche

$$\frac{x}{2\pi}\cdot\text{Fläche des Vollkreises} = \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{x}{2}.$$

Lesehilfe
Rechtwinklige Dreiecke besitzen offenbar als Flächeninhalt das Produkt ihrer Kathetenlängen geteilt durch 2. Und ein Kreissektor besitzt den Anteil an der gesamten Kreisfläche, den sein Öffnungswinkel an 2π hat.

Dies ergibt die Relation

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\tan x$$

bzw. nach Multiplikation mit $2/\sin x$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Nun ist $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ und damit auch $\lim_{x\to 0}(1/\cos x) = 1$, so dass für den zwischen diesen Termen eingeschlossenen Ausdruck auch $\lim_{x\to 0}(x/\sin x) = 1$ gelten muss. Daraus folgt (6.9). •

In Summe halten wir fest:

Die Ableitung des Sinus ist der Cosinus,

$$\sin' x = \cos x. \tag{6.10}$$

Es ist also insbesondere $\sin' 0 = 1$, d. h., der Sinus steigt im Ursprung mit der Steigung 1 an.

Der Cosinus ist um $\pi/2$ gegen den Sinus verschoben. Daher macht man sich leicht klar, dass gilt

$$\cos' x = -\sin x. \tag{6.11}$$

(6) Natürlich sind nicht alle Funktionen überall differenzierbar. Ein Beispiel dafür ist die Betragsfunktion, siehe (3.5), an der Stelle 0. Die „rechtsseitige" Ableitung, bei der man sich der Stelle 0 von rechts nähert, ergibt den Wert 1, die „linksseitige" hingegen den Wert -1. Die Ableitung ist daher an der Stelle 0 nicht definiert.

Im Nachgang zum Beispiel der Betragsfunktion halten wir noch einmal allgemein fest:

Weist ein Funktionsgraph einen „Knick" auf, so ist die Funktion an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Ein „Knick" ist aber nicht das einzige mögliche Problem im Hinblick auf die Differenzierbarkeit einer stetigen Funktion: Es kann auch passieren, dass ein Funktionsgraph eine vertikale Tangente besitzt, so wie es bei der Wurzelfunktion bei Null auftritt. Auch an einer solchen Stelle ist eine Funktion nicht differenzierbar.

Für das praktische Ableiten von Funktionen, wie sie etwa in Anwendungen auftauchen, wird man übrigens nicht (wieder) auf die elementare Ebene des Differenzialquotienten hinabsteigen. Vielmehr merkt man sich die Ableitungen der Grundfunktionen, und kompliziertere, zusammengesetzte Funktionen leitet man dann unter Zuhilfenahme von verschiedenen Differenziationsregeln ab, die wir noch kennenlernen werden.

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Es sollte der Differenzialquotient für $f : x \mapsto x^n$ ausgewertet werden.

Für $f : x \mapsto x^n$ und $n \geq 2$ haben wir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Für den Ausdruck $(x+h)^n$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz 3.4

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots,$$

wobei die durch die Pünktchen angedeuteten restlichen Terme immer höhere Potenzen von h enthalten. Dabei ist $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$, wie es sich etwa auch aus dem Pascal-Dreieck ergibt. Wir haben also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nhx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots}{h} = \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots \right]. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, die Terme anstelle der Pünktchen enthalten allesamt höhere Potenzen von h. Für $h \to 0$ erhalten wir daher

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots \right] = nx^{n-1}, \quad \text{also } (x^n)' = nx^{n-1}.$$

6.2.1 Numerische Differenziation

Natürlich kann eine Funktion f auch leicht „numerisch" abgeleitet werden: Man nähert dazu die Tangentensteigung im Punkt x durch eine Sekantensteigung an, verwendet also statt des Differenzialquotienten den Differenzenquotienten mit einem kleinen, aber endlichen h:

$$f'(x) \approx m_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{6.12}$$

Betrachten wir als Beispiel die Cosinusfunktion $x \mapsto \cos x$ bei $x = \pi/6$. Mit kleiner werdendem h erhalten wir

$$\begin{aligned} m_{0,1}(\pi/6) &= \frac{\cos(\pi/6 + 0{,}1) - \cos(\pi/6)}{0{,}1} = -0{,}5424, \\ m_{0,01}(\pi/6) &= \frac{\cos(\pi/6 + 0{,}01) - \cos(\pi/6)}{0{,}01} = -0{,}5043, \\ m_{0,001}(\pi/6) &= \frac{\cos(\pi/6 + 0{,}001) - \cos(\pi/6)}{0{,}001} = -0{,}5004. \end{aligned}$$

Der exakte Wert ist $\cos'(\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Auch bei komplizierten Funktionen ist das numerische Ableiten problemlos möglich, und insbesondere auch bei Funktionen, die nur numerisch existieren, bei denen also etwa nur in 1 000stel-Schritten überhaupt Funktionswerte vorliegen.

6.2.2 Ableitung der Umkehrfunktion

Mit einer (umkehrbaren) Funktion f ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} eindeutig festgelegt. Insbesondere ergibt sich der Graph der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen von f an der Achse $y = x$. Damit ist klar, dass es einen

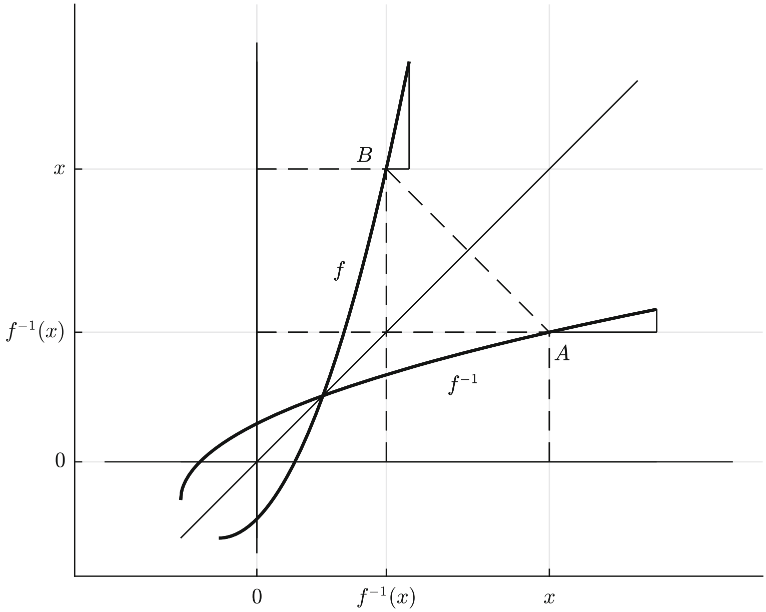

Abb. 6.2 Die Graphen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} gehen durch Spiegelung an der Achse $y = x$ auseinander hervor. Dem Punkt $A = (x, f^{-1}(x))$ auf dem Graphen von f^{-1} entspricht der Punkt $B = (f^{-1}(x), x)$ auf dem Graphen von f. Die Steigungen in den Punkten A und B sind Kehrwerte voneinander, da die Katheten in einem gedachten Steigungsdreieck ihre Rollen tauschen

unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Ableitungen von f und f^{-1} geben muss:

Satz 6.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion mit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$. Ist f in $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

► **Zwischenfrage (3)** Warum wird in Satz 6.1 $f'(x) \neq 0$ vorausgesetzt?

Beweis Anstelle eines vollständigen formalen Beweises begründen wir die Formel

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{6.13}$$

(hier ist nur der Buchstabe y durch x ersetzt worden) geometrisch, siehe Abb. 6.2:

Wir betrachten die Graphen von f und f^{-1}. Die Punkte $A = (x, f^{-1}(x))$ auf dem Graphen von f^{-1} und $B = (f^{-1}(x), x)$ auf dem Graphen von f gehen durch Spiegelung an der Achse $y = x$ auseinander hervor. Die Steigungen in beiden Punkten sind daher Kehrwerte voneinander, da unter der Spiegelung die Katheten in einem gedachten Steigungsdreieck ihre Rollen tauschen. Es ist also

$$\text{Steigung in } A = \frac{1}{\text{Steigung in } B}, \qquad \text{d. h. } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Siehe aber auch Beispiel (5) in Abschn. 6.4.3 für einen alternativen Beweis. •

Beispiele

(1) Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Also ist nach (6.13)

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}. \tag{6.14}$$

Lesehilfe

Die Funktionen $x \mapsto \ln x$ und $x \mapsto 1/x$ haben auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun. Es ist daher bemerkenswert, dass gilt $(\ln x)' = 1/x$, und wir werden dieser Ableitung noch oft begegnen.

Übrigens ist $(\ln x)' = \ln' x$, weil hier nur das Argument x steht. Aber Vorsicht: $(\ln(2x))'$ und $\ln'(2x)$ beispielsweise sind nicht dasselbe; $(\ln(2x))'$ steht für die Ableitung der Funktion $x \mapsto \ln(2x)$, die wir noch nicht kennen, und $\ln'(2x)$ ist die Ableitung der ln-Funktion an der Stelle $2x$, also $\ln'(2x) = 1/(2x)$.

(2) Die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Es ist $\sin'(\pm\frac{\pi}{2}) = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, und für $x \in\,]-1, 1[$ gilt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen: Nach dem trigonometrischen Pythagoras, siehe (5.14), ist $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, also $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$, so dass wir erhalten

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6.15}$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war, warum im Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion $f'(x) \neq 0$ vorausgesetzt wird.
Die Einschränkung $f'(x) \neq 0$ bei der Formulierung von Satz 6.1 ist notwendig, weil eine horizontale Tangente an f in der Umkehrfunktion f^{-1} zu einer vertikalen Tangente führt, deren Steigung nicht definiert ist.

6.2.3 Alternative Darstellung der Euler-Zahl

Mit der Ableitung des Logarithmus lässt sich die folgende Darstellung für die Euler-Zahl e beweisen:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{6.16}$$

Dazu schreiben wir das Argument des Grenzwerts zunächst anders auf:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[\exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right]^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Lesehilfe
Anders ausgedrückt steht hier: $a^n = (\mathrm{e}^{\ln a})^n = \mathrm{e}^{n\ln a}$ mit $a = 1+\frac{1}{n}$.

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion $(*)$ ist daher

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \overset{(*)}{=} \exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

Ist der verbleibende Grenzwert gleich 1, so erhalten wir (6.16). Dies folgt nun aus $\ln'(1) = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \overbrace{\ln 1}^{=0}}{\frac{1}{n}} = 1;$$

wir haben im Zähler ln 1 hinzugefügt, um zu erkennen, dass wir den Differenzialquotienten des ln an der Stelle 1 vor uns haben, wobei das „h“ hier durch „$\frac{1}{n}$“ dargestellt wird. Der Grenzwert $n\to\infty$ entspricht somit $h\to 0$. •

Diese alternative Darstellung von e ist bemerkenswert. Im Grenzwert (6.16) laufen zwei konkurrierende Prozesse ab: Die Basis $(1+\frac{1}{n})$ wird für $n\to\infty$ immer kleiner und nähert sich der Eins an, was den Gesamtwert tendenziell verkleinert. Gleichzeitig wird aber der Exponent n immer größer, was bei einer Basis größer 1 den Gesamtwert vergrößert. Und wir haben soeben bewiesen, dass sich diese beiden Prozesse im Ergebnis so ergänzen, dass sich insgesamt die Zahl $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \approx 2{,}71828$ ergibt.

6.3 Lineare Approximierbarkeit

Ist eine Funktion an einer Stelle a ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so hat man dort eine eindeutige Tangentensteigung und damit auch eine eindeutige Tangente. Mit dieser Tangente kann die Funktion *lokal*, d. h. in der Nähe der Stelle a, *linear approximiert*[2] werden.

[2] „Approximieren“ stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „annähern“.

Tatsächlich ist die Differenzierbarkeit einer Funkion in einem Punkt sogar äquivalent mit der linearen Approximierbarkeit:

Satz 6.2 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Intervall und $a \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn es eine Konstante c gibt mit*

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x),$$

wobei für die Funktion φ gilt $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$. Es ist dann $c = f'(a)$.

Beweis „$\Rightarrow$" Es sei f in a differenzierbar und $c := f'(a)$. Wir definieren die Funktion φ durch $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x)$. Das Auflösen dieser Gleichung ergibt

$$\frac{\varphi(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a). \tag{6.17}$$

Der Bruch auf der rechten Seite ist nichts anderes als der Differenzenquotient von f an der Stelle a, und demnach gilt $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = f'(a) - f'(a) = 0$.

„$\Leftarrow$" Es gebe für f eine Darstellung $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)$ mit $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$. Dann gilt, analog zu (6.17),

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c\right) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0,$$

also $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$, d. h., f ist in a differenzierbar und $c = f'(a)$. •

Die Funktion φ aus Satz 6.2 gibt also den Fehler an, den man macht, wenn man statt mit der Funktion f selbst mit der *linearen Näherung*

$$t[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{6.18}$$

rechnet. Diese Näherung ist nichts anderes als die Gleichung der *Tangente an den Graphen von f in der Stelle a*: In (6.18) erkennt man die Punktrichtungsform einer Gerade, die mit der Steigung $m = f'(a)$ durch den Punkt $(a, f(a))$ geht. *Bei der Tangente handelt es sich um die Gerade, die sich bei a bestmöglich an den Graphen von f anschmiegt.* In der „Nähe von a" gilt also

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a). \tag{6.19}$$

In der Regel wird diese Näherung umso schlechter, je weiter man sich von a entfernt.

► **Zwischenfrage (4)** Was ist die Punktrichtungsform einer Gerade? Und wenn wir schon dabei sind: Wie lautet die Zweipunkteform einer Gerade, d. h., wie lautet die Gleichung der Gerade, die durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht? Und welche Steigung hat diese Gerade?

6.3.1 Beispiel: Lineare Näherung für Sinus und Cosinus

Wir wollen den Sinus näherungsweise für kleine Winkel x betrachten. Dazu verwenden wir die lineare Näherung um den Punkt $a = 0$. Sie lautet

$$t[\sin, 0](x) = \sin 0 + \sin'(0)(x - 0) = 0 + \cos 0 \cdot x = x. \tag{6.20}$$

Es ist also

$$\sin x \approx x \qquad \text{für „kleine" Winkel } x. \tag{6.21}$$

Lesehilfe
Natürlich bezieht sich diese Aussage auf Winkel im Bogenmaß. Die Gleichung $\sin 5° \approx 5°$ etwa ergäbe gar keinen Sinn.

So ist z. B.

$$\sin 0{,}1 = 0{,}0998, \quad \sin 0{,}2 = 0{,}1986, \quad \sin 0{,}5 = 0{,}4794, \quad \sin 1 = 0{,}8415.$$

Die Näherung wird also umso schlechter, je weiter man sich mit x von 0 entfernt. In der Praxis sieht man diese Näherung in der Regel bis Winkel von 10° als hinreichend genau an, also für $x \leq 0{,}175\,\text{rad}$.

Der Cosinus besitzt bei 0 den Wert 1 und die Steigung 0. Daher gilt in der linearen Näherung

$$\cos x \approx 1 \tag{6.22}$$

für „kleine" Winkel x. Auch hier einige Zahlbeispiele:

$$\cos 0{,}1 = 0{,}9950, \quad \cos 0{,}2 = 0{,}9801, \quad \cos 0{,}5 = 0{,}8776, \quad \cos 1 = 0{,}5403.$$

Diese linearen Näherungen des Sinus und Cosinus für kleine Winkel werden beispielsweise in der so genannten *Gauß-Näherung* der geometrischen Optik verwendet. In dieser Näherung beschränkt man sich auf die Betrachtung von Lichtstrahlen, die dicht an der optischen Achse verlaufen und nur kleine Winkel mit ihr einschließen. Ist α ein solcher Winkel, so verwendet man in theoretischen Herleitungen also die Näherungen $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$ und $\tan\alpha \approx \alpha$. Und nur unter dieser Voraussetzung ergeben sich die bekannten einfachen Eigenschaften, etwa die Tatsache, dass sich ein achsparallel einfallendes Lichtbündel nach Durchgang durch eine sphärische Sammellinse in einem Brennpunkt trifft.

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war nach der Punktrichtungsform und der Zweipunkteform einer Gerade.

Die Punktrichtungsform einer Gerade mit der Steigung m durch einen Punkt (x_1, y_1) lautet

$$y = y_1 + m(x - x_1). \tag{6.23}$$

Diese Gerade besitzt offenbar die Steigung m, und es ist $y(x_1) = y_1$.
Nun zur Zweipunkteform: Die Steigung der gesuchten Gerade ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Da die Steigung einer Gerade konstant ist, muss daher auch für jeden beliebigen weiteren Punkt (x, y) der Gerade gelten:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad \text{d. h.} \quad y = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Dies bezeichnet man als die Zweipunkteform der Gerade. Ihre Steigung ist natürlich $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

6.3.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist eine Funktion f an einer Stelle a linear approximierbar, besitzt sie also eine Tangente, die sich für $x \to a$ beliebig genau an den Graphen von f anschmiegt, so muss sie dort offenbar stetig sein. Das heißt:

Satz 6.3 *Ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, so ist sie in a auch stetig.*

Beweis Da f in a differenzierbar ist, gibt es nach Satz 6.2 eine Darstellung $f(x) = f(a) + c(x - a) + \varphi(x)$ von f. Mit $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$ gilt erst recht $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$. Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + \lim_{x \to a} (c(x - a)) + \lim_{x \to a} \varphi(x) = f(a),$$

also die Stetigkeit von f in a. •

Die Differenzierbarkeit ist also die stärkere Eigenschaft, sie schließt die Stetigkeit mit ein. Umgekehrt kann jedoch eine Funktion stetig, aber nicht differenzierbar sein, wie man etwa am Beispiel der Betragsfunktion bei Null sieht: Ein „Knick ist stetig, aber nicht differenzierbar“.

6.4 Ableitung zusammengesetzter Funktionen

Wir haben in Abschn. 6.2 die Ableitung einiger Grundfunktionen anhand des Differenzialquotienten oder über ihre Umkehrfunktion durchgeführt. Das Ableiten weitergehender zusammengesetzter Funktionen erfolgt mit Hilfe verschiedener Differenziationsregeln, die wir uns nun ansehen wollen.

6.4.1 Linearität

Zunächst halten wir fest, dass die Ableitung *linear* ist. Dies bedeutet:

Satz 6.4 *Die zwei Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien in $x \in I$ differenzierbar, und $c \in \mathbb{R}$ sei eine Zahl. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und cf in x differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \tag{6.24}$$

$$(cf)'(x) = cf'(x). \tag{6.25}$$

Beweis Wir ermitteln die Ableitungen mit dem Differenzialquotienten:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[(f+g)(x+h) - (f+g)(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[g(x+h) - g(x)\right] \\
&= f'(x) + g'(x). \\
(cf)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[(cf)(x+h) - (cf)(x)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[cf(x+h) - cf(x)\right] \\
&= c \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] = cf'(x).
\end{aligned}$$

•

Man erkennt, dass die Ableitung mit den *linearen Operationen* der Addition und der Multiplikation mit einer Zahl *vertauscht* werden kann, dass es also egal ist, ob man zuerst ableitet und anschließend addiert oder mit einer Zahl multipliziert oder in umgekehrter Reihenfolge vorgeht.

Schließlich ein Beispiel für die Anwendung dieser Regel:

$$(3\mathrm{e}^x - \cos x)' = 3\,(\mathrm{e}^x)' - (\cos x)' = 3\mathrm{e}^x + \sin x.$$

6.4.2 Produkt- und Quotientenregel

Werden Funktionen miteinander multipliziert oder durcheinander geteilt, so gilt für ihre Ableitungen

Satz 6.5 *Die zwei Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien in $x \in I$ differenzierbar. Dann ist die Funktion fg und für $g(x) \neq 0$ auch die Funktion f/g in x differenzierbar und es gilt:*

(1) Produktregel:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{6.26}$$

(2) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{6.27}$$

Beweis

(1) Der Differenzialquotient ergibt

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{=0} \\ &\quad - f(x)g(x)\Big] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)\right] \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).\end{aligned}$$

Lesehilfe zum Beweis

Der „Trick“ für den Nachweis der Produktregel besteht also darin, geschickt eine Null hinzuzufügen, so dass sich die zwei Differenzialquotienten für g und f ergeben.

(2) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f = 1$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(-\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich jetzt mit der Produktregel der allgemeine Fall:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

•

Lesehilfe
Produkt- und Quotientenregel werden oft auch mit u und v als Funktionsbezeichnungen formuliert, also als

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Die Produktregel kann übrigens ohne Weiteres auf mehr als zwei Faktoren verallgemeinert werden. So zeigt man beispielsweise leicht, dass für drei differenzierbare Funktionen f, g, h gilt

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'. \tag{6.28}$$

► **Zwischenfrage (5)** Wie zeigt man $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$?

Beispiele
(1) Wir haben bereits gesehen, wie sich die Ableitung von x^2 mit Hilfe des Differenzenquotienten ermitteln lässt, siehe (6.4).

Mit Hilfe der Produktregel können die Ableitungen der Potenzen x^n, $n \in \mathbb{N}^*$, ebenfalls berechnet werden. So ist

$$\begin{aligned}(x^2)' &= (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x,\\ (x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \qquad \text{usw.}\end{aligned}$$

In Verallgemeinerung dieser Beispiele kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{6.29}$$

Induktionsanfang $n = 1$: $(x^1)' = x' = 1$, $1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' \overset{\text{IV}}{=} nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n. \qquad \bullet$$

(2) In Erweiterung des obigen Beispiels betrachten wir nun negative Exponenten, also die Hyperbeln $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-m} = 1/x^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Ihre Ableitung ergibt sich aus der Quotientenregel:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Zusammen mit (6.29) haben wir also

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ (mit } x \neq 0 \text{ für } n < 0). \tag{6.30}$$

(3) Es ist

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Außerdem gilt $1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$, so dass die Ableitung des Tangens auf zwei Arten geschrieben werden kann:

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \tag{6.31}$$

Mit der Ableitung des Tangens ist natürlich auch die Ableitung des Arcustangens bekannt: Satz 6.1 ergibt hier

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}. \tag{6.32}$$

Nur die „zweite" Form der Ableitung des Tangens in (6.31) erlaubt hier die vernünftige Vereinfachung des Ergebnisses.
(4) Es ist
$$\left(\frac{3\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}\right)' = 3\frac{(\mathrm{e}^x)'(x^2 + 1) - \mathrm{e}^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 3\mathrm{e}^x \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war der Nachweis der Produktregel für drei Faktoren.
Wir verwenden zweimal die Produktregel:

$$(fgh)' = ((fg)h)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh'$$
$$= f'gh + fg'h + fgh'.$$

6.4.3 Kettenregel

Für die Ableitung verketteter Funktionen (siehe Definition 3.3) verwendet man die *Kettenregel*:

Satz 6.6 (Kettenregel) *Es seien $g : D \to \mathbb{R}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(D) \subseteq E$. Die Funktion g sei in $x \in D$ differenzierbar, und f sei in $y := g(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Lesehilfe
Zur Erinnerung: $(f \circ g)(x)$ ist nichts anderes als $f(g(x))$.

Beweis Es ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' &= \lim_{w \to x} \frac{f(g(w)) - f(g(x))}{w - x} \\ &= \lim_{w \to x} \frac{f(g(w)) - f(g(x))}{g(w) - g(x)} \frac{g(w) - g(x)}{w - x} \\ &= f'(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

In der Differenzialschreibweise entspricht das Vorgehen im Beweis der Kettenregel einfach einer Erweiterung mit dg:

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}g} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}. \tag{6.33}$$

Verbal lässt sich die Kettenregel ausdrücken als „*äußere Ableitung mal innere Ableitung*". Die Ableitung der äußeren Funktion f ist dabei an der Stelle $g(x)$ zu betrachten, und die Ableitung der inneren Funktion g an der Stelle x.

Beispiele
(1) Es ist $(\sin(kx + \varphi))' = \cos(kx + \varphi)k$. Die äußere Ableitung ist die Ableitung des Sinus; sie ergibt Cosinus. Und die innere Ableitung ist hier die Ableitung der linearen Funktion, und damit gleich k.
(2) Wir betrachten die allgemeinen *Potenzfunktionen* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^b$ mit beliebigem $b \in \mathbb{R}$ (vergleiche (6.30)). Mit $x^b = \exp(b \ln x)$ erhalten wir die Ableitung

$$(x^b)' = (\exp(b \ln x))' = \exp'(b \ln x) \cdot b \cdot \frac{1}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}.$$

Also: *Für beliebige $b \in \mathbb{R}$ gilt die Formel*

$$(x^b)' = bx^{b-1}. \tag{6.34}$$

Eine *Exponentialfunktion* $x \mapsto a^x$, $a > 0$, besitzt hingegen die Ableitung

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a. \tag{6.35}$$

Lesehilfe
Die Funktion $x \mapsto 2^x$ bitte niemals ableiten als $x2^{x-1}$, sondern unbedingt als $2^x \ln 2$.

(3) Mit (6.34) lassen sich insbesondere auch Wurzeln ableiten. Zum Beispiel

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{6.36}$$

also „Quadratwurzel abgeleitet ergibt Eins durch zweimal die Wurzel".

Für die dritte Wurzel erhält man

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \tag{6.37}$$

Bei diesen Wurzeln ist zu beachten, dass sie *an der Stelle Null nicht differenzierbar sind*, sondern dort eine unendlich große Steigung besitzen (siehe Abb. 4.3 und 4.4). Dies drückt sich in ihren Ableitungen dadurch aus, dass sie bei Null nicht definiert sind.

(4) Natürlich kann die Kettenregel bei mehrfach verketteten Funktionen auch mehrfach hintereinander angewendet werden. Als ein Beispiel für eine kompliziertere Ableitung berechnen wir

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1+\sin^2(kx)}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2(kx)}}\left(1+\sin^2(kx)\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2(kx)}}2\sin(kx)\,(\sin(kx))' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2(kx)}}2\sin(kx)\cos(kx)k = \frac{\sin(kx)\cos(kx)k}{\sqrt{1+\sin^2(kx)}}.\end{aligned}$$

Lesehilfe

Bei der (mehrfachen) Anwendung der Kettenregel kann es hilfreich sein, wie im obigen Beispiel die inneren Ableitungen zunächst als noch auszuführen stehen zu lassen. So kannst du dich schrittweise von außen nach innen durchhangeln.

(5) Der Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion, Satz 6.1, ergibt sich unmittelbar aus der Kettenregel. Leitet man die Definitionsgleichung für die Umkehrfunktion,

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

nach x ab, so erhält man aufgrund der Kettenregel

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = f'\left(f^{-1}(x)\right)(f^{-1})'(x) = 1$$

und damit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Zwischenstopp

Bevor wir fortfahren, wollen wir in diesem langen Kapitel einen kurzen Zwischenstopp einlegen. Dazu sehen wir uns das „Wichtigste in Kürze“ an, das wir bereits erarbeitet haben (dessen ungeachtet wird es am Ende des Kapitels noch einmal vollständig wiederholt):

- Bei der **Ableitung** einer Funktion handelt es sich um den Grenzwert des Differenzenquotienten. Sie gibt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion im betrachteten Punkt an.
- Nicht alle Funktionen sind differenzierbar. Insbesondere ist dafür erforderlich, dass der Graph der Funktion keinen Knick aufweist.
- Der Satz zur **Ableitung der Umkehrfunktion** erlaubt die Ableitung von Funktionen, die als Umkehrung einer Funktion mit bekannter Ableitung definiert sind.
- Eine differenzierbare Funktion ist **linear approximierbar**. Die lineare Näherung um einen Punkt ergibt sich aus der Tangente in diesem Punkt.
- Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit.
- Die Ableitung ist **linear**. Es gilt außerdem die **Produktregel**, die **Quotientenregel** und die **Kettenregel**.

Dazu haben wir zum Beispiel folgende Formeln kennengelernt:

$$\begin{aligned}
&f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}(x),\\
&(x^2)' = 2x, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad \sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x,\\
&(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \ln' x = \frac{1}{x}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2},\\
&f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a), \quad \sin x \approx x,\\
&(af(x)+bg(x))' = af'(x) + bg'(x), \quad (uv)' = u'v + uv',\\
&\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}, \quad (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x),\\
&\left(x^b\right)' = bx^{b-1}, \quad (a^x)' = a^x \ln a.
\end{aligned}$$

6.5 Höhere Ableitungen

Natürlich kann man auch die Ableitung einer Funktion erneut ableiten und so höhere Ableitungen bilden:

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf dem nicht-trivialen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls die Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) := f''(x) := (f')'(x) \quad \text{die } \textit{zweite Ableitung} \text{ von } f \text{ in } x.$$

Differenziert man die zweite Ableitung – natürlich immer sofern möglich –, so erhält man die dritte Ableitung usw. und schreitet so zu beliebigen höheren Ableitungen fort ($k \in \mathbb{N}^*$):

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x) := f^{(k)}(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x)\right).$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal differenzierbar* in I, wenn f in jedem $x \in I$ k-mal differenzierbar ist. Sie heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn darüber hinaus die k-te Ableitung stetig ist.

Lesehilfe
Die Bezeichung $f^{(k)}$, gesprochen „f oben k" bedeutet also, dass f k-mal abgeleitet wird. Beachte den Unterschied zur k-ten Potenz f^k, „f hoch k".

Unter der nullten Ableitung $f^{(0)}$ versteht man die Funktion f selbst. Denn die Funktion wird ja dann 0-mal abgeleitet.

► **Zwischenfrage (6)** Heißt „stetig differenzierbar" einfach „stetig und differenzierbar"?

Beispiele

(1) Für $f(x) = \sin x$ ist

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f''(x) = f^{(2)}(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f''''(x) = f^{(4)}(x) = \sin x,$$

der Sinus reproduziert sich also nach 4-maliger Ableitung.

(2) Wir leiten die Potenzen p_n mit $p_n(x) := (x-a)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, ab. Für die ersten n Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= n(x-a)^{n-1}, \\ p_n''(x) &= n(n-1)(x-a)^{n-2}, \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n!(x-a)^0 = n!. \end{aligned}$$

Sämtliche höheren Ableitungen verschwinden,

$$p_n^{(n+1)}(x) = 0 = p_n^{(n+2)}(x) = \dots$$

Das heißt insbesondere, dass für die Stelle $x = a$ gilt

$$p_n^{(k)}(a) = 0 \quad \text{für alle } k \text{ außer } k = n \text{ und} \quad p_n^{(n)}(a) = n!. \tag{6.38}$$

(3) Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts. Zur Zeit t befinde er sich am Ort $x(t)$. Der zeitliche Verlauf seiner Bewegung wird also beschrieben durch die Funktion $t \mapsto x(t)$.

Seine *mittlere Geschwindigkeit* ist gleich Ortsänderung durch zugehörige Zeitänderung,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

und die *Momentangeschwindigkeit*, gleichbedeutend mit dem Grenzwert $\Delta t \to 0$, erhält man als Ableitung des Orts nach der Zeit:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{x}(t).$$

Lesehilfe
Für die Ableitung einer Funktion f nach der Zeit – bzw. nach einer Variablen namens t – ist auch die Schreibweise $\dot{f}$ anstelle von f' gebräuchlich.

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit bezeichnet man als *Beschleunigung*. Die Momentanbeschleunigung erhält man demnach als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, also

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \tag{6.39}$$

Die Beschleunigung ist somit gleichzeitig die zweite Ableitung des Orts nach der Zeit.

Die zeitliche Änderung der Beschleunigung schließlich nennt man *Ruck*. Der Ruck ist daher die dritte Ableitung des Orts nach der Zeit.

Lesehilfe
Der Ruck ist für das „Ruckeln“ verantwortlich, das du beispielsweise bei der Fahrt mit einer alten Straßenbahn spürst. Eine konstante Beschleunigung fühlt sich anders an: Sie nimmst du etwa bei der gleichmäßigen Beschleunigung eines Autos wahr, wie sie zwischen den Gangwechseln vorliegt, während die Gangwechsel selbst wieder ruckeln, weil sich da die Beschleunigung ändert.

(4) Glatte Funktionen: In der klassischen Physik gibt es das geflügelte Wort „Die Natur macht keine Sprünge“. Damit soll ausgedrückt werden, dass natürliche Vorgänge stets kontinuierlich und niemals sprunghaft erfolgen – wenn sie zeitlich nur genau genug aufgelöst werden. Die Vorgänge müssen somit stetigen Funktionen entsprechen. Aber auch die Ableitungen der Funktionen sind beobachtbar, so dass auch sie stetig sein müssen, ebenso die Änderungen der Ableitungen usw. Man geht daher in der mathematischen Physik oft von Funktionen aus, die *unendlich oft differenzierbar* sind, und nennt solche Funktionen *glatte Funktionen*.
(5) Splines: Manchmal können Prozesse oder Vorgänge nicht exakt beschrieben werden, z. B. weil der funktionale Zusammenhang unklar ist. Es sind jedoch einzelne Punkte numerisch oder experimentell bekannt. Will man diese Punkte zu einer zusammenhängenden Kurve interpolieren, so kann man dafür so genannte *Splines* verwenden: Dies sind synthetische Funktionen, die stückweise aus Polynomen zusammengesetzt sind. Verbindet man nun je drei Punkte jeweils durch ein Polynom zweiten Grads und setzt diese dann zur Gesamtfunktion zusammen, so hätte man im Ergebnis eine zwar stetige, aber i. Allg. unschöne Kurve mit Knicken. Man verwendet daher mindestens Polynome dritten Grads und verlangt zusätzlich, dass die Splines an den „Klebestellen“ dieselbe Steigung aufweisen. Auf diese Weise erhält man eine differenzierbare Gesamtfunktion. Höhere Ableitungen können an den Klebestellen dann allerdings nicht gebildet werden. Ist das erforderlich, muss der Grad der Polynome entsprechend vergrößert werden.

Lesehilfe
Durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) mit $x_1 < x_2 < x_3$ wird eine Parabel zweiten Grads eindeutig festgelegt. Nennen wir sie p_{123}. Ebenso wird durch die drei Punkte (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) mit $x_3 < x_4 < x_5$ eine Parabel p_{345} festgelegt. Klebt man die Parabelstücke $p_{123} : [x_1, x_3] \to \mathbb{R}$ und $p_{345} : [x_3, x_5] \to \mathbb{R}$ nun bei x_3 zu einem Spline zusammen, so werden sie bei x_3 in der Regel unterschiedliche Steigungen aufweisen, und man hat einen Knick.

► **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Gefragt war, ob „stetig differenzierbar“ einfach „stetig und differenzierbar“ heißt.

Wenn eine Funktion differenzierbar ist, so ist sie nach Satz 6.3 auch stetig. „Differenzierbar und stetig“ würde daher einfach nur dasselbe bedeuten wie „differenzierbar“ alleine. Wenn eine Funktion differenzierbar ist, so ist damit jedoch nicht gesagt, dass auch die Ableitung wieder stetig ist. Und genau das bedeutet „stetig differenzierbar“: Die Funktion ist differenzierbar und zusätzlich ist die Ableitung stetig.

6.6 Lokale Extrema

Die vielleicht wichtigste Anwendung der Ableitung besteht darin, lokale Extremstellen von Funktionen finden zu wollen. Wir werden sehen, dass dies insbesondere auf die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion hinausläuft.

Zunächst sehen wir uns an, was genau ein lokales Extremum ist:

Definition 6.2 *Es sei $a < b$ und $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f besitzt in $x \in]a,b[$ ein* lokales Maximum *(bzw. ein* lokales Minimum*), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$f(x) \geq f(w) \quad (\textit{bzw. } f(x) \leq f(w)) \quad \textit{für alle } w \textit{ in der } \varepsilon\textit{-Umgebung von } x.$$

Trifft das Gleichheitszeichen nur für $w = x$ zu, so spricht man von einem isolierten *lokalen Maximum (bzw. Minimum).*

Extremum *ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum oder Minimum.*

Die hier definierten lokalen Extrema können nur im Inneren des Definitionsbereichs der Funktion liegen, da das Intervall $]a,b[$ in Definition 6.2 offen ist.

Lokale Maxima oder Minimal bezeichnet man auch als „Hoch-“ oder „Tiefpunkte“. Machen wir uns die Begriffe anhand einiger Beispiele klar:

- Die Nullfunktion, $f(x) = 0$, besitzt in jedem Punkt gleichzeitig ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, aber in keinem Punkt ein isoliertes Extremum.
- Die Quadratfunktion, $f(x) = x^2$, besitzt bei $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum.
- Die Exponentialfunktion, $f(x) = \mathrm{e}^x$, besitzt kein lokales Extremum.

Lokale Extrema erfüllen das folgende *notwendige Kriterium*:

Satz 6.7 *Die Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ besitze in $x \in]a,b[$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis Die Funktion f besitze in x ein lokales Maximum. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass gilt $f(x) \geq f(w)\ \forall w \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Da f in x differenzierbar ist, gilt für diese w

$$f'(x) = \lim_{w\to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x} = \underbrace{\lim_{w\searrow x} \frac{\overbrace{f(w)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{w-x}_{>0}}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{w\nearrow x} \frac{\overbrace{f(w)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{w-x}_{<0}}}_{\geq 0}.$$

Eine Zahl, die gleichzeitig ≤ 0 und ≥ 0 ist, kann nur gleich 0 sein, also ist $f'(x) = 0$. Analog für ein lokales Minimum. •

Ein Punkt x mit $f'(x) = 0$ wird ein *stationärer Punkt* von f genannt. An einem stationären Punkt besitzt der Graph einer Funktion also eine horizontale Tangente.

Das notwendige Kriterium besagt demnach, dass bei differenzierbaren Funktionen *lokale Extrema höchstens an stationären Punkten vorliegen* können.

Lesehilfe
Es ist wichtig, darauf zu achten, dass hier von differenzierbaren Funktionen die Rede ist. Funktionsgraphen können durchaus auch in „Knicken“ Hoch- oder Tiefpunkte besitzen – sind aber an solchen Stellen nicht differenzierbar.

Beispiele
(1) Wie man aus dem Verlauf des Graphen „ersieht“, besitzt die Quadratfunktion $f : x \mapsto x^2$ bei 0 ein lokales Minimum. An dieser Stelle ist tatsächlich $f'(x) = 2x$ gleich 0. Da dies die einzige Nullstelle der Ableitung ist, kann diese differenzierbare Funktion keine weiteren lokalen Extremstellen besitzen.
(2) Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ besitzt bei 0 ein lokales Minimum. Da sie bei 0 nicht differenzierbar ist, macht sich dieses Minimum jedoch nicht durch eine verschwindende Ableitung bemerkbar.

6.7 Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung ist ein wichtiges Hilfsmittel, das insbesondere oft in Beweisen verwendet wird. Er besagt, dass differenzierbare Funktionen auf einem Intervall stets auch einmal die Durchschnittssteigung dieses Intervalls annehmen.

Die „Vorstufe“ des Mittelwertsatzes, auch im Sinn seines Beweises, ist der *Satz von Rolle*[3]:

[3] Benannt nach dem französischen Mathematiker Michel Rolle, 1652–1719.

Satz 6.8 (Satz von Rolle) *Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$, die in $]a, b[$ differenzierbar sei. Dann gibt es ein $x \in\,]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.*

Beweis Falls f eine konstante Funktion ist, ist der Satz offenbar erfüllt. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in\,]a, b[$ mit $f(x_0) \neq f(a)$, also $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Das Maximum oder Minimum der Funktion liegt daher nicht am Rand des Intervalls, d. h. nicht in a oder b. Daraus folgt, dass das Maximum oder das Minimum der Funktion in einem Punkt $x \in\,]a, b[$ angenommen wird, und nach Satz 6.7 ist dann $f'(x) = 0$. •

Aus dem Satz von Rolle folgt insbesondere, dass bei einer differenzierbaren Funktion zwischen zwei Nullstellen stets (mindestens) eine Nullstelle der Ableitung liegt. Seine Aussage wird nun verallgemeinert zum *Mittelwertsatz der Differenzialrechnung*:

Satz 6.9 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) *Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $x \in\,]a, b[$ mit*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis Wir definieren eine Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Mit f ist auch h stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Außerdem ist $h(a) = f(a) = h(b)$, so dass es nach dem Satz von Rolle ein $x \in\,]a, b[$ gibt mit $h'(x) = 0$. Dies bedeutet

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

also die Behauptung. •

Lesehilfe zum Beweis

Die Funktion h ist die Summe aus f und einer linearen Funktion. Lineare Funktionen sind stetig und differenzierbar, und die Summe mit f ist daher dort stetig oder differenzierbar, wo das für f der Fall ist.

Der Mittelwertsatz besagt also, dass eine differenzierbare Funktion im Inneren eines Intervalls $[a, b]$ (mindestens) einmal die *mittlere* Steigung auf diesem Intervall besitzt. Diese mittlere Steigung entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, siehe Abb. 6.3.

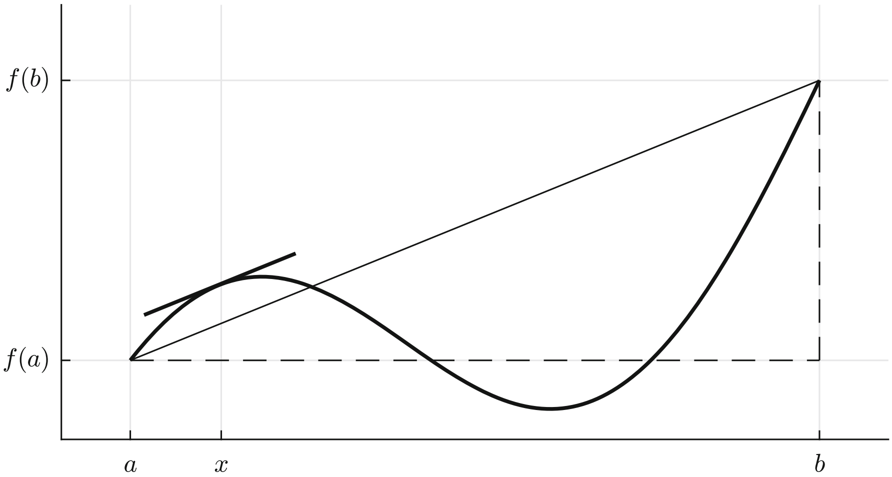

Abb. 6.3 Auf dem Intervall $[a, b]$ besitzt die differenzierbare Funktion f die mittlere Steigung, die sich aus der Sekante durch die zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ergibt. Im Inneren des Intervalls besitzt die Funktion f nach dem Mittelwertsatz (mindestens) eine Stelle x, an der ihre Steigung gleich dieser mittleren Steigung ist

Lesehilfe
Zur Erinnerung: Ist eine Funktion stetig, so weist sie bestimmte Eigenschaften auf. Eine typische Eigenschaft stetiger Funktionen ist der *Zwischenwertsatz*: Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall nehmen jeden Wert zwischen den Endwerten der Funktion an.

Ist eine Funktion darüber hinaus differenzierbar, weist ihr Graph also keine Knicke auf, so besitzt sie weitere Eigenschaften. Und der *Mittelwertsatz* ist – wenn man so will – die zentrale Eigenschaft, die bei differenzierbaren Funktionen hinzukommt.

► **Zwischenfrage (7)** Ist der Mittelwertsatz auf die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf dem Intervall von 0 bis 1 anwendbar?

6.8 Monotonie und Ableitung

In Abschn. 4.1 haben wir den Begriff der Monotonie verwendet, um umkehrbare Funktionen zu charakterisieren. Wir wollen uns nun ansehen, wie die Monotonie mit der Ableitung einer Funktion zusammenhängt:

Satz 6.10 *Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion.*

(1) *Falls für alle* $x \in]a, b[$ *gilt*

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } [a,b] \text{ streng monoton steigend,} \\ f'(x) \geq 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } [a,b] \text{ monoton steigend,} \\ f'(x) < 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } [a,b] \text{ streng monoton fallend,} \\ f'(x) \leq 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } [a,b] \text{ monoton fallend.} \end{aligned}$$

(2) *Ist*

$$\begin{aligned} f \text{ monoton steigend} &\quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in]a,b[, \\ f \text{ monoton fallend} &\quad \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in]a,b[. \end{aligned}$$

Beweis

(1) Wir beschränken uns auf den Fall $f'(x) > 0$ (die übrigen Fälle gehen ähnlich). Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, f sei nicht streng monoton steigend. Dann folgt daraus, dass es zwei Zahlen $x_1, x_2 \in [a, b]$ gibt mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $x \in]x_1, x_2[$ mit

$$f'(x) = \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \leq 0,$$

im Widerspruch zur Annahme!

(2) Es sei f monoton steigend. Dann überzeugt man sich leicht davon, dass für alle $x, w \in]a, b[$, $x \neq w$, die Differenzenquotienten $\frac{f(w)-f(x)}{w-x} \geq 0$ sind. Daraus folgt mit $w \to x$ auch $f'(x) \geq 0$. Analog für eine monoton fallende Funktion f. •

Man beachte, dass Satz 6.10 *nicht* besagt, dass für eine streng monoton steigende Funktion stets $f'(x) > 0$ gelten müsse. Zwar folgt aus $f'(x) > 0$ die strenge Montonie, aber nicht umgekehrt. So ist bespielsweise die Funktion $x \mapsto x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, besitzt aber bei 0 die Steigung 0.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (7)** Die Frage war, ob der Mittelwertsatz auf die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf dem Intervall von 0 bis 1 anwendbar ist.
Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ stetig, aber bei 0 nicht differenzierbar. Trotzdem ist der Mittelwertsatz anwendbar, da er die Differenzierbarkeit nur im Inneren des Intervalls voraussetzt. Es gibt also ein $x \in]0, 1[$, in dem die Wurzelfunktion die Steigung $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1-0} = 1$ hat. Wie du leicht nachrechnest, ist dies bei $x = 1/4$ der Fall.

6.9 Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Wir wissen bereits, dass bei differenzierbaren Funktionen ein lokales Extremum höchstens an einem stationären Punkt vorliegen kann (notwendiges Kriterium). Ob aber an einem gegebenen stationären Punkt auch tatsächlich ein lokales Extremum vorliegt, kann auf diese Weise nicht entschieden werden. Wir benötigen daher noch ein *hinreichendes Kriterium* für lokale Extrema:

Satz 6.11 *Es sei $a < b$ und $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. In $x \in]a,b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte*

$$f'(x) = 0 \textit{ und } f''(x) > 0 \textit{ (bzw. } f''(x) < 0\textit{).}$$

Dann besitzt f in x ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis Es sei $f''(x) > 0$, also $f''(x) = \lim_{w\to x} \frac{f'(w)-f'(x)}{w-x} > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass der Differenzenquotient in der ε-Umgebung von x größer als 0 ist, d. h., es gilt

$$\frac{f'(w) - f'(x)}{w - x} > 0 \quad \text{für alle } w \text{ mit } 0 < |w - x| < \varepsilon.$$

Wegen $f'(x) = 0$ folgt daraus in dieser Umgebung $f'(w) < 0$ für $w < x$, also für $x - \varepsilon < w < x$, und $f'(w) > 0$ für $w > x$, also für $x < w < x + \varepsilon$. Das aber bedeutet, dass f in $[x-\varepsilon, x]$ streng monoton fällt und in $[x, x+\varepsilon]$ streng monoton steigt, so dass in x ein lokales Minimum vorliegen muss.

Der Fall $f''(x) < 0$ geht analog. •

Dieses einfache hinreichende Kriterium erlaubt also die Bestimmung eines lokalen Extremums, wenn in einem stationären Punkt die *zweite Ableitung nicht verschwindet*, also größer oder kleiner Null ist.

Lesehilfe

Die Wörter „notwendig“ und „hinreichend“ wollen wir uns noch einmal richtig klarmachen: Betrachen wir eine beliebige Aussage A und ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für A. Ihr logischer Zusammenhang ist dann

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \quad \text{notwendiges Kriterium für } A, \\ A &\Leftarrow \quad \text{hinreichendes Kriterium für } A. \end{aligned}$$

Genau das drücken die Wörter sprachlich auch aus, wenn man einen Augenblick darüber nachdenkt.

Ferner ist zu beachten, dass ein hinreichendes Kriterium natürlich nicht notwendig sein muss. Es mag etwa verschiedene hinreichende Kriterien für die Aussage A geben, und trifft eines zu, so auch A, aber deswegen müssen keineswegs alle anderen auch zutreffen.

Es kann durchaus sein, dass neben der ersten auch die zweite Ableitung gleich Null ist. In diesem Fall ist anhand des einfachen Kriteriums 6.11 keine Entscheidung möglich, ob ein Extremum vorliegt oder nicht – und tatsächlich ist beides möglich. Hier hilft der folgende *allgemeine Extremwerttest*:

Satz 6.12 *Es sei $a < b$ und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion mit $n \geq 2$. Ist in $x \in]a, b[$*

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x) \neq 0,$$

dann gilt:

(1) *In x liegt genau dann ein lokales Extremum vor, wenn n gerade ist.*
(2) *Ist n gerade und gilt $f^{(n)}(x) > 0$ (bzw. $f^{(n)}(x) < 0$), so besitzt f in x ein lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Beweis Der Beweis dieses Satzes soll an dieser Stelle nur angedeutet werden: Aus der Taylor-Formel (siehe Abschn. 7.2) für $f(w)$ mit dem Entwicklungspunkt x und $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0$ ergibt sich

$$f(w) - f(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(w - x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(w - x)^{n+1} + \ldots$$

Für w in der Nähe von x setzt sich der erste Summand auf der rechten Seite durch. Für gerade n ist $(w - x)^n > 0$, so dass aus $f^{(n)}(x) < 0$ folgt $f(w) < f(x)$, also ein lokales Minimum in x usw. ∘

In diesem allgemeinen Extremwerttest ist natürlich die Aussage von Satz 6.11 enthalten: $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ bedeutet im Sinn von Satz 6.12 ja $n = 2$, also ein gerades n.

Die **Suche nach lokalen Extrema** einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion f mit Hilfe des Kriteriums 6.12 erfordert also zwei Schritte:

(1) Es sind die stationären Punkte zu ermitteln, d. h., man sucht die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$; dies ergibt k stationäre Punkte x_i, wobei k natürlich auch 0 sein kann.
(2) Für jeden stationären Punkt x_i ermittelt man so lange die Werte der höheren Ableitungen, bis zum ersten Mal ein Wert ungleich 0 herauskommt. Handelt es sich dabei um eine gerade Ableitung, z. B. die zweite oder die vierte, so haben wir ein lokales Extremum. Ist hingegen als erstes eine ungerade Ableitung ungleich 0, etwa die dritte, so liegt kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Lesehilfe
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung 0. Und in einem Wendepunkt geht der Funktionsgraph, wenn du ihn gedanklich abläufst, von einer

Linkskurve in eine Rechtskurve über, oder umgekehrt. Das heißt, auf dem Weg zum Wendepunkt steigt die Steigung an, um anschließend abzusinken, bzw. umgekehrt.

Beispiele
(1) Wir betrachten die Parabeln $f_k : x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; sie besitzen bei 0 einen stationären Punkt, d. h., es ist $f_k'(0) = 0$.

- Bei $x \mapsto x^2$ handelt es sich um ein lokales Minimum, denn es ist $f_2''(0) = 2 > 0$.
- Bei $x \mapsto x^3$ liegt bei 0 ein Sattelpunkt vor, denn es ist $f_3''(0) = 0$ und $f_3'''(0) = 6 \neq 0$.
- Bei $x \mapsto x^4$ liegt ein lokales Minimum vor, denn es ist $f_4''(0) = 0 = f_4'''(0)$ und $f_4''''(0) = 24 > 0$ usw.

(2) Wir suchen das Extremum einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall. Wenn wir uns davon überzeugen können, dass es nicht an den Grenzen liegt, z. B. weil an beiden Grenzen der Wert 0 angenommen wird, und wenn die Funktion dann nur einen stationären Punkt im Intervall besitzt, so kann das gesuchte Extremum nur dort liegen.

In praktischen Anwendungen kommen solche Beispiele oft vor, und es kann dann auf höhere Ableitungen verzichtet werden.

6.10 Globale Extrema

Die Suche nach lokalen Extrema mit Hilfe des allgemeinen Extremwerttests 6.12 *beschränkt sich auf hinreichend oft differenzierbare Funktionen in offenen Intervallen*. Lokale Extrema können aber auch an Stellen vorliegen, die nicht differenzierbar sind, so bei der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, die bei 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Auch wird der Rand des Intervalls in Satz 6.12 nicht berücksichtigt.

Bei vielen Fragestellungen sind die *globalen Extrema* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem (eigentlichen oder uneigentlichen) Intervall I von Interesse, d. h. die Stellen, an denen die Funktion *global* den größten oder kleinsten Wert annimmt. Und dazu sind die folgenden Stellen zu prüfen:

(1) Lokale Extrema im Inneren von I, die sich als stationäre Punkte bemerkbar machen (hier kommt Satz 6.12 zum Einsatz);
(2) Punkte im Inneren von I, in denen f nicht differenzierbar ist;
(3) Randpunkte von I.

Unter diesen Stellen kann dann das globale Extremum durch einen Vergleich der Funktionswerte und ggf. auch bestimmter Grenzwerte ermittelt werden.

Bei diesen Untersuchungen ist generell zu beachten, dass eine Funktion ihr globales Maximum oder Minimum nicht unbedingt annehmen muss. Dies ist nur bei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sichergestellt, siehe Satz 3.11. Gegebenenfalls ist es daher notwendig, Grenzwerte der Funktion an relevanten Stellen, z. B. an nicht differenzierbaren Stellen oder an den Rändern des Definitionsbereichs, für ganz $\mathbb{R}$ etwa bei $\pm\infty$, zu untersuchen.

Lesehilfe
Du hast sicher gemerkt, dass man hier insgesamt mit den Begriffen ein wenig aufpassen muss. „Lokale Extrema" können nach unserer Definition 6.2 nur im Inneren eines Intervalls liegen. Sucht man aber den größten oder kleinsten Wert einer Funktion auf einem Intervall, also das „globale Extremum", so interessiert man sich auch für den Rand.

Und lokale Extrema machen nur dann zwingend als stationäre Punkte auf sich aufmerksam, wenn die Funktion überall differenzierbar ist. Andernfalls können sie auch an Knicken des Graphen liegen, oder an Unstetigkeitsstellen.

Beispiele
(1) Wir suchen die lokalen und globalen Extrema der Funktion $\mathrm{abs} : [-1, 2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Die Funktion ist stetig, aber sie ist bei 0 nicht differenzierbar.

(1) Sie besitzt keine stationären Punkte.
(2) Die Stelle 0 muss untersucht werden: Es ist $|0| = 0$, für $x > 0$ steigt die Funktion streng monoton und für $x < 0$ fällt sie streng monoton. Aufgrund der Stetigkeit liegt daher ein isoliertes lokales Minimum vor.
(3) Es ist $|-1| = 1$ und $\lim_{x \nearrow 2} |x| = 2$.

Insgesamt können wir also sagen: Das globale Minimum der Funktion liegt bei 0 mit dem Funktionswert 0, das globale Maximum wird nicht angenommen, das Supremum der Funktionswerte ist 2.
(2) Wir betrachten die Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - x^2 + 1$, und suchen die lokalen und globalen Extrema:

(1) Wir ermitteln die lokalen Extrema über die stationären Punkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = x(4x^2 - 2),$$
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2}.$$

Stationäre Punkte liegen also vor bei $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}/2$. Wir prüfen die zweiten Ableitungen:

$$f''(x) = 12x^2 - 2,$$
$$f''(0) = -2, \quad f''(\pm\sqrt{2}/2) = 12 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 4.$$

Das heißt:
- Lokales Maximum bei 0, $f(0) = 1$,
- lokale Minima bei $\pm\sqrt{2}/2$, $f(\pm\sqrt{2}/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$.

(2) Die Funktion f ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar, also können keine weiteren lokalen Extrema vorliegen.

(3) Wir prüfen die Ränder des Definitionsbereichs: Es ist $f(\pm 2) = 16 - 4 + 1 = 13$.

Insgesamt haben wir also folgendes Ergebnis:

- Lokales Maximum bei $(0, 1)$,
- globale Maxima bei $(\pm 2, 13)$,
- globale Minima bei $(\pm\sqrt{2}/2, \frac{3}{4})$.

(3) Als Beispiel für eine *Extremwertaufgabe* wollen wir uns die Frage stellen, welches Rechteck mit gegebenem festem Umfang U den größten Flächeninhalt einschließt.

Wir suchen also das Maximum der Fläche

$$F = ab,$$

wobei a und b für die zwei Seiten des Rechtecks stehen. Für sie gilt die so genannte *Nebenbedingung*

$$2a + 2b = U,$$

da der Umfang U ja fest vorgegeben ist. Daraus folgt $b = (U - 2a)/2$, und Einsetzen ergibt jetzt einen Ausdruck für F, der nur noch von einer Variablen abhängt:

$$F = a(U - 2a)/2 = aU/2 - a^2 = a(U/2 - a) = F(a). \tag{6.40}$$

Es ist also F eine Funktion von a, und ihr Definitionsbereich für unsere Fragestellung ist offenbar $a \in [0, U/2]$. Dabei gilt $F(0) = 0 = F(U/2)$, in beiden Fällen hat man es nur noch mit zu Linien entarteten Rechtecken zu tun. Das Maximum der nicht-negativen Funktion F muss daher im Inneren des Intervalls liegen. Das ist hier natürlich der Scheitelpunkt der Parabel. Er liegt mittig zwischen den Nullstellen, also bei $a = U/4$. Dies bedeutet auch $b = (U - 2U/4)/2 = U/4$, und wir haben es daher mit einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $F = U^2/16$ zu tun.

Lesehilfe

Bei einer Extremwertaufgabe handelt es sich normalerweise um eine Textaufgabe, aus der die zu optimierende Funktion erst herausgelesen werden muss. Du beginnst am besten damit, diese Zielfunktion aufzustellen. Oft enthält sie zunächst noch zu viele Parameter. Die Nebenbedingungen, d. h. weitere Randbedingungen der Fragestellung, verwendest du dann dazu, einzelne

Parameter zu ersetzen, so dass die Zielfunktion nur noch einen Parameter enthält. Der Definitionsbereich der Zielfunktion ergibt sich aus der Problemstellung. Dann kannst du schließlich das Extremum suchen.

6.11 Satz von l'Hospital

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir eine Vielzahl von Grenzwerten ermittelt; dies war teilweise mit einigem Aufwand verbunden. Beim *Satz von l'Hospital*[4] handelt es sich um ein Hilfsmittel, das die Ermittlung kritischer Grenzwerte ggf. wesentlich vereinfachen kann. Seine präzise Formulierung lautet:

Satz 6.13 (Satz von l'Hospital) *Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $I =]a, b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, die für $x \nearrow b$ beide gegen Null konvergieren oder beide bestimmt divergieren. Gilt nun*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

und ist ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so gilt auch

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Analoge Aussagen gelten für den Grenzübergang $x \searrow a$.

Liegt b echt im Inneren eines Intervalls, in dem die Voraussetzungen erfüllt sind, so gilt daher auch

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Lesehilfe zum Satz

Dieser Satz ist nicht leicht zu lesen. Zunächst zu den Voraussetzungen: Zu beachten ist, dass auch $a = -\infty$ und $b = \infty$ erlaubt sind, d. h., der Satz ist auch für Grenzwerte mit $x \to \pm\infty$ anwendbar. Zur Erfüllung von $g'(x) \neq 0$ kann man ggf. a geeignet, d. h. dicht genug an b wählen.

Der Satz geht dann aus von der Existenz der Grenzwerts des Quotienten der Ableitungen. Existiert er, so gibt er in den angegebenen Fällen, das heißt bei „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$", den Grenzwert des Quotienten der Funktionen selbst wieder.

---

[4] Benannt nach dem französischen Mathematiker Guillaume de l'Hospital, 1661–1704.

Beweis Der exakte Beweis des Satzes von l'Hospital verwendet einen erweiterten Mittelwertsatz. Wir führen ihn nicht aus. Die Kernaussage kann man sich aber leicht zumindest plausibel machen: Wir ermitteln den Grenzwert $x \to b$ des Quotienten zweier Funktionen f und g, indem wir die Funktionen durch ihre Tangenten in b, siehe (6.18), ersetzen:

$$q = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{t[f,b](x)}{t[g,b](x)} = \lim_{x\to b} \frac{f(b) + f'(b)(x-b)}{g(b) + g'(b)(x-b)}.$$

Für $\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = 0$ und $\lim_{x\to b} g(x) = g(b) = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$q = \lim_{x\to b} \frac{f'(b)(x-b)}{g'(b)(x-b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Fall divergenter Grenzwerte für f und g lässt sich durch Betrachtung von Kehrwerten auch auf den Fall $0/0$ zurückführen. ∘

Vereinfacht ausgedrückt besagt der Satz von l'Hospital, dass *ein Grenzwert* $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ *in den kritischen Fällen, wenn sich also*

$$„\frac{0}{0}\text{“ oder „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}$$

ergeben würde, berechnet werden kann, indem man Zähler und Nenner jeweils durch deren Ableitungen ersetzt:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.41}$$

Dabei kann die Regel natürlich auch mehrfach nacheinander angewendet werden.

Betrachten wir als Beispiel noch einmal den Grenzwert (6.9),

$$k = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Zähler und Nenner streben für $x \to 0$ gegen Null. Der Wert des Grenzwerts hängt somit davon ab, „wie schnell“ Zähler und Nenner gegen Null streben. Die Zähler- und Nennersteigung in 0 geben aber gerade an, „wie schnell“ die Null jeweils erreicht wird. Die Anwendung des Satzes von l'Hospital ergibt:

$$k = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \tag{6.42}$$

Mit dem Satz von l'Hospital lässt sich dieser Grenzwert also ganz einfach ermitteln.

▶ **Zwischenfrage (8)** Der Satz von l'Hospital wurde in (6.42) recht lax angewandt. Wie müsste man argumentieren, um es ganz genau zu machen?

Beispiele
(1) Auch für den folgenden Grenzwert ergibt die (zweifache) Anwendung der Regel von l'Hospital eine schnelle Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Auch wenn man die Regel durchaus in dieser Richtung anwendet, so hangelt man sich präziser eigentlich von hinten nach vorne durch: Aus der Existenz von $\lim_{x\to b} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ folgt $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, und daraus schließlich Existenz und Wert von $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$.
(2) Die Regel von l'Hospital ist nur auf Quotienten anwendbar. Daher ist es manchmal sinnvoll, einen Quotienten „künstlich" zu erzeugen:

$$\lim_{x\searrow 0}(x\ln x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0}(-x) = 0.$$

(3) Die Regel von l'Hospital darf tatsächlich nur angewendet werden, wenn Quotienten mit „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" vorliegen. So ist z. B.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+7}{x-1} = -7,$$

aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x+7)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1} = 2.$$

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (8)** Es sollte die Anwendung des Satzes von l'Hospital in (6.42) exakt begründet werden.
Sowohl $x \mapsto \sin x$ (entspricht f) als auch $x \mapsto x$ (entspricht g) sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es ist $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ und $\lim_{x\to 0} x = 0$, und außerdem $x' = 1 \neq 0$. Die Voraussetzungen sind daher um $b = 0$ herum erfüllt. Der Grenzwert $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$ existiert und ist gleich 1. Daher ist auch $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Das Wichtigste in Kürze

- Bei der **Ableitung** einer Funktion handelt es sich um den Grenzwert des Differenzenquotienten. Sie gibt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion im betrachteten Punkt an.

- Nicht alle Funktionen sind differenzierbar. Insbesondere ist dafür erforderlich, dass der Graph der Funktion keinen Knick aufweist.
- Der Satz zur **Ableitung der Umkehrfunktion** erlaubt die Ableitung von Funktionen, die als Umkehrung einer Funktion mit bekannter Ableitung definiert sind.
- Eine differenzierbare Funktion ist lokal **linear approximierbar**. Die lineare Näherung um einen Punkt ergibt sich aus der Tangente in diesem Punkt.
- Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit.
- Die Ableitung ist **linear**. Es gelten außerdem die **Produktregel**, die **Quotientenregel** und die **Kettenregel**.
- Ein **lokales Extremum** ist ein Hoch- oder Tiefpunkt einer Funktion im Inneren eines Intervalls.
- Ein **stationärer Punkt** ist ein Punkt mit der Steigung Null.
- Bei differenzierbaren Funktionen können lokale Extrema höchstens an stationären Punkten auftreten (**notwendiges Kriterium**).
- Nach dem **Mittelwertsatz** der Differenzialrechnung besitzt eine differenzierbare Funktion im Inneren eines Intervalls (mindestens) einmal die mittlere Steigung auf diesem Intervall.
- Aus der Ableitung einer Funktion lassen sich Rückschlüsse auf die **Monotonie** ziehen – und umgekehrt.
- Das **hinreichende Kriterium** erlaubt es, lokale Extrema eindeutig zu bestimmen.
- Bei der Suche nach **globalen Extremstellen** ist es notwendig, neben den stationären Punkten auch nicht differenzierbare Stellen und die Randstellen des Definitionsbereichs zu betrachten.
- Der **Satz von l'Hospital** erlaubt in bestimmten Fällen, den Grenzwert eines Quotienten auf den Grenzwert der Ableitungen von Zähler und Nenner zurückzuführen.

Und was bedeuten die Formeln?

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x),$$

$$(x^2)' = 2x, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad \sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x,$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \ln' x = \frac{1}{x}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a), \quad \sin x \approx x,$$

$$(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x), \quad (uv)' = u'v+uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}, \quad (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x),$$

$$\left(x^b\right)' = bx^{b-1}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad \sin'''' x = \sin^{(4)} x = \sin x,$$

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \neq 0, \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{bei } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}.$$

Übungsaufgaben

A6.1 Auf steilen Straßen wird zur Warnung deren „Steigung" auf einem Schild als Prozentzahl angegeben, z. B. 12 %. Was hat diese „Steigung" mit der mathematischen Steigung einer Geraden zu tun? Und was macht eine Straße mit 100 % Steigung?

A6.2 Beweise mit Hilfe des Differenzialquotienten, d. h. ohne Verwendung von Rechenregeln zur Differenziation, die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^3\right) = 12x^2; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}.$$

A6.3 Weil Tangenten Geraden sind, eine kleine Aufgabe zu Geraden: Noten sollen so berechnet werden, dass bei 100 % der Punkte eine 1,0 und bei 50 % eine 4,0 vergeben wird; dazwischen sollen sie linear interpoliert werden. Wie lautet die Vorschrift $n(p)$, mit der zu einer gegebenen Prozentzahl p die zugehörige Note n berechnet wird?

A6.4 Zur Übung einmal rückwärts: Bestimme ausgehend von der Ableitung des natürlichen Logarithmus, $(\ln x)' = 1/x$, die Ableitung der Exponentialfunktion.

A6.5 Ermittle die Gleichungen der Tangenten an die Normalparabel an den Stellen -1, 0 und 2.

A6.6 Leite die folgenden Funktionen jeweils nach x ab:

$$f_1(x) = 4x^4 - 1, \qquad f_2(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = \frac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + 1},$$
$$f_4(x) = \sin x \cos x, \qquad f_5(x) = \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{3x^2}, \qquad f_6(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + 4x^2 + 8}{\cos x \tan x}.$$

A6.7 Wie lautet die Ableitung der Funktion Arcuscotangens, $x \mapsto \operatorname{arccot} x$?

A6.8 Muss man wissen, dass die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, bei Null nicht differenzierbar sind, oder sieht man es der Ableitung an? Und wie sieht es bei der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ aus?

A6.9 Leite die folgenden Funktionen jeweils nach x ab:

$$f_1(x) = 3\cos(kx), \qquad f_2(x) = \sqrt{2x^2 + 1}, \qquad f_3(x) = \sqrt[3]{x},$$
$$f_4(x) = x^2 \ln x, \qquad f_5(x) = 2^x, \qquad f_6(x) = \sqrt{1 + \cos^2(kx)},$$
$$f_7(x) = 4\tan^2(4x), \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad f_9(x) = \sin\left(\frac{1}{1 + x^2}\right).$$

A6.10 Jemand rechnet vor: $(\ln(2x))' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = 1/x$. Es ist aber auch $(\ln x)' = 1/x$. Hat er sich vertan? Oder ist doch alles in Ordnung?

A6.11 Es gibt doch die Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$. Warum ist denn dann nicht einfach $(2^x)' = x2^{x-1}$? Oder ist das doch so und man schreibt es nur anders auf?

A6.12 Wir betrachten die Funktion f mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^5 - x^3$. Bestimme sämtliche Nullstellen der ersten und der zweiten Ableitung von f. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f an den Stellen 1 und -1?

A6.13 Für $a \in \mathbb{R}^*$ betrachten wir die Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x) = ax^3 + x^2 - \frac{x}{a}.$$

Zeige, dass die Funktionen genau drei Nullstellen besitzen, und ermittle die stationären Punkte der Funktionen.

A6.14 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 2$.

a) Die Funktion f hat eine Nullstelle. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an dieser Nullstelle?
b) Bestimme sämtliche Extremstellen der Funktion f, also sowohl die lokalen als auch die globalen Minima und Maxima.

A6.15 Von einem rechteckigen Stück Pappe mit $a = 16\,\text{cm}$ Länge und $b = 10\,\text{cm}$ Breite werden an den Ecken gleiche Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest eine quaderförmige Schachtel gebildet. Wie groß muss man die Seitenlänge der Quadrate wählen, um für die Schachtel das größtmögliche Volumen zu erhalten?

A6.16 Die 400 m-Laufbahn auf einem Sportplatz besteht bekanntlich aus zwei parallelen Strecken der Länge l und zwei angesetzten Halbkreisen mit dem Radius r. Wie groß müssen l und r gewählt werden, damit das Spielfeld (d. h. die zwischen den parallelen Strecken liegende Rechteckfläche) möglichst groß wird?

A6.17 Ein Kanal mit $a = 10\,\text{m}$ Breite führt im rechten Winkel in einen Kanal, der eine Breite von $b = 20\,\text{m}$ besitzt. Durch die Kanäle sollen Baumstämme transportiert werden. Wie lang dürfen diese Baumstämme höchstens sein, damit sie aus dem schmalen Kanal vollständig in den breiten Kanal geschoben werden können?

A6.18 Auch wenn wir die Grenzwerte teilweise schon kennen: Verwende hier ggf. die Regel von l'Hospital, um sie zu berechnen.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x} \qquad (2)\ \lim_{x\searrow 0}(x\ln(2x)) \qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$(4)\ \lim_{x\searrow \pi/2}\frac{\sin x}{\cos x} \qquad (5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x} \qquad (6)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+2^{2x}}{2x^3+\ln x}.$$

Taylor-Formel

7

Wir wissen bereits, dass differenzierbare Funktionen lokal „linear approximiert" werden können. Diese lineare Approximation ist nichts anderes als die Tangente, die in der Umgebung des betrachteten Punkts dicht am Graphen der Funktion liegt.

Will man die Genauigkeit verbessern, so kann man über die lineare Näherung hinausgehen und nach Polynomen höherer Ordnung suchen, die die Funktion annähern. Genau dies erlaubt die Taylor-Formel, und sie stellt damit so etwas wie die Verallgemeinerung der linearen Näherung dar.

Für die exakte Formulierung und den Beweis der Taylor-Formel benötigen wir die Integralrechnung. Sofern man damit nicht vertraut ist, möge man einfach über diese Stellen hinweglesen. Für die Anwendung der Formel und auch für die weiteren theoretischen Überlegungen ist nur die Differenziation erforderlich.

Die Taylor-Formel besitzt unzählige Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften, wenn eine Funktion aus theoretischen oder praktischen Erwägungen nicht exakt berechnet werden kann oder soll.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Die Taylor-Formel besteht aus einem Polynom mit besonderen Eigenschaften. Wir müssen uns ansehen, welche das sind.
- Der Fehler einer Taylor-Näherung entspricht dem so genannten Restglied. Wir werden sehen, wie man diesen Fehler aufschreiben kann. Und insbesondere werden wir uns überlegen, wie man ihn abschätzen kann.
- Die große praktische Bedeutung der Taylor-Formel liegt in ihrer Verwendung als Näherung. Wir sehen uns genau an, was das heißt.
- Hört man mit der Entwicklung des Taylor-Polynoms gar nicht mehr auf, gelangt man zur Taylor-Reihe. Für Sinus und Cosinus interessiert uns das besonders. Und dann sehen diese beiden Winkelfunktionen plötzlich der Exponentialfunktion ähnlich.

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_7

7.1 Idee des Taylor-Polynoms

Wir betrachten eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die in einem gegebenen Punkt $a \in I$ hinreichend oft differenzierbar sei. Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle a,

$$T_1[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

ist das *Polynom ersten Grads, das sich bei a bestmöglich an f anlehnt*, da T_1 bei a denselben Funktionswert und dieselbe erste Ableitung wie f besitzt, d. h.

$$T_1[f,a](a) = f(a), \quad T_1'[f,a](a) = f'(a).$$

Lesehilfe
Die Tangente an den Graphen einer Funktion haben wir in Abschn. 6.3 mit (6.18) kennengelernt. Wir schreiben sie hier als T_1 mit „T“ und Index 1, weil sie sich als das „Taylor“-Polynom ersten Grads erweisen wird.

Geht man nun darüber hinaus und sucht das Polynom zweiten Grads, $T_2[f,a]$, das sich bei a bestmöglich an f anschmiegt, so wird man dazu die Parabel wählen, bei der neben Funktionswert und Steigung auch die „Krümmung“, d. h. die zweite Ableitung mit f übereinstimmt. Dies ist der Fall für

$$T_2[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

wovon man sich leicht überzeugt, denn es ist

$$\begin{aligned} T_2'[f,a](x) &= f'(a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot 2(x-a) = f'(a) + f''(a)(x-a), \\ T_2''[f,a](x) &= f''(a), \end{aligned}$$

und damit haben wir

$$T_2[f,a](a) = f(a), \quad T_2'[f,a](a) = f'(a), \quad T_2''[f,a](a) = f''(a).$$

Lesehilfe
Ist ein Graph „gekrümmt“, so ändert sich seine Steigung. Änderung der Steigung heißt Änderung der ersten Ableitung. Die zweite Ableitung gibt an, wie schnell sich die erste Ableitung ändert. Somit ist die zweite Ableitung ein Maß für die Krümmung des Graphen.

Ein Polynom dritten Grads wählt man so, dass zusätzlich noch die dritte Ableitung mit f übereinstimmt. Das ist für

$$T_3[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

der Fall: Hier ist

$$\begin{aligned} T_3'[f,a](x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot 3(x-a)^2, \\ T_2''[f,a](x) &= f''(a) + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot 3 \cdot 2(x-a) = f''(a) + f'''(a)(x-a), \\ T_2'''[f,a](x) &= f'''(a), \end{aligned}$$

also

$$T_3[f,a](a) = f(a), \quad T_3'[f,a](a) = f'(a), \quad T_3''[f,a](a) = f''(a),$$
$$T_3'''[f,a](a) = f'''(a).$$

Führt man nun diese Überlegungen fort bis zu einem Polynom n-ten Grads, so erkennt man:

Das Polynom

$$\begin{aligned} T_n[f,a](x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned} \tag{7.1}$$

ist das Polynom n-ten Grads, dessen Funktionswert und dessen ersten n Ableitungen in a mit der Funktion f übereinstimmen.

Lesehilfe

Kurz zum Summanden mit $k = 0$ in der Summe: Er lautet $\frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0$. Die nullte Ableitung von f ist f selbst, so dass sich mit $0! = 1$ und $(x-a)^0 = 1$ tatsächlich einfach $f(a)$ ergibt.

7.2 Formulierung der Taylor-Formel

Wir haben gesehen, dass sich das Polynom (7.1) an der Stelle a aufgrund gleichen Funktionswerts und gleicher Ableitungen an eine Funktion f anschmiegt. Es bildet den Kern der *Taylor-Formel*. Ihre präzise Formulierung erfordert zur Angabe des

Restglieds zunächst ein Integral. Mit Satz 7.2 werden wir aber eine alternative und darüber hinaus viel praktischere Form des Restglieds ohne Integral kennenlernen.

Die Taylor-Formel lautet:

Satz 7.1 (Taylor-Formel) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf dem nicht-trivialen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei das Restglied gegeben wird durch

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.3}$$

Beweis Der Beweis erfolgt unter Verwendung der Integralrechnung durch Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 0$): Die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_1(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

entspricht dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Induktionsschritt ($n-1 \to n$): Als Induktionsvoraussetzung gehen wir aus von der Taylor-Formel der Ordnung $n-1$, d. h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(x-t)^n}{n!}\right) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

und damit insgesamt also die Taylor-Formel der Ordnung n. •

Den Punkt a nennt man den *Entwicklungspunkt* und sagt, die Funktion f werde *um den Punkt a in das Taylor-Polynom* $T_n[f,a](x)$ *entwickelt*. Der Fehler, den man macht, wenn man an der Stelle x statt des exakten Werts der Funktion den Wert der Taylor-Entwicklung bis zur n-ten Ordnung nimmt, wird durch das Restglied $R_{n+1}(x)$ gegeben. Da sich seine Größe in der vorliegenden Form – auch bei Kenntnis der Integralrechnung – nur schwer abschätzen lässt, verwendet man gerne die folgende *Lagrange-Form des Restglieds*:

Satz 7.2 (Lagrange-Restglied) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf dem nicht-trivialen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a, x \in I$. Dann existiert ein μ zwischen a und x so, dass gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{7.4}$$

Beweis Der Beweis greift auf das Restglied in Integralform zurück. Er fußt auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und führt eine Integration über ein Polynom aus:

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein μ zwischen a und x so, dass gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\mu) \int\limits_a^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\mu) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$ •

Lesehilfe

Der genaue Wert des „Fehlers“ $R_{n+1}(x)$ lässt sich offenbar auch in seiner Lagrange-Form nicht angeben, da der Wert von μ nicht bekannt ist. Die

Aussage lautet ja lediglich, dass es für jedes x jeweils irgendein solches μ zwischen a und x gibt.

Wir werden aber sehen, dass sich der Fehler zumindest nach oben abschätzen lässt.

Ab hier kommen wir wieder ohne Integralrechnung aus und werden die Taylor-Formel auch nur noch in der Formulierung aus Satz 7.2 verwenden.

7.3 Größe des Restglieds

Mit Hilfe der Lagrange-Form können wir die Größe des Restglieds nach oben abschätzen: Betrachten wir x-Werte in einem Intervall $[a - \Delta, a + \Delta]$ um den Entwicklungspunkt a, und sei M der Maximalwert oder zumindest eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(x)|$ auf diesem Intervall, so ist offenbar

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\Delta^{n+1}. \tag{7.5}$$

Für eine gegebene Funktion f lässt sich auf diese Weise also eine obere Grenze für den Fehler einer bestimmten Taylor-Ordnung angeben. Der Nenner $(n + 1)!$ führt dabei tendenziell zu einer Verkleinerung des Fehlers bei größer werdender Ordnung n, zumindest sofern nicht größere Maximalwerte von $|f^{(n+1)}(x)|$ diesen Effekt zunichtemachen.

► **Zwischenfrage (1)** Nehmen wir an, in der Situation von (7.5) gelte $|f^{(n+1)}(x)| = M$ für ein $x \in [a - \Delta, a + \Delta]$. Ist für dieses x dann $|R_{n+1}(x)| = \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1}$? Das heißt, ist der Fehler zumindest für dieses x dann exakt bekannt?

Für $x \to a$ wird das Restglied jedenfalls in folgendem Sinn beliebig klein:

Satz 7.3 *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion auf dem nicht-trivialen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varphi(x)(x-a)^n, \tag{7.6}$$

wobei φ eine Funktion mit $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$ ist.

Beweis Wir verwenden die Lagrange-Form des Restglieds n-ter Ordnung, d. h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(x-a)^n$$

mit einem μ zwischen a und x. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k &= \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(x-a)^n \\
&= \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&\quad - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n)}(\mu) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,
\end{aligned}$$

also, wenn man den ersten Summanden auf der rechten Seite in die Summe einfügt,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\mu) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Wir setzen $\varphi(x) := \frac{f^{(n)}(\mu) - f^{(n)}(a)}{n!}$. Diese Funktion hängt von x ab, weil μ von x abhängt. Da μ zwischen a und x liegt, folgt aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(\mu) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

•

Lesehilfe zum Beweis
Mit $x \to a$ muss auch μ immer dichter an a heranrücken, es ist also gleichbedeutend mit $\mu \to a$. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ heißt das also $\lim_{x\to a} f^{(n)}(\mu) = \lim_{\mu\to a} f^{(n)}(\mu) = f(a)$.

Unter Verwendung des sogenannten *Landau-Symbols o* („klein *o*“) schreibt man die Aussage von Satz 7.3 auch als[1]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^n) \quad \text{für } x \to a. \tag{7.7}$$

Es ist also $R_{n+1}(x) = o(|x-a|^n)$, und dies besagt, dass das Restglied für $x \to a$ schneller gegen 0 *geht als $|x-a|^n$.*

[1] Für zwei Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ sagt man allgemein, es sei $g = o(h)$ für $x \to a$, wenn g für $x \to a$ gegenüber h vernachlässigbar ist, was gleichbedeutend ist mit $\lim_{x\to a} |\frac{g(x)}{h(x)}| = 0$. Und hier haben wir $R_{n+1}(x) = \varphi(x)(x-a)^n$, d. h. $|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}| = |\varphi(x)| \longrightarrow 0$ für $x \to a$.

Lesehilfe
Die Schreibweise mit dem Landau-Symbol o ist intuitiv und recht geläufig. Das Restglied geht für $x \to a$ „schneller" gegen 0 als $|x-a|^n$, weil in (7.6) neben $|x-a|^n$ selbst auch noch die Funktion $\varphi(x)$ für $x \to a$ gegen 0 geht.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Die Frage war, ob der Fehler für ein x mit $|f^{(n+1)}(x)| = M$ aufgrund des Lagrange-Restglieds exakt bekannt ist.
Nein, auch für ein solches x lässt sich der Fehler mit dem Lagrange-Glied nicht exakt angeben. Das Gleichheitszeichen gilt ja nur für ein (unbekanntes) μ zwischen a und x, und es ist im Allgemeinen $\mu \neq x$. Der maximal mögliche Fehler der Abschätzung (7.5) muss also keineswegs tatsächlich erreicht werden.

7.4 Näherungsformeln

Die Taylor-Formel kann verwendet werden, um Näherungsformeln für Funktionen f zu entwickeln, mit denen ihr Funktionswert an Stellen x *in der Nähe eines Entwicklungspunkts* a durch den Wert des entsprechenden Taylor-Polynoms approximiert wird. Dazu halten wir fest:

- Die Näherung wird i. Allg. umso besser, je höher die Ordnung n des Taylor-Polynoms ist und je näher x an a liegt.
- Die maximale Größe des Fehlers kann bei Bedarf mit Hilfe von (7.5) abgeschätzt werden.
- Für praktische Anwendungen reicht es oftmals aus, sich auf die *lineare Näherung* zu beschränken,

  $$f(x) \approx T_1[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

  oder, etwa weil die erste Ableitung verschwindet, man es aber nicht bei einer konstanten Näherung belassen will, die *parabelförmige Näherung* zu verwenden,

  $$f(x) \approx T_2[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2,$$

  siehe Abb. 7.1.

Oft wird die Taylor-Formel auch in folgender Form geschrieben:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots \tag{7.8}$$

oder

$$f(a+\Delta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\Delta x)^k + o(|\Delta x|^n). \tag{7.9}$$

Dabei steht $\Delta x = x - a$ für die Abweichung vom Entwicklungspunkt.

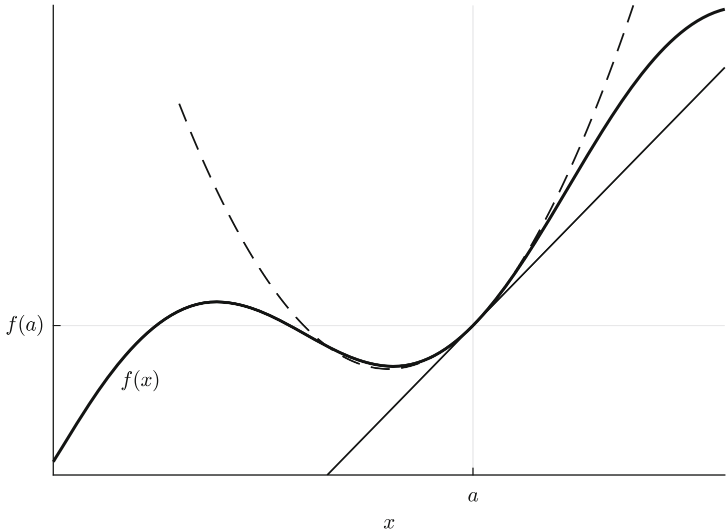

Abb. 7.1 Die Funktion f kann in der Nähe des Entwicklungspunkts a durch Taylor-Polynome approximiert werden. Das Taylor-Polynom ersten Grads entspricht der Tangente in a. Das Polynom zweiten Grads ist die Parabel, die sich in a optimal an den Graphen von f anschmiegt

Lesehilfe
Diese Schreibweise mit den Abweichungen ist oft sehr praktisch. Insbesondere sieht man explizit, dass für „kleine" Abweichungen, d. h. Δx deutlich kleiner als 1, die Terme mit höherer Ordnung allein aufgrund der Faktoren $(\Delta x)^k$ wahrscheinlich schnell kleiner werden. Immer vorausgesetzt, dass die Ableitungen $f^{(k)}(a)$ sich nicht eigenartig verhalten und sehr groß werden.

Beispiele

(1) Wir betrachten die Wurzelfunktion $\mathrm{sqrt} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, um den Entwicklungspunkt $a = 1$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{sqrt}(1) &= 1, \\ \mathrm{sqrt}'(1) &= \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}, \\ \mathrm{sqrt}''(1) &= \left.\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2}\right|_{x=1} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung lautet daher

$$T_2[\mathrm{sqrt}, 1](x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

Damit haben wir die parabelförmige Näherung für x-Werte in der Nähe von 1. Für eine einprägsame Näherungsformel lässt sich dies mit $\Delta x = x - 1$ schreiben als

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{8}(\Delta x)^2 \qquad \text{für kleine } \Delta x. \tag{7.10}$$

► **Zwischenfrage (2)** Wäre es nicht besser und einfacher, die Wurzelfunktion um 0 zu entwickeln?

(2) Wir betrachten die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ um den Entwicklungspunkt 0, suchen also nach einer Näherungsformel für kleine x. Für $a = 0$ nimmt die Taylor-Formel allgemein eine besonders einfache Gestalt an:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \ldots \tag{7.11}$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \sin' 0 &= \cos x\Big|_{x=0} = 1, \\ \sin'' 0 &= -\sin x\Big|_{x=0} = 0, & \sin''' 0 &= -\cos x\Big|_{x=0} = -1, \end{aligned}$$

und damit

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 \qquad \text{für kleine } x. \tag{7.12}$$

Verwenden wir nun (7.5),

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\Delta^{n+1},$$

um eine Obergrenze für den Fehler dieser Näherung für Werte etwa im Bereich $x \in [-\pi/4, \pi/4]$ zu ermitteln: Es ist also $\Delta = \pi/4$, und wir haben $n = 3$. Die Ableitungen des Sinus sind wieder Sinus- oder Cosinusfunktionen, besitzen also den Maximalwert 1. Wir könnten daher für eine grobe Abschätzung $M = 1$ verwenden. Wollen wir es genauer haben, müssen wir nach dem Maximalwert von $|\sin^{(4)} x|$ auf dem Intervall $[-\pi/4, \pi/4]$ fragen. Wegen $\sin^{(4)} x = \sin x$ beträgt er $\sqrt{2}/2$. Dies ergibt dann insgesamt die Obergrenze

$$|R_4(x)| \le \frac{\sqrt{2}/2}{4!}(\pi/4)^4 \approx 0{,}0112. \tag{7.13}$$

Der tatsächlich in dem Intervall auftretende maximale Fehler ist übrigens deutlich kleiner. Er tritt hier am Ende des Intervalls auf und beträgt ungefähr 0,0025.
(3) Wie man mit Hilfe von (6.32) leicht nachrechnet, gilt

$$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 \qquad \text{für kleine } x. \tag{7.14}$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Die Frage war, warum man die Wurzelfunktion nicht um 0 entwickelt.
Die Wurzelfunktion ist bei 0 nicht differenzierbar; sie besitzt hier eine vertikale Tangente. Daher kann sie nicht um 0 entwickelt werden.

7.4.1 Beispiel: $E = mc^2$

Nach der Relativitätstheorie besteht zwischen der Gesamtenergie E eines Systems und seiner Masse m der berühmte Zusammenhang

$$E = mc^2, \tag{7.15}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Diese *Äquivalenz von Masse und Energie* gilt ganz allgemein, z. B. auch für eine gesamte Sternengalaxie; ihre innere kinetische Energie beispielsweise bewirkt dann eine Erhöhung der Gesamtmasse.

Betrachten wir ein einzelnes Teilchen der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Auch für dieses Teilchen gilt $E = mc^2$, und seine Masse m hängt von seiner Geschwindigkeit v ab:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{mit der Ruhemasse } m_0. \tag{7.16}$$

Die Ruheenergie des Teilchens ist demnach $E_0 = m_0c^2$, und seine kinetische Energie ergibt sich aus

$$E_{\text{kin}} = E - E_0. \tag{7.17}$$

So die Aussagen der Relativitätstheorie. Um ihren Zusammenhang mit der klassischen Physik zu sehen, betrachten wir nun Geschwindigkeiten v, die klein sind im Vergleich mit c, und entwickeln eine Näherungsformel für die kinetische Energie für kleine $v/c =: x$.

Betrachten wir also den Ausdruck

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \tag{7.18}$$

und entwickeln ihn für kleine x: Es ist

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \frac{1}{24}f''''(0)x^4 \tag{7.19}$$

mit

$$
\begin{aligned}
f(0) &= (1-x^2)^{-1/2}\Big|_{x=0} = 1,\\
f'(0) &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)\Big|_{x=0} = x(1-x^2)^{-3/2}\Big|_{x=0} = 0,\\
f''(0) &= \left[(1-x^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}x(1-x^2)^{-5/2}(-2x)\right]_{x=0}\\
&= \left[(1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}\right]_{x=0} = 1,\\
f'''(0) &= \left[3x(1-x^2)^{-5/2} + 6x(1-x^2)^{-5/2} + 15x^3(1-x^2)^{-7/2}\right]_{x=0}\\
&= \left[9x(1-x^2)^{-5/2} + 15x^3(1-x^2)^{-7/2}\right]_{x=0} = 0,\\
f''''(0) &= \left[9(1-x^2)^{-5/2} + \ldots\right]_{x=0} = 9.
\end{aligned}
$$

Lesehilfe
Für die Ableitungen benötigst du die Kettenregel und die Produktregel. Und die Pünktchen bei der vierten Ableitung stehen für Terme, die x als Faktor enthalten und daher an der Stelle 0 keine Rolle spielen. Da wir keine fünfte Ableitung mehr benötigen, schreiben wir diese Terme gar nicht mehr auf.

Wir haben also

$$
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 \quad \text{für kleine } x
$$

bzw.

$$
\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 \quad \text{für } v \ll c. \tag{7.20}
$$

Dies ergibt nach (7.17) für die kinetische Energie

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &\approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) - m_0c^2\\
&= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0c^2\left(\frac{v}{c}\right)^4 \quad \text{für } v \ll c.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

Wir finden hier also zunächst die klassische Formel für die kinetische Energie wieder,

$$
E_{\text{kin}}^{\text{klassisch}} = \frac{1}{2}m_0v^2.
$$

Der nächste Term stellt die erste relativistische Korrektur dar. Schreibt man sie als

$$\frac{3}{8} m_0 c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^4 = \frac{3}{8} m_0 v^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

so erkennt man, dass sie mit dem Faktor $(v/c)^2$ gegen den führenden nicht-relativistischen Term unterdrückt ist.

Für „normale" irdische Geschwindigkeiten macht sich die relativistische Korrektur kaum bemerkbar: Satelliten fliegen beispielsweise mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung von $v = 10\,\mathrm{km/s}$, und für die Lichtgeschwindigkeit gilt $c \approx 300\,000\,\mathrm{km/s}$; wir haben also

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx \left(\frac{10}{300\,000}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}\right)^2 \approx 10^{-9}. \tag{7.22}$$

Die relativistische Korrektur tritt somit bei der kinetischen Energie des Satelliten tendenziell erst in der neunten Nachkommastelle auf.

7.5 Taylor-Reihen

Dehnt man die Taylor-Formel auf unendlich viele Glieder aus, so erhält man eine *Taylor-Reihe*:

Definition 7.1 *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf dem nicht-trivialen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in I$. Dann heißt*

$$T[f, a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die Taylor-Reihe *von f mit Entwicklungspunkt a.*

Wir haben es jetzt mit einer unendlichen Reihe zu tun, und bei einer unendlichen Reihe stellt sich stets die Frage nach der Konvergenz. Dazu halten wir fest:

- Für $x = a$ konvergiert die Taylor-Reihe trivialerweise und ist gleich $f(a)$, da dann alle Summanden bis auf den nullter Ordnung verschwinden.
- Ob die Reihe darüber hinaus in einem Bereich um a, oder auch auf ganz I, konvergiert, hängt von der betrachteten Funktion f und dem Entwicklungspunkt a ab.

Aber auch wenn Konvergenz vorliegt, ist zu beachten, dass die Taylor-Reihe $T[f, a]$ einer Funktion f *nicht* unbedingt der Funktion f entspricht. Es gibt Beispiele, bei denen das tatsächlich nicht der Fall ist.

Für uns sind natürlich die Fälle von Interesse, für die dies doch so ist, sich also eine Funktion durch ihre Taylor-Reihe darstellen lässt. Es gilt offenbar:

Die Taylor-Reihe $T[f,a](x)$ konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_{n+1}(x)$ der entsprechenden Taylor-Formel – siehe Satz 7.2 *– für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.*

Sehen wir uns einige Beispiele dazu an.

7.5.1 Sinus- und Cosinusreihe

Wir entwickeln die Sinusfunktion in eine Taylor-Reihe um 0, betrachten also die *Sinusreihe*

$$T[\sin,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{7.23}$$

Die darin auftretenden Ableitungen des Sinus lauten für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$$

Lesehilfe
Es ist $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin'''' = \sin$, ab hier geht es also wieder von vorne los. An der Stelle 0 haben wir also $\sin 0 = 0$, $\sin' 0 = 1$, $\sin'' 0 = 0$, $\sin''' 0 = -1$, $\sin'''' 0 = 0$ und immer so weiter …

Die Terme für gerade k in (7.23) verschwinden somit. Geben wir nun die ungeraden k durch $k = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ wieder, so lauten die ihnen entsprechenden Ableitungen $(-1)^m$. Insgesamt lässt sich die Reihe (7.23) daher schreiben als

$$T[\sin,0](x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{7.24}$$

Dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, lässt sich genauso wie für die Exponentialreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums zeigen, siehe Satz 3.1.

Lesehilfe
Hat man eine Summe, zu der nur die ungeraden Glieder beitragen, so kann man das schreiben als

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} a_k.$$

Will man den Zusatz beim Summationsindex vermeiden und explizit nur die ungeraden Zahlen ansprechen, so setzt man $k = 2m + 1$ und verwendet den neuen Index m. Damit wird offenbar jedes zweite k übersprungen:

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} a_k = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}.$$

Natürlich funktioniert das auch für gerade Indizes:

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{\infty} a_k = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}.$$

Sehen wir uns das Restglied der entsprechenden Taylor-Formel an. Es lautet in Lagrange-Form

$$R_{n+1}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

mit einem μ zwischen 0 und x. Wir wollen uns davon überzeugen, dass es für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, dass also gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Zunächst wissen wir, dass die Ableitungen des Sinus dem Betrag nach nicht größer werden als 1, d. h., es ist

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Betrachten wir nun den Grenzwert

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Er ist tatsächlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ gleich 0, wovon wir uns beispielsweise wie folgt überzeugen können: Für hinreichend großes n bzw. $n + 1$ haben wir

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n^*} \cdot \ldots$$

mit einem $n^* \geq 2|x|$. Ab n^* sind dann alle Faktoren kleiner als $1/2$, und für $n \to \infty$ sind es unendlich viele solche Faktoren; daher ist $g = 0$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Das bedeutet:

Die Sinusreihe (7.24) gibt für alle $x \in \mathbb{R}$ den Sinus wieder, d. h., es gilt

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \tag{7.25}$$

▶ **Zwischenfrage (3)** Für das Restglied des Sinus ist der Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^n}{n!}|$ zu betrachten. Der Ausdruck $\frac{x^n}{n!}$ ist nichts anderes als das Argument der Exponentialreihe. Inwiefern lässt sich auch daraus schließen, dass $g = 0$ sein muss?

Sehen wir uns nun die *Cosinusreihe* an – und werden sicher nicht überrascht sein, wenn alles sehr ähnlich ist –, also

$$T[\cos, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{7.26}$$

Die Ableitungen des Cosinus für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ lauten

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$$

Hier verschwinden also die Terme für ungerade k. Geben wir die geraden k durch $k = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ wieder, so lauten die ihnen entsprechenden Ableitungen $(-1)^m$. Insgesamt haben wir daher

$$T[\cos, 0](x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{7.27}$$

Wie die Sinusreihe ist auch diese Reihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ und besitzt ein verschwindendes Restglied, also:

Die Cosinusreihe (7.27) gibt für alle $x \in \mathbb{R}$ den Cosinus wieder, d. h., es gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \tag{7.28}$$

Es ist vielleicht überraschend, dass sich die periodischen Funktionen Sinus und Cosinus durch (unendliche) Summen von Potenzfunktionen darstellen lassen, die ja selbst nicht periodisch sind. In Abb. 7.2 ist die Situation für den Cosinus mit einigen führenden Termen der Reihe dargestellt: Je höher die Ordnung der Potenzen wird, umso mehr Wellenbewegungen der Endfunktion können dargestellt werden. Und für unendlich viele Glieder sind es dann alle.

Immerhin ist den Reihen für Sinus und Cosinus die Symmetrie der Funktionen sofort anzusehen:

Die Reihe des Sinus (Cosinus) als ungerade (gerade) Funktion enthält jeweils nur die ungeraden (geraden) Potenzen von x.

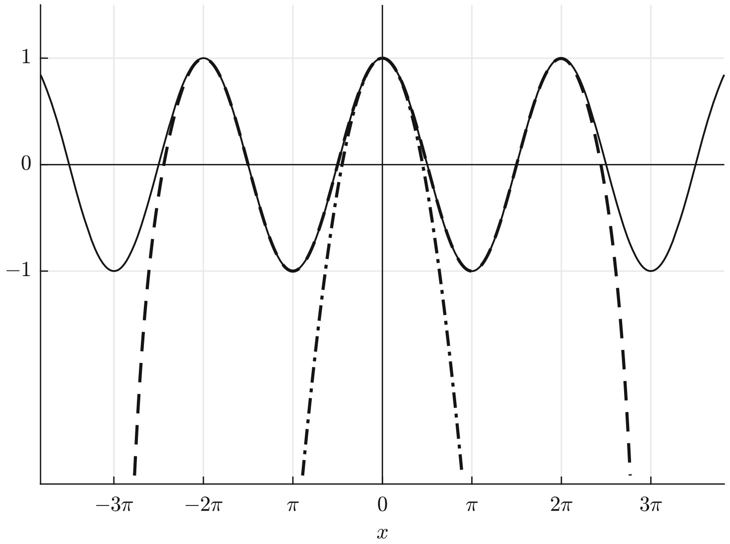

Abb. 7.2 Die Cosinusfunktion kann durch eine unendliche Taylor-Reihe um 0 dargestellt werden. Betrachtet man endlich viele Glieder – in der Abbildung sind neben Cosinus selbst die ersten zwei und die ersten zehn dargestellt – so erkennt man, dass die Cosinusfunktion lokal, d. h. in der Nähe des Entwicklungspunkts, und mit höherer Ordnung auch für die ersten zentralen Perioden sehr gut angenähert wird

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war, inwiefern sich der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |\frac{x^n}{n!}| = 0$ auch aus der Exponentialreihe erschließen lässt.
Die Exponentialreihe $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist eine konvergente Reihe. Eine Reihe $\sum_n a_n$ kann aber nur dann konvergent sein, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, siehe Satz 2.8. Also ist $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

7.5.2 Exponentialreihe

Die Exponentialfunktion ist bereits als unendliche Reihe definiert,

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Reihe ist gleichzeitig auch die Taylor-Reihe von exp mit Entwicklungspunkt 0.

▶ **Zwischenfrage (4)** Wie kann man sich davon überzeugen, dass die Exponentialreihe auch gleichzeitig die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion um 0 ist?

Aufgrund der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion kann aber auch ihre Taylor-Reihe für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ leicht angegeben werden, denn es ist

$$e^x = e^{a+x-a} = e^a e^{x-a} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k. \tag{7.29}$$

Ferner fällt beim Vergleich von sin und cos mit exp auf, dass die Reihen dieselbe grundsätzliche Struktur aufweisen. Für Sinus und Cosinus ist das sicher zu erwarten, aber die Exponentialfunktion scheint doch von diesen auf den ersten Blick grundverschieden zu sein. Tatsächlich hängen diese Funktionen aber eng zusammen, wie wir in Kap. 8.4 mit Hilfe der komplexen Zahlen sehen werden.

7.5.3 Logarithmusreihe

Wir wollen den Nachweis von (2.10) nachholen, d. h., wir wollen zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Dazu betrachten wir das Taylor-Polynom der Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ mit dem Entwicklungspunkt 0, $T_n[\ln(1+\mathrm{id}), 0](x)$: Es ist $\ln(1+0) = 0$, und weiter haben wir

$$\begin{aligned}
\ln'(1+x)\Big|_{x=0} &= \frac{1}{1+x}\bigg|_{x=0} = 1,\\
\ln''(1+x)\Big|_{x=0} &= \frac{-1}{(1+x)^2}\bigg|_{x=0} = -1,\\
\ln'''(1+x)\Big|_{x=0} &= \frac{2}{(1+x)^3}\bigg|_{x=0} = 2,\\
\ln^{(4)}(1+x)\Big|_{x=0} &= \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}\bigg|_{x=0} = -2\cdot 3,\\
\ln^{(5)}(1+x)\Big|_{x=0} &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}\bigg|_{x=0} = 2\cdot 3\cdot 4 \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Lesehilfe
Wir berechnen hier die Ableitungen $[\ln(1+x)]^{(k)}_{x=0}$. Weil die innere Ableitung von $1+x$ gleich 1 ist, können wir das auch schreiben und rechnen als $\ln^{(k)}(1+x)\big|_{x=0}$.

Wir erhalten also für beliebiges $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln^{(k)}(1+x)\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\Big|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Es ist daher

$$T_n[\ln(1+\mathrm{id}),0](x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \tag{7.30}$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\mu)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} x^{n+1}. \tag{7.31}$$

Lesehilfe
Fakultäten lassen sich schön kürzen: $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$ und $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Betrachten wir nun die Stelle $x = 1$: Das Restglied besitzt dann die Form

$$R_{n+1}(1) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} \tag{7.32}$$

mit einem μ zwischen 0 und 1. Offenbar gilt für jedes solches μ

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(1) = 0, \tag{7.33}$$

so dass die Taylor-Reihe $T[\ln(1+\mathrm{id}),0](1)$ mit dem Funktionswert $\ln(1+1) = \ln 2$ übereinstimmt. Daher ist

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$ •

Übrigens kann der Logarithmus mit der (7.30) entsprechenden Taylor-Reihe nicht nur für $x = 1$, sondern auch für alle x mit $|x| < 1$ dargestellt werden, d. h., es gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad \text{für } x \in \,]-1,1]. \tag{7.34}$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Man sollte sich davon überzeugen, dass die Exponentialreihe gleichzeitig die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion um 0 ist.
Wir rechnen einfach mal für den Entwicklungspunkt 0 nach: Es ist $\exp' = \exp = \exp'' = \exp^{(n)} = \ldots$, also $\exp^{(n)} 0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Und damit haben wir dann schon $T[\exp,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$.

Das Wichtigste in Kürze

- Das **Taylor-Polynom** verallgemeinert die Tangente an den Graphen einer Funktion. Es handelt sich um das Polynom n-ten Grads, bei dem alle Ableitungen bis zur Ordnung n mit der Funktion übereinstimmen.
- Die **Taylor-Formel** enthält den präzisen Zusammenhang zwischen dem Taylor-Polynom und der Funktion. Insbesondere gibt sie den Fehler an.
- Das Restglied der Taylor-Formel in **Lagrange-Form** erlaubt eine Abschätzung des Fehlers.
- Eine Funktion kann lokal durch ihr Taylor-Polynom **approximiert** werden. Diese Taylor-Näherung ist i. Allg. umso besser, je dichter man sich am Entwicklungspunkt befindet und je größer die Ordnung der Entwicklung ist. Die Güte einer Taylor-Näherung kann bei Bedarf anhand der Lagrange-Form des Restglieds abgeschätzt werden.
- Bei der **Taylor-Reihe** einer Funktion wird ihre Taylor-Summe bis ins Unendliche ausgedehnt. Wenn das Restglied dabei gegen Null geht, erhält man eine Darstellung der Funktion durch eine unendliche Reihe.
- Manche Funktionen können global durch **Taylor-Reihen** dargestellt werden. Dies trifft insbesondere auf die Funktionen exp, sin und cos zu.

Und was bedeuten die Formeln?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\Delta^{n+1}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^n),$$

$$f(a+\Delta x) \approx f(x) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad \text{für kleine } x, \quad T[f,a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^a}{k!}(x-a)^k.$$

Übungsaufgaben

A7.1 Gegeben seien eine hinreichend oft differenzierbare Funktion f und ein Punkt x_0. Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit die Parabel

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

in x_0 denselben Funktionswert und dieselbe erste und zweite Ableitung wie f aufweist?

A7.2 Gib die Taylor-Entwicklungen der Funktion cos bis zur vierten Ordnung für die Entwicklungspunkte $a_1 = 0$ und $a_2 = \pi/2$ an.

A7.3 Entwickle eine Näherungsformel für die Funktion arcsin für kleine Argumente, die über die lineare Näherung hinausgeht.

A7.4 Worin besteht der Nutzen der Lagrange-Form des Restglieds im Hinblick auf Anwendungen der Taylor-Formel?

A7.5 In einer Formelsammlung findet sich für die Wurzelfunktion die Näherungsformel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \dots$$

Verwende diese Formel, um eine Näherung von $\sqrt{\pi + 2x}$ für kleine x anzugeben. Kann auch eine Näherung von $\sqrt{x}$ für kleine x angegeben werden?

A7.6 Worin besteht der Unterschied zwischen der „Taylor-Formel“ und der „Taylor-Reihe“?

A7.7 Wie lauten die ersten zehn Glieder der Entwicklung der Exponentialfunktion um den Punkt $a = 1$?

A7.8 Wie zeigt man, dass die Taylor-Reihe einer Funktion tatsächlich gleich der Funktion ist?

8 Komplexe Zahlen und Euler-Formel

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Exponentialreihe eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit der Sinus- und Cosinusreihe aufweist. Tatsächlich besteht zwischen diesen – auf den ersten Blick und im Reellen – grundverschiedenen Funktionen eine enge Verwandtschaft, die jedoch erst im Rahmen der komplexen Zahlen sichtbar wird. Sie drückt sich in der so genannten Euler-Formel aus. Da diese Formel es insbesondere erlaubt, Schwingungsvorgänge statt mit Sinus oder Cosinus über eine Exponentialfunktion auszudrücken, besitzt sie auch für Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften eine große Bedeutung.

Damit wir die Euler-Formel formulieren und verstehen können, müssen wir uns zunächst mit den komplexen Zahlen vertraut machen.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Komplexe Zahlen sind nichts anderes als die Elemente des Körpers der komplexen Zahlen. Wir müssen uns also ansehen, wie dieser Körper funktioniert.
- Die komplexen Zahlen beinhalten die reellen Zahlen. Wie das aussieht, interessiert uns besonders.
- Komplexe Zahlen besitzen eine klare geometrische Bedeutung – wobei wir dem Namen „Gauß“ begegnen werden.
- Manche Dinge funktionieren im Komplexen wie im Reellen, andere nicht. Wir müssen hier genau unterscheiden und Vorsicht im Umgang mit komplexen Zahlen lernen.
- Wir benötigen insbesondere die Exponentialfunktion im Komplexen. Daher müssen wir uns auch mit der Konvergenz von unendlichen Summen im Komplexen befassen – zum Glück bleibt hier alles beim Alten.
- Die Euler-Formel ist ganz einfach herzuleiten: Die unendlichen Reihen machen es möglich.

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3_8

- Mit der Euler-Formel hat man auch gleich die Polarkoordinaten einer komplexen Zahl. Wir werden uns fast schon wundern, wie einfach das ist.
- Wir werden sehen, was „Einheitswurzeln“ sind. Die gibt es zwar auch im Reellen, aber da sind sie zu langweilig für ein eigenes Wort. Im Komplexen ist das anders.

8.1 Körper der komplexen Zahlen

Zahlen „funktionieren“, weil sie Elemente ihres Zahlkörpers sind. Das ist bei den reellen Zahlen so, und kann auch bei den komplexen Zahlen nicht anders sein. Sehen wir uns also den Körper der komplexen Zahlen an.

8.1.1 Definition

Die komplexen Zahlen entstehen, indem man für die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, also die Menge aller geordneten 2-Tupel reeller Zahlen, in folgender Weise eine Addition und eine Multiplikation definiert:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v), \tag{8.1}$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu). \tag{8.2}$$

Lesehilfe

Es ist vielleicht überraschend, dass wir es plötzlich mit 2-Tupeln zu tun haben. Die Wörter „zweidimensional“ oder „Vektor“ wollen wir hier jedoch nicht verwenden, weil sie irreführend sein können. Die 2-Tupel werden Zahlen sein und ihre Kompenenten zwei Teile der einen Zahl, für die wir bald auch eine andere Schreibweise verwenden.

Übrigens gibt es für Zweiervektoren auch gar keine Operation im Sinn von „Vektor · Vektor = Vektor“ – während (8.2) ja eben so etwas darstellt, nämlich „2-Tupel · 2-Tupel = 2-Tupel“. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt bekanntlich einen Skalar, es ist also eine Operation des Typs „Vektor · Vektor = Skalar“.

Während die Addition hier der „gewöhnlichen“ komponentenweisen Addition von 2-Tupeln entspricht, ist die Wirkung der Multiplikation weniger offensichtlich. Aber sie ist wohldefiniert, und es gilt

Satz 8.1 *Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Addition (8.1) und der Multiplikation (8.2) bildet einen Körper.*

Beweis Den Beweis wollen wir an dieser Stelle nicht ausführen; er besteht im Nachweis der einzelnen Körpereigenschaften und erfolgt ohne Schwierigkeiten. ∘

Diesen Körper nennt man den *Körper der komplexen Zahlen* und bezeichnet ihn mit $\mathbb{C}$. Sein Nullelement ist $(0, 0)$, das Einselement $(1, 0)$, und das Inverse eines Elements $(x, y) \neq (0, 0)$ lautet

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right). \tag{8.3}$$

Lesehilfe

Wir erinnern uns: Eine Menge $\mathbb{M}$ mit einer Addition „+" und einer Multiplikation „·" heißt ein Körper, wenn $(\mathbb{M}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, $(\mathbb{M}^*, \cdot)$ eine Gruppe ist und darüber hinaus die Distributivität gilt. Wir haben das für die reellen Zahlen, d. h. $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ gesehen.

Und Satz 8.1 besagt nun also, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit dem obigen „+" und „·" ebenfalls einen Körper bildet. Das Nullelement ist das neutrale Element der Addition, $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$, und das Einselement das neutrale Element der Multiplikation, $(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$. Beides siehst du leicht anhand der Definitionen in (8.1) und (8.2). Für das inverse Element muss man einen Augenblick rechnen.

Die obige Definition der *komplexen Zahlen*, also der Elemente von $\mathbb{C}$, als 2-Tupel, macht es sicherlich zunächst schwierig, diese Objekte mit „normalen" Zahlen in Verbindung zu bringen. Wir werden nun aber sehen, dass die reellen Zahlen auf einfache Weise in ihnen enthalten sind.

8.1.2 Zusammenhang mit reellen Zahlen

Für die speziellen komplexen Zahlen, bei denen die zweite Komponente 0 ist, gilt

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \qquad \text{und} \qquad (x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0).$$

Diese Zahlen unterscheiden sich also nur durch ihre Schreibweise von den reellen Zahlen x, u. Wir können daher die komplexen Zahlen der Form $(x, 0)$ mit den reellen Zahlen identifizieren und einfach schreiben

$$(x, 0) = x.$$

Auf diese Weise werden die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *zu einer Teilmenge der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Ferner gilt $(0, y) = (y, 0) \cdot (0, 1)$, so dass sich jede komplexe Zahl (x, y) schreiben lässt als

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot (0, 1). \tag{8.4}$$

Für die spezielle komplexe Zahl $(0, 1)$ führt man die abkürzende Bezeichnung

$$\mathrm{i} := (0, 1) \tag{8.5}$$

ein und erhält die folgende Schreibweise für beliebige komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$:

$$z = (x, y) = x + \mathrm{i}y. \tag{8.6}$$

Für die so genannte *imaginäre Einheit* i gilt

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{8.7}$$

Wir haben also die bemerkenswerte Eigenschaft, dass das Quadrat von i gleich -1 ist.

Die Darstellung (8.6) *ist die gebräuchliche Schreibweise für komplexe Zahlen. In ihr lassen sich sämtliche Rechnungen auf gewohnte Weise ausführen, wobei lediglich die Beziehung* $\mathrm{i}^2 = -1$ *zu beachten ist.*

Lesehilfe

Auf die Frage „Was ist i?“ kannst du einfach antworten mit: „Die Zahl i ist das Element $(0, 1)$ des Körpers der komplexen Zahlen.“ Damit versucht man gar nicht erst, sich irgendetwas darunter vorzustellen, sondern weiß, dass sich die Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ durch Nachrechnen ergibt.

Auch wenn historisch die Bezeichnung „imaginäre“ Einheit tatsächlich zunächst von einer „gedachten“ oder „vorgestellten“ Zahl mit eigenartigen Eigenschaften herrührte.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen erhält man jetzt durch normales Ausmultiplizieren:

$$(x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu + \underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} yv = xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu),$$

in Übereinstimmung mit (8.2), so dass man sich die ursprüngliche Definition für die Multiplikation gar nicht zu merken braucht.

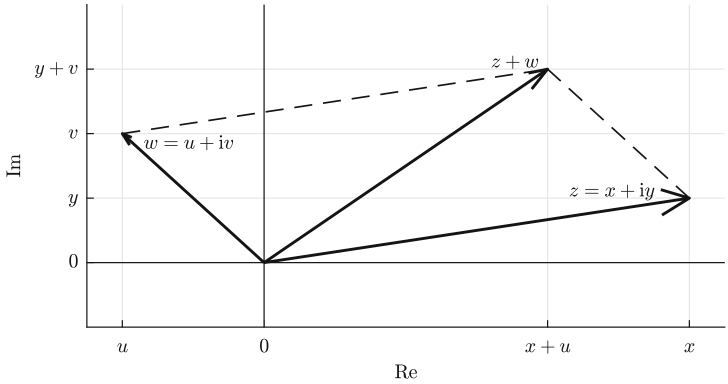

Abb. 8.1 Komplexe Zahlen werden in der Gauß-Zahlenebene dargestellt. Sie entsprechen Punkten bzw. Ortsvektoren in der Ebene, deren Rechtswert den Realteil und deren Hochwert den Imaginärteil wiedergeben. Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der gewöhnlichen Vektoraddition

8.2 Eigenschaften komplexer Zahlen

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, werden der *Realteil* und der *Imaginärteil* definiert als

$$\operatorname{Re} z := x \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} z := y. \tag{8.8}$$

Zwei komplexe Zahlen z, w sind somit genau dann gleich, wenn gilt

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w. \tag{8.9}$$

Komplexe Zahlen lassen sich in der so genannten *Gauß-Zahlenebene*[1] graphisch darstellen: Eine Zahl entspricht einem Punkt bzw. seinem Ortsvektor in der Ebene. Ihr Realteil wird dabei auf der Rechtsachse („reelle Achse“) eines kartesischen Koordinatensystems angegeben und ihr Imaginärteil auf der Hochachse („imaginäre Achse“). Der Zahlenstrahl der reellen Zahlen, also der Zahlen mit Imaginärteil 0, entspricht dann der reellen Achse (siehe Abb. 8.1).

Ein wichtiger Unterschied zwischen reellen und komplexen Zahlen besteht darin, dass komplexe Zahlen *nicht angeordnet werden können*, es ist also eine komplexe Zahl nicht kleiner oder größer als eine andere.

[1] Benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777–1855.

Lesehilfe
Reelle Zahlen können angeordnet werden, d. h., eine reelle Zahl ist größer oder kleiner als eine andere reelle Zahl, sie liegt weiter rechts oder links auf dem Zahlenstrahl. Für Punkte in der Ebene hingegen besteht eine solche Relation nicht mehr: Sie lassen sich nicht anordnen.

8.2.1 Komplexe Konjugation

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiert man die *konjugiert komplexe Zahl*

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y, \tag{8.10}$$

es wird also das Vorzeichen des Imaginärteils gewechselt. In der Gauß-Zahlenebene entsteht $\overline{z}$ aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Offenbar gilt

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})\,, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})\,. \tag{8.11}$$

Ebenso einfach nachzurechnen sind die folgenden Rechenregeln ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$\overline{(\overline{z})} = z, \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}. \tag{8.12}$$

Lesehilfe
Wir werden sehen, dass die konjugiert komplexe Zahl zur Formulierung verschiedener Sachverhalte nützlich ist.

► **Zwischenfrage (1)** Zeige die Dritte der Formeln (8.12), also dass gilt $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

8.2.2 Betrag

Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, ist der Ausdruck

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 \tag{8.13}$$

eine nicht-negative reelle Zahl. Man kann daher den *Betrag von z* definieren als

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}}. \tag{8.14}$$

Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist also

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8.15}$$

Dieser Betrag entspricht in der Gauß-Zahlenebene dem Abstand des Punkts z vom Nullpunkt bezüglich der gewöhnlichen euklidischen Metrik. Der Betrag einer Zahl ändert sich nicht unter komplexer Konjugation, und er ist offenbar genau dann Null, wenn die Zahl selbst Null ist.

Lesehilfe
Man kann in der Ebene – und nicht nur dort – verschiedene Abstandsbegriffe definieren. Das ist die Metrik. Und die gewöhnliche euklidische Metrik entspricht dem „normalen" Abstand, den man mit einem Lineal nachmessen könnte.

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x|^2 = x^2$. Dies ist bei komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ *nicht* mehr der Fall: $|z|^2 = z\overline{z}$ ist eine reelle Zahl, während es sich bei $z^2 = zz$ i. Allg. um eine komplexe Zahl handelt.

Der Betrag in $\mathbb{C}$ erfüllt

Satz 8.2 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

(1) $|zw| = |z||w|$,
(2) Dreiecksungleichung: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis
(1) Es ist $|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} \overset{(8.12)}{=} zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$.
(2) Für alle komplexen Zahlen c ist offenbar $\operatorname{Re} c \leq |c|$. Speziell gilt also für $c = z\overline{w}$

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| \overset{(1)}{=} |z||\overline{w}| = |z||w|.$$

Außerdem ist $z\overline{w} + w\overline{z} \overset{(8.12)}{=} z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})} \overset{(8.11)}{=} 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \overset{(8.12)}{=} (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 . \end{aligned}$$

●

► **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Es sollte $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ gezeigt werden.
Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$zw = (x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2 yv = xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu).$$

und daher

$$\overline{zw} = xu - yv - \mathrm{i}(xv + yu).$$

Jetzt sehen wir uns die andere Seite an,

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x - \mathrm{i}y)(u - \mathrm{i}v) = xu - \mathrm{i}xv - \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2 yv = xu - yv - \mathrm{i}(xv + yu),$$

und erhalten dasselbe.

Beispiele

(1) Die Multiplikation komplexer Zahlen, deren Real- und Imaginärteil angegeben sind, erfolgt auf „normale“ Weise, wobei die Regel $\mathrm{i}^2 = -1$ zu beachten ist. So ist etwa

$$(3+2\mathrm{i})(1-7\mathrm{i}) = 3 - 21\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 14\mathrm{i}^2 = 3 - 19\mathrm{i} + 14 = 17 - 19\mathrm{i}.$$

Bei der Division zweier komplexer Zahlen steht man vor dem Problem, das „i“ aus dem Nenner bekommen zu müssen. Hier hilft der Trick des Erweiterns mit dem konjugiert Komplexen des Nenners, denn für $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} \tag{8.16}$$

ein Ausdruck, dessen Nenner reell ist. Zum Beispiel:

$$\frac{8-\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}} = \frac{(8-\mathrm{i})(7+\mathrm{i})}{49+1} = \frac{57+\mathrm{i}}{50} = \frac{57}{50} + \frac{1}{50}\mathrm{i}.$$

► **Zwischenfrage (2)** Verwende den „Trick“ aus (8.16), um das inverse Element zu $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, zu berechnen.

(2) Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten, also Gleichungen der Form

$$z^2 + pz + q = 0 \qquad \text{mit } p, q \in \mathbb{R}, \tag{8.17}$$

besitzen über $\mathbb{C}$ stets die beiden (nicht notwendig verschiedenen) Lösungen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{8.18}$$

Für $d := p^2/4 - q \geq 0$ hat man die bekannten reellen Lösungen, und für $d < 0$ erhält man $\sqrt{d} = \sqrt{(-1)(-d)} = \sqrt{\mathrm{i}^2(-d)} = \mathrm{i}\sqrt{-d}$ mit $-d > 0$, also $\sqrt{-d} \in \mathbb{R}_+^*$.

Zum Beispiel:

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Warum komplexe Zahlen?

Wir wollen uns zwischendurch kurz fragen, wozu man sich eigentlich mit komplexen Zahlen befasst.

Nun gut, unser Ziel ist die Euler-Formel. Dazu müssen wir die Exponentialfunktion im Komplexen betrachten. Aber auch darüber hinaus sind die komplexen Zahlen von teilweise grundlegender Bedeutung. Dazu halten wir Folgendes fest:

- Beschäftigt man sich intensiver mit komplexen Zahlen und betrachtet insbesondere Funktionen auf $\mathbb{C}$, so stellt man fest, dass es sich um eine „natürliche Erweiterung" der reellen Zahlen handelt. Etliche Funktionen enthüllen erst über $\mathbb{C}$ ihre volle Bedeutung, und es lassen sich viele Zusammenhänge zwischen Funktionen finden, die im Reellen nicht sichtbar sind. Die Euler-Formel ist nur ein Beispiel dafür.
- Für komplexe Zahlen gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*: *Jedes nicht konstante Polynom besitzt über* $\mathbb{C}$ *mindestens eine Nullstelle.* Das ist gleichbedeutend damit, dass ein Polynom n-ten Grads über $\mathbb{C}$ stets in n Linearfaktoren zerfällt (ggf. mit Vielfachheiten größer 1). Man sagt, $\mathbb{C}$ sei *algebraisch abgeschlossen*. Für die reellen Zahlen ist das nicht der Fall. Beispielsweise lässt sich das Polynom $x^2 + 1$ über $\mathbb{R}$ nicht faktorisieren, während über $\mathbb{C}$ gilt $x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$.
- Es gibt in der Natur keine komplexwertigen Größen. Sämtliche Messwerte sind reell. Trotzdem kann es auch in Naturwissenschaft und Technik sinnvoll sein, mit komplexen Zahlen zu rechnen. Der Trick besteht dann darin, ein (Rechen-) Problem künstlich komplex zu erweitern, also eine imaginäre Komponente hinzuzufügen, um den Vorteil des Rechnens im Komplexen zu nutzen, und dann schlussendlich den Realteil des so gewonnenen Ergebnisses zu verwenden. Genau für solche Rechenverfahren kommt die Euler-Formel zum Tragen.

▶ **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Es sollte das Inverse zu $z = x + \mathrm{i}y \neq 0, x, y \in \mathbb{R}$, berechnet werden.
Es ist

$$z^{-1} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-x}{x^2 + y^2},$$

in Übereinstimmung mit (8.3).

8.3 Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion wird in $\mathbb{C}$ – wie im Reellen – über die Exponentialreihe definiert. Um zu sehen, dass diese Reihe auch in $\mathbb{C}$ wohldefiniert und konvergent ist, benötigen wir die entsprechenden Grundbegriffe für komplexe Zahlen.

8.3.1 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Die komplexen Zahlen unterscheiden sich in einigen Punkten von den reellen Zahlen. Insbesondere können sie nicht mehr auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, sondern dazu ist die Gauß-Zahlenebene notwendig. Trotzdem lassen sich die wesentlichen Aussagen zur Konvergenz von Folgen und Reihen fast wortwörtlich von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen.

Folgen

Genau wie im Reellen, vgl. Abschn. 2.1.1, setzt man:

Definition 8.1 *Eine Folge* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen heißt* konvergent *gegen* $c \in \mathbb{C}$, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |c_n - c| < \varepsilon\ \forall n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Eine Folge konvergiert also gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn fast alle Folgenglieder in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von c liegen. Geometrisch bedeutet dies in der Gauß-Zahlenebene, dass sie in einem Kreis mit dem Radius ε um c liegen müssen.

Lesehilfe

In $\mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand der Zahlen x und y auf dem Zahlenstrahl. Auch in $\mathbb{C}$ steht $|z - w|$ für den Abstand der beiden Zahlen z und w, die sich jetzt allerdings in der Gauß-Zahlenebene befinden; $|z - w|$ ist die Länge des „Differenzvektors" der beiden „Zahlvektoren".

Für Folgen komplexer Zahlen gilt der

Satz 8.3 *Es sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge* (c_n) *konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen* $(\operatorname{Re} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\operatorname{Im} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergieren. Es gilt dann*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} c_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Im} c_n). \tag{8.19}$$

Beweis Zur einfacheren Schreibweise setzen wir $a_n := \operatorname{Re} c_n$ und $b_n := \operatorname{Im} c_n$, haben also $c_n = a_n + \mathrm{i}b_n$.

„$\Rightarrow$": Die Folge (c_n) konvergiere gegen $c = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach Definition: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $|c_n - c| < \varepsilon\ \forall n \geq N$. Daraus folgt $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c| = |\operatorname{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon, \\ |b_n - b| &= |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c| = |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert (a_n) gegen $a = \operatorname{Re} c$ und (b_n) gegen $b = \operatorname{Im} c$.

„$\Leftarrow$": Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gibt es $\forall \varepsilon > 0$ Werte $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $|a_n - a| < \varepsilon/2\ \forall n \geq N_1$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2\ \forall n \geq N_2$. Wir setzen nun $c := a + \mathrm{i}b$ und $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung $\forall n \geq N$

$$|c_n - c| = |(a_n - a) + \mathrm{i}(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \bullet$$

Mit diesem Satz ist die Konvergenz in ℂ auf die Konvergenz in ℝ zurückgeführt. Damit lassen sich die aus dem Reellen bekannten Begriffe und Zusammenhänge auf komplexe Folgen übertragen. Insbesondere gilt:

- Auch in ℂ konvergiert jede Cauchy-Folge.
- Die Rechenregeln für Summen- und Produktfolgen gelten auch für komplexe Folgen.

► **Zwischenfrage (3)** Warum wird im zweiten Teil des Beweises von Satz 8.3 für N_1 und N_2 nicht ε, sondern jeweils $\varepsilon/2$ verwendet? Und würde auch ε gehen?

Reihen

Auch komplexe Reihen verhalten sich analog zum Reellen, vgl. Abschn. 2.2:

Definition 8.2 *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ komplexer Zahlen c_k heißt* konvergent, *wenn die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Sie heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ konvergiert.*

Wie wir wissen, kann die Frage nach der Konvergenz einer unendlichen Reihe mit Hilfe unterschiedlicher Kriterien untersucht werden, und die meisten können im Komplexen genau wie im Reellen formuliert und bewiesen werden. So gilt auch hier das Quotientenkriterium:

Satz 8.4 (Quotientenkriterium) *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ so, dass gilt*

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut.

Beweis Der Beweis erfolgt genau wie im Reellen, siehe Satz 2.9. •

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Es war gefragt, warum im zweiten Teil des Beweises von Satz 8.3 zweimal $\varepsilon/2$ verwendet wird.
Dieser „Trick" findet sich auch in anderen Beweisen. In der Grenzwertbedingung ist von einem beliebigen ε die Rede. Also kann man auch die Hälfte von einem (anderen) beliebigen ε nehmen oder das Siebenfache. Hier wird nur aus kosmetischen

Gründen $\varepsilon/2$ genommen, damit in der abschließenden Grenzwertbedingung, auf die das Argument abzielt, dann einfach ε steht. Nähme man für N_1 und N_2 stattdessen ε, würde unten 2ε stehen, und alles wäre genauso in Ordnung. Nur – vielleicht – etwas weniger schick.

8.3.2 Exponentialreihe

Wir sind nun in der Lage, die Exponentialreihe im Komplexen zu verwenden, denn es gilt:

Satz 8.5 *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe* $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *absolut konvergent.*

Beweis Der Beweis erfolgt wörtlich wie im Reellen anhand des Quotientenkriteriums, siehe Satz 3.1. •

Lesehilfe
Anhand ihrer Definition als unendliche Reihe lässt sich die Exponentialfunktion problemlos ins Komplexe übertragen. Zu beachten ist natürlich, dass mit komplexen Argumenten z im Allgemeinen auch $\exp(z)$ komplexwertig sein wird – allerdings nicht immer, wie wir sehen werden.

8.3.3 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Aus der Exponentialreihe ergibt sich die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z)$. Der Graph einer komplexwertigen Funktion über $\mathbb{C}$ kann, im Unterschied zum Reellen, nicht vorgestellt werden; dies erforderte ja eine vierdimensionale Darstellung. Natürlich ist die reelle Exponentialfunktion in der komplexen enthalten: Betrachtet man den Schnitt längs der reellen Argumentachse durch den Graphen von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so erhält man reelle Funktionswerte und den bekannten Graphen der reellen Exponentialfunktion (siehe Abb. 8.2).

Lesehilfe
Bei einer reellen Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Graph bekanntlich zweidimensional. Jedem Argumentwert, der auf der Rechtsachse zu finden ist, wird ein Funktionswert auf der Hochachse zugeordnet.

Bei einer komplexen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liegen die Argumente als komplexe Zahlen in der Gauß-Ebene. Und man muss nun jedem Punkt dieser

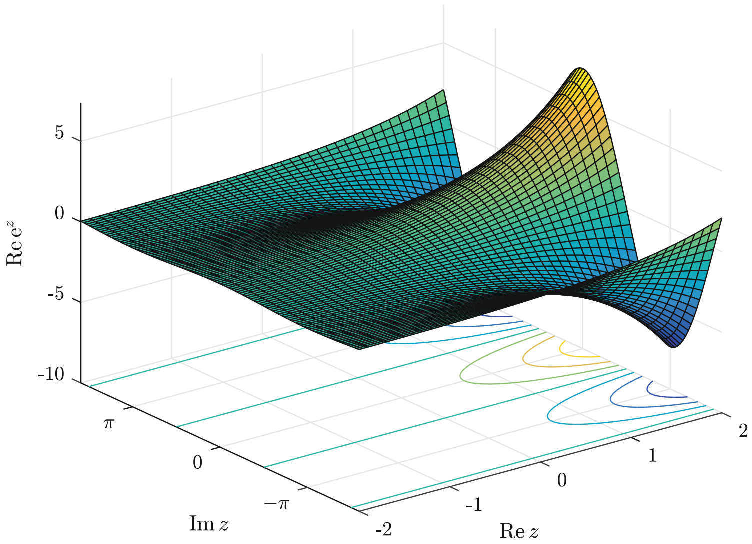

Abb. 8.2 Stellt man den Realteil der Exponentialfunktion, d. h. die Funktion $z \mapsto \operatorname{Re} e^z$, über der Gauß-Ebene für z dar, so ergibt sich ein dreidimensionales „Gebirge". Über der Achse $\operatorname{Im} z = 0$ findet sich der Graph der reellen Exponentialfunktion wieder; hier ist $\operatorname{Im} e^z = 0$. (Der Imaginärteil könnte in derselben Weise grafisch dargestellt werden; für die gesamte Funktion $z \mapsto e^z$ ist dies jedoch nicht möglich.)

Ebene seinen Funktionswert zuordnen, der selbst wieder in einer Gauß-Ebene liegt. Dafür benötigte man eine vierdimensionale Darstellung.

Beschränkt man sich allerdings auf Funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit reellen Funktionswerten auf $\mathbb{C}$, so muss einem Punkt der Gauß-Ebene nur ein reeller Zahlwert zugeordnet werden, der, wenn man sich die Argument-Gauß-Ebene liegend vorstellt, als Höhe vorgestellt werden kann. So erhält man als Graph ein „Gebirge". Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ könnte man daher z. B. die Funktionen $z \mapsto |f(z)|$, $z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$ oder $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$ als Gebirge darstellen und so zumindest gewisse Aspekte der Gesamtfunktion sichtbar machen.

Die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktion lassen sich aus dem Reellen ins Komplexe übertragen. Wir fassen sie in folgendem Satz zusammen:

Satz 8.6

(1) *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w). \tag{8.20}$$

(2) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(z) \neq 0$.

(3) *Für beliebige* $n \in \mathbb{N}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt die Restgliedabschätzung*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + R_{n+1}(z) \tag{8.21}$$

mit

$$|R_{n+1}(z)| \le 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{für alle } z \textit{ mit } |z| \le 1 + \frac{n}{2}. \tag{8.22}$$

(4) *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$, *ist auf ganz* $\mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis

(1) Der Beweis erfolgt wie im Reellen, siehe Abschn. 3.2.1.

(2) Wie im Reellen gilt aufgrund der Funktionalgleichung auch $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1,$$

so dass $\exp(z)$ nicht 0 sein kann.

(3) Beweis wie im Reellen, siehe Satz 3.6.

(4) Die Stetigkeit einer komplexwertigen Funktion wird wie im Reellen definiert: *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$ *auf einer Teilmenge* $D \subseteq \mathbb{C}$ *heißt* stetig *im Punkt* $w \in D$*, falls gilt* $\lim_{z\to w} f(z) = f(w)$*, d. h., wenn für jede Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Punkten* $z_n \in D \setminus \{w\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(w)$.
Die Stetigkeit von exp ergibt sich dann ebenfalls analog zum Reellen aus der Restgliedabschätzung mit $n = 0$: $\exp(z) = 1+R_1(z)$, d. h. $\exp(z)-1 = R_1(z)$ mit $|R_1(z)| \le 2|z|$ für $|z| \le 1$. Aus $|\exp(z) - 1| \le 2|z|$ folgt $|\exp(z) - 1| \overset{|z|\to 0}{\longrightarrow} 0$, d. h. $\exp(z) \overset{|z|\to 0}{\longrightarrow} 1$. Es sei nun $w \in \mathbb{C}$ und (z_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} z_n = w$, also $\lim_{n\to\infty}(z_n - w) = 0$. Dann folgt aus den obigen Überlegungen $\lim_{n\to\infty} \exp(z_n - w) = 1$ und mit der Funktionalgleichung weiter $\lim_{n\to\infty} \exp(z_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(w + z_n - w) = \lim_{n\to\infty} \exp(w)\exp(z_n - w) = \exp(w)$. •

Lesehilfe

Im Reellen ist nicht nur $\exp(x) \neq 0$, sondern auch $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies kann natürlich nicht ins Komplexe übertragen werden, da $\exp(z)$ i. Allg. nicht reell ist und daher keine Größer-kleiner-Relationen existieren. Aber auch wenn $\exp(z)$ reell ist, braucht es nicht positiv zu sein; z. B. ist $\exp(\mathrm{i}\pi) = -1$, siehe (8.25).

Das konjugiert Komplexe der Exponentialreihe kann auf einfache Weise berechnet werden – was auch im Zusammenhang mit der Euler-Formel nützlich sein wird:

Satz 8.7 *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Beweis Für endliche Summen und Produkte kann nach (8.12) die Summation $(*)$ bzw. die Multiplikation $(**)$ mit der Konjugation vertauscht werden. Für $s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ gilt daher

$$\overline{s_n(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} \stackrel{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = s_n(\overline{z}).$$

Da die Konjugation aufgrund von Satz 8.3 auch mit der Limesbildung vertauscht werden darf, folgt daraus

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} s_n(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} = \overline{\exp(z)}. \qquad \bullet$$

Lesehilfe zum Beweis
(8.12) besagt $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. Dies kann man auch so ausdrücken: Es ist egal, ob man zuerst summiert (multipliziert) oder zuerst komplex konjugiert. Beide Operationen können daher vertauscht werden. Und wenn das für zwei Summanden (Faktoren) gilt, dann auch für drei usw. bis hin zu endlich vielen: Drei Summanden führt man auf die Regel für zwei Summanden zurück,

$$\overline{z+w+u} = \overline{(z+w)+u} = \overline{z+w} + \overline{u} = \overline{z} + \overline{w} + \overline{u},$$

so geht es dann weiter mit vier Summanden, $\overline{z+w+u+v} = \overline{(z+w+u)+v}$ usw. bis hin zu n Summanden mit beliebigen $n \in \mathbb{N}^*$. Beliebiges n heißt aber immer endlich viele. Analog verhält es sich natürlich bei Produkten.

8.4 Euler-Formel

Die *Euler-Formel*[2] stellt einen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und Cosinus bzw. Sinus her, der im Komplexen sichtbar wird und den wir nun leicht herleiten können. Die Euler-Formel ist insbesondere auch für praktische Anwendungen der komplexen Zahlen von zentraler Bedeutung.

Wie wir wissen, lassen sich die reelle Cosinus- und die reelle Sinusfunktion jeweils über ihre Taylor-Reihe um 0, d. h. in folgender Weise durch unendliche Reihen darstellen:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

[2] Benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783.

siehe Abschn. 7.5.1. Diese Reihen ähneln in ihrer Struktur in auffälliger Weise der Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Cosinus und Sinus besitzen jeweils nur jeden zweiten Summanden, zusammen mit einem alternierenden Vorzeichen. Den genauen Zusammenhang zwischen den entsprechenden Funktionen erkennt man nun, wenn man die Exponentialreihe für reinimaginäre Argumente $z = \mathrm{i}x$, $x \in \mathbb{R}$, betrachtet, und sie in Real- und Imaginärteil aufteilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \exp(\mathrm{i}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{= \cos x} + \mathrm{i} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{= \sin x}.
\end{aligned}$$

Lesehilfe
Bei der obigen Aufteilung wird eine unendliche Summe in zwei unendliche Summen aufgeteilt, nämlich in die mit geraden und mit ungeraden Exponenten. Zur größeren Klarheit wurden neue Summenindizes verwendet. Der Summand mit $k = 0$ findet sich jetzt in der ersten Summe mit $n = 0$ wieder, der mit $k = 1$ in der zweiten mit $m = 0$, $k = 2$ entspricht $n = 1$, $k = 3$ entspricht $m = 1$ usw.

Außerdem ist $\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{i}^2)^n = (-1)^n$ und $\mathrm{i}^{2m+1} = \mathrm{i}^{2m}\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}(-1)^m$, und letzteres i kann man als konstanten Faktor vor die Summe ziehen.

Wir haben soeben bewiesen:

Satz 8.8 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die* Euler-Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \tag{8.23}$$

Auch ohne Euler-Formel sieht man, dass die speziellen komplexen Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x \in \mathbb{R}$, in der Gauß-Zahlenebene auf dem Einheitskreis liegen, denn es ist

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^0 = 1, \tag{8.24}$$

und eine Zahl mit dem Betrag 1 liegt auf dem Einheitskreis.

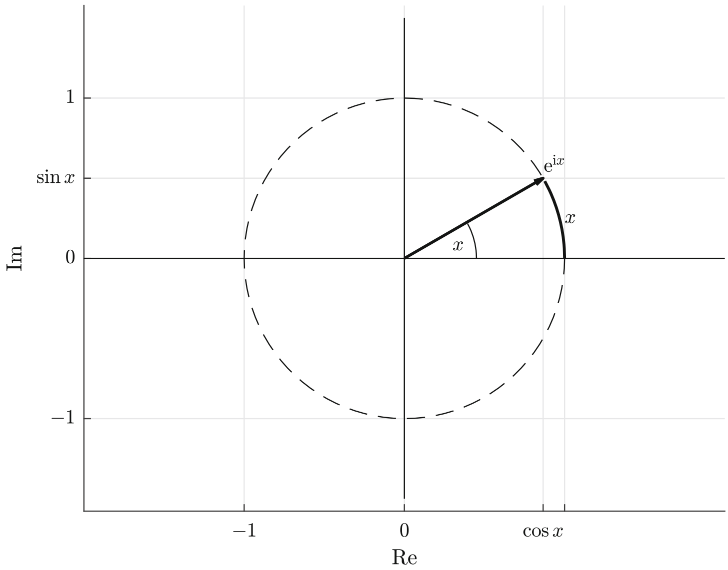

Abb. 8.3 Die speziellen Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x \in \mathbb{R}$, liegen in der Gauß-Zahlenebene auf dem Einheitskreis. Aus $\operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x$ und $\operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sin x$ ergibt sich, dass sie um den Winkel x gegen die Zahl Eins gedreht sind. Der Winkel entspricht der orientierten Länge des Bogens von Eins nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ längs des Einheitskreises

► **Zwischenfrage (4)** Warum ist, wie in (8.24) verwendet, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$?

Mit der Euler-Formel erkennt man darüber hinaus, dass *die Zahl* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *um den Winkel* x *gegen die Zahl Eins gedreht ist* (siehe Abb. 8.3, vgl. auch Abb. 5.1). Einige spezielle Werte lassen sich unmittelbar ablesen; so ist beispielsweise

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1. \tag{8.25}$$

Mit Cosinus und Sinus ist auch die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ periodisch:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}. \tag{8.26}$$

Und die Symmetrien von Cosinus und Sinus ergeben erneut, dass gilt

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \cos x - \mathrm{i}\sin x, \tag{8.27}$$

was nichts anderes ist als $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

Lesehilfe
Den wichtigen Nachweis der Euler-Formel kannst du dir übrigens leicht merken. Zugegeben, man muss die Cosinus- und Sinusreihe kennen, und die Exponentialreihe natürlich auch. Und dann merkt man sich, dass die Exponentialreihe speziell für rein-imaginäre Argumente zu bilden ist – schließlich startet die Formel ja mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ – und diese Summe aufgeteilt wird in die beiden Teilsummen mit den geraden und ungeraden Exponenten. Dann die Potenzen von i verarbeiten, Cosinus und Sinus wiedererkennen, und fertig.

Aus der Euler-Formel ergibt sich sofort die folgende Darstellung für Cosinus und Sinus:

Satz 8.9 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right). \tag{8.28}$$

Aufgrund dieser Zusammenhänge, oder auch einfach über

$$\cos x = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin x = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right),$$

können Berechnungen mit Cosinus und Sinus oftmals auf der Ebene von Exponentialfunktionen ausgeführt werden, was aufgrund der einfacheren Rechenregeln vorteilhaft sein kann.

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, warum gilt $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.
Das erste Gleichheitszeichen ist gerade die Aussage von Satz 8.7. Und dann ist für reelle x natürlich $\overline{\mathrm{i}x} = -\mathrm{i}x$.

► **Zwischenfrage (5)** Wie kommt man zu (8.28)?

8.4.1 Beispiel: Beweis der Additionstheoreme

Als ein Beispiel für die Verwendung der Euler-Formel beweisen wir die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, d. h. die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültigen Formeln

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

siehe Satz 5.2. Aufgrund der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion gilt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}. \tag{8.29}$$

Für die linke Seite dieser Gleichung haben wir aufgrund der Euler-Formel

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y) \tag{8.30}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos x\cos y + i\cos x\sin y + i\sin x\cos y + i^2\sin x\sin y \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\,. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteil gleich sind. Die Gleichheit der Realteile von (8.30) und (8.31) ist gleichbedeutend mit dem Cosinus-Additionstheorem und die Imaginärteile ergeben das Sinus-Additionstheorem. •

► **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Es sollten (8.28) bewiesen werden.
Zunächst sind (8.28) eigentlich nichts anderes als (8.11) für die spezielle komplexe Zahl $z = e^{ix}$. Oder du rechnest direkt nach, zum Beispiel für den Sinus

$$\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}(\cos x + i\sin x - (\cos x - i\sin x)) = \frac{1}{2i}(2i\sin x) = \sin x.$$

8.5 Polarkoordinaten

Wie wir gesehen haben, wird der Einheitskreis in der Gauß-Zahlenebene durch die Zahlen $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, gegeben. Erlaubt man die Multiplikation dieser Zahlen mit einem beliebigen Parameter $r \in \mathbb{R}_+$, so lässt sich jeder Punkt der Zahlenebene erreichen. Auf diese Weise erhalten wir die *Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen*:

Satz 8.10 *Jede komplexe Zahl z lässt sich schreiben als*

$$z = re^{i\varphi} \qquad \textit{mit } \varphi \in \mathbb{R} \textit{ und } r = |z| \in \mathbb{R}_+.$$

Für $z \neq 0$ ist φ dabei bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Man nennt φ das Argument *von z.*

Beweis Zum Beweis konstruieren wir r und φ: Für $z = 0$ ist zunächst $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$ mit beliebigem $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ setzen wir $r := |z|$ und $z_0 := z/r$. Dann ist $|z_0| = 1$, und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z_0 =: a + ib$ gilt $a^2 + b^2 = 1$ und $|a| \leq 1$. Für $b \geq 0$ wählen wir $\varphi := \arccos a$ und für $b < 0$ wählen wir $\varphi := -\arccos a$. •

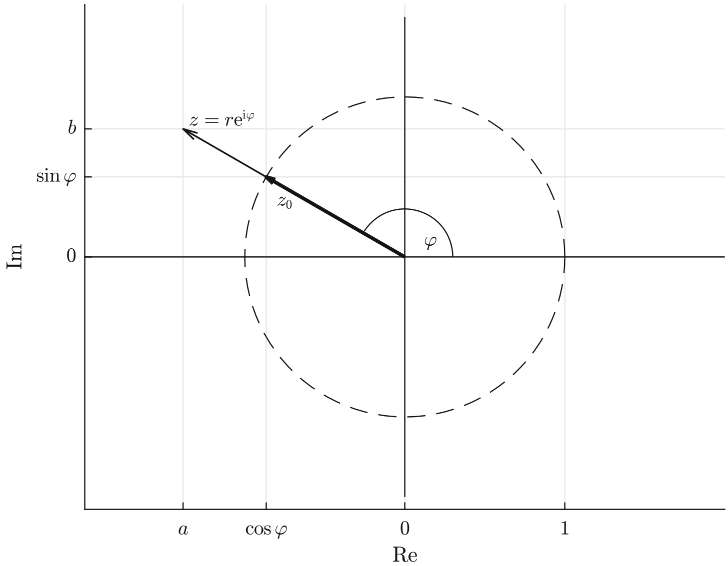

Abb. 8.4 Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ besitzt die Polarkoordinatendarstellung $z = re^{i\varphi}$. Dabei ist $r = |z|$, und die Phase φ entspricht dem orientierten Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor von z in der Gauß-Ebene. Die Zahl $z_0 := z/r = e^{i\varphi}$ liegt in derselben Richtung wie z auf dem Einheitskreis

Lesehilfe zum Beweis
Wenn z in der oberen Halbebene liegt, liegt das Argument φ nach der obigen Konstruktion im Bereich von 0 bis π, und die untere Halbebene wird über Winkel von 0 bis $-\pi$ erreicht. Insgesamt ist also hier $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$.

Die praktische Bestimmung von φ für ein gegebenes z fällt nicht schwer, wenn man sich die geometrische Lage in der Gauß-Ebene klarmacht – siehe Abb. 8.4 – und die normalen Methoden zur Winkelbestimmung verwendet, zum Beispiel auch unter Verwendung des Arcustangens. Wir halten noch einmal fest:

Das Argument φ von z gibt den orientierten Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor von z in der Gauß-Ebene an.

Mit $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ lassen sich sämtliche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ beschreiben, und mit dieser Festlegung ist das Argument dann eindeutig bestimmt. Aber auch $\varphi \in [0, 2\pi[$ ist eine sinnvolle Festlegung für ein eindeutiges Argument.

Beispiele
Es ist

$$i = 1 \cdot e^{i\pi/2}, \qquad 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad 7 = 7e^{i\cdot 0}, \qquad -7 = 7e^{i\pi}$$

und

$$2 + 3\mathrm{i} = \sqrt{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan\frac{3}{2}.$$

8.5.1 Multiplikation komplexer Zahlen

Wie wir wissen, entspricht die Addition zweier komplexer Zahlen der „gewöhnlichen Addition“ ihrer Zahlvektoren. Um zu verstehen, was die Multiplikation zweier komplexer Zahlen geometrisch bedeutet, betrachten wir die Polarkoordinatendarstellung für das Produkt einer komplexen Zahl $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit einer Zahl $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$:

$$zw = |z||w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}. \tag{8.32}$$

Man erhält also das Produkt zweier komplexer Zahlen, indem man *ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert*.

Die Multiplikation der Zahl z mit der Zahl w entspricht somit einer *Drehstreckung* des Ortsvektors der Zahl z: einer Drehung um den Winkel ψ zusammen mit einer Streckung mit dem Faktor $|w|$ (für $|w| < 1$ entspricht dies natürlich einer Stauchung).

8.5.2 n-te Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ bezeichnet man als die *n-ten Einheitswurzeln*.

Lesehilfe
Die Lösung der reellen Gleichung $x^2 = c > 0$ ist eine Wurzel, genauer die zwei Wurzeln $\pm\sqrt{c}$. Die Lösung von $x^3 = c$ ist die dritte Wurzel $\sqrt[3]{c}$ usw. Die Lösungen solcher Gleichungen kann man daher als „Wurzeln“ bezeichnen und für $c = 1$ als „Wurzeln der Eins“ oder „Einheitswurzeln“.

Betrachten wir zunächst die Situation im Reellen: Die Gleichung $x^n = 1, x \in \mathbb{R}$, besitzt für ungerade n nur die Lösung 1 und für gerade n die Lösungen ± 1. Die Einheitswurzeln geben also im Reellen nicht viel her.

Im Komplexen sieht es anders aus:

Satz 8.11 *Die Gleichung $z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$, besitzt genau n komplexe Lösungen*

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

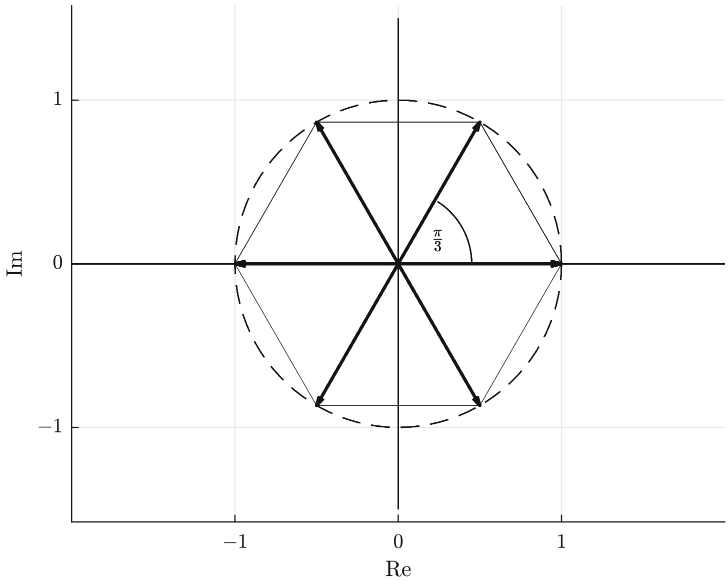

Abb. 8.5 Die n-ten Einheitswurzeln bilden die Ecken eines in den Einheitskreis eingeschriebenen, regelmäßigen n-Ecks. Dargestellt sind die sechsten Einheitswurzeln $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/6}$, $k = 0, \ldots, 5$. Für $k = 0$ und $k = n/2 = 3$ erhält man die beiden reellen Lösungen $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$

Beweis Dass die Zahlen z_k die Gleichung $z^n = 1$ lösen, sieht man sofort:

$$z_k^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = 1.$$

Und dies sind auch die einzig möglichen Lösungen: Die Zahl $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (mit $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) genüge der Gleichung $z^n = 1$. Wegen $1 = |z^n| = |z|^n$ ist dann $r = 1$, also ist $z^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = 1$. Dies ist aber genau der Fall für $n\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $0 \leq \varphi < 2\pi$ entspricht das genau den obigen Zahlen z_k. •

In den komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind natürlich die reellen Lösungen enthalten. Stellt man die komplexen Lösungen in der Gauß-Ebene dar, so bilden sie die Eckpunkte eines in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks mit einer Ecke auf der 1, siehe Abb. 8.5. Für gerade n ist dann -1 als zweite reelle Lösung in diesem n-Eck enthalten, während für ungerade n die 1 einzige reelle Lösung bleibt.

Lesehilfe
Das Wurzelzeichen ist bei komplexen Zahlen kritisch zu sehen und allenfalls mit Vorsicht zu verwenden. Ausdrücke wie z. B. $\sqrt[3]{1}$ sind nämlich über

$\mathbb{C}$ nicht eindeutig, sondern es gibt drei verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^3 = 1$, die sich auch nicht nur durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden.

Geometrisch lassen sich die n-ten Einheitswurzeln auch wie folgt verstehen: Zunächst besitzen natürlich alle Einheitswurzeln den Betrag 1. Da die Streckung somit entfällt, bewirkt die Multiplikation einer Einheitswurzel mit sich selbst nur eine (Weiter-) Drehung um das Argument der Zahl: Das Argument verdoppelt sich. Erneute Multiplikation bewirkt eine Verdreifachung usw. Werfen wir damit noch mal einen Blick auf die sechsten Einheitswurzeln in Abb. 8.5: Die Zahl z_1 weist als Argument ein Sechstel des Vollwinkels 2π auf. Mit z_1^6 hat man dies sechsmal und erhält daher das Gesamtargument 2π und ist bei 1. Mit z_2^6 umrundet man den Einheitskreis insgesamt genau zweimal, erhält das Gesamtargument 4π und damit wieder 1. Mit z_3^6 läuft man dreimal herum usw.

► **Zwischenfrage (6)** Wie lässt sich das obige Argument verwenden, um „$\sqrt{\mathrm{i}}$“ zu ermitteln, d. h. die zwei Lösungen der Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$?

8.6 Beispiel: Lösung der Schwingungsgleichung

Als typisches Beispiel für die Anwendung der Euler-Formel sehen wir uns die Lösung der Differenzialgleichung einer harmonischen Schwingung an. Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung für Funktionen, in der eine gesuchte Funktion in Form ihrer Ableitungen auftaucht.

Betrachten wir ein Teilchen der Masse m. Seine Bewegung unterliegt dem Grundgesetz der Mechanik,

$$F = ma,$$

wobei F für die Kraft steht, die auf das Teilchen wirkt, und a für die daraus resultierende Beschleunigung. Für eine eindimensionale Bewegung längs der x-Achse ergibt sie sich aus der zweifachen Ableitung des Orts $x(t)$ nach der Zeit, siehe auch (6.39). Es ist also

$$F = m\ddot{x}. \tag{8.33}$$

Als wirkende Kraft betrachten wir nun eine *Rückstellkraft* F_R, die proportional zur Auslenkung x ist, d. h.

$$F_\mathrm{R} = -kx \tag{8.34}$$

mit einer Proportionalitätskonstanten $k > 0$. Diese Situation liegt zum Beispiel vor, wenn das Massenstück mit einer Feder verbunden ist, die es immer in die Ruhelage bei $x = 0$ zurückziehen will.

Lesehilfe
Tatsächlich ist wohl keine reale Rückstellkraft tatsächlich exakt proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage. Für hinreichend „kleine" Auslenkungen x allerdings kann man sich auf die lineare Näherung von F_R um $x = 0$ beschränken, und für sie ist dann die Annahme (8.34) gerechtfertigt.

Die Bewegungsgleichung für einen solchen *ungedämpften harmonischen Oszillator* lautet somit

$$m\ddot{x} = F_R = -kx \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

oder mit $\omega_0^2 := k/m$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*). \tag{8.35}$$

Wir haben es hier mit einer Differenzialgleichung für die Funktion x zu tun, in der die Funktion und ihre zweite Ableitung auftreten. Diese Gleichung wollen wir lösen, d. h., wir suchen die Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bei denen die Summe aus zweiter Ableitung und ω_0^2 mal der Funktion sich zu 0 ergänzen.

Es liegt daher nahe, solche Funktionen als Lösungen zu probieren, die unter Ableitung erhalten bleiben, damit sich die zwei Summanden zu identisch 0 ergänzen können. Wir versuchen daher den *Exponentialansatz*

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{8.36}$$

mit einer Konstanten λ, die noch zu bestimmen ist. Einsetzen dieses Ansatzes in (8.35) ergibt

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + \omega_0^2 \mathrm{e}^{\lambda t} = \left(\lambda^2 + \omega_0^2\right) \mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

Die Differenzialgleichung ist daher erfüllt, wenn λ der *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{8.37}$$

genügt.

Es gibt offenbar keine reellen Lösungen für λ, wohl aber die komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0,$$

und das heißt, die zwei Funktion $x_\pm$ mit

$$x_\pm(t) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t} \tag{8.38}$$

sind Lösungen der Differenzialgleichung (8.35). Da es sich um eine lineare Differenzialgleichung handelt, d. h. um eine in x und allen Ableitungen von x lineare

Gleichung, ist auch jede Linearkombination dieser beiden Einzelfunktionen eine Lösung, d. h. jede Funktion

$$x(t) = \tilde{c}_1 e^{i\omega_0 t} + \tilde{c}_2 e^{-i\omega_0 t}. \tag{8.39}$$

Ist das nun die gesuchte Lösung von (8.35)? Die Antwort muss lauten: nein. Die Gleichung, die wir lösen wollen, ist reell und wir suchen reelle Lösungen x. Zwar sind diese in (8.39) vollständig enthalten, verbergen sich aber in der Kombination aus den komplexen Konstanten $\tilde{c}_1$ und $\tilde{c}_2$ und den komplexwertigen Exponentialfunktionen.

Lesehilfe
Es würde übrigens auch nicht helfen, den Realteil von (8.39) zu nehmen. Aufgrund der komplexen Konstanten $\tilde{c}_1$ und $\tilde{c}_2$ lässt sich dieser nämlich nicht einfach ermitteln, denn für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\mathrm{Re}\,(zw)$ nicht etwa gleich $(\mathrm{Re}\,z)(\mathrm{Re}\,w)$.

Es ist aber möglich, statt der zwei Lösungsfunktionen $x_\pm$ andere Linearkombinationen dieses Funktionensystems zu nehmen, die reell sind: Wir betrachten Satz 8.9 und setzen

$$x_1(t) := \frac{1}{2}\,(x_+(t) + x_-(t)) = \cos(\omega_0 t), \tag{8.40}$$

$$x_2(t) := \frac{1}{2i}\,(x_+(t) - x_-(t)) = \sin(\omega_0 t). \tag{8.41}$$

Diese beiden Funktionen sind reell, und die Menge ihrer Linearkombinationen mit reellen Konstanten c_1 und c_2 ergibt die allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \tag{8.42}$$

vergleiche auch (5.34). Wie man jetzt sieht, entspricht der oben definierte Parameter $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ der *Kreisfrequenz* einer resultierenden Schwingung, und wegen dieser Lösungen bezeichnet man (8.35) als die Schwingungsgleichung, genauer als die *Gleichung der ungedämpften freien harmonischen Schwingung*, da hier keine Dämpfung in Form von Reibung und keine äußeren Kräfte vorliegen, das System sich also frei bewegt.

Wir haben ingesamt Folgendes gesehen: Der Exponentialansatz (8.36) funktioniert bereits in diesem einfachen Beispiel für eine lineare Differenzialgleichung nur, wenn man komplexe Zahlen zulässt. Bei reellen Gleichungen treten die Lösungsfunktionen dann stets in Paaren wie in (8.38) auf, die sich über die „inversen Euler-Formeln“ (8.9) dann in ein reelles Lösungssystem überführen lassen.

► **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Die Frage war, wie man „$\sqrt{i}$“ aufgrund der Geometrie am Einheitskreis ermitteln kann.

Die Zahl i liegt auf dem Einheitskreis und die Lösungen von $z^2 = \mathrm{i}$ daher auch. Sie müssen nach Multiplikation mit sich selbst bei i landen. Das ist offenbar für die Zahl mit dem Argument $\pi/4 \mathrel{\hat{=}} 45°$ der Fall. Die erste Lösung ist daher

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Die zweite Lösung ist aufgrund des geraden Exponenten das Negative davon, also

$$z_2 = -z_1 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mit ihr im Quadrat „läuft man eineinviertel Mal um den Einheitskreis“ und landet bei i.

Das Wichtigste in Kürze

- Die komplexen Zahlen entstehen, indem man für die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Addition und eine Multiplikation definiert. Auf diese Weise enthält man den **Körper** $\mathbb{C}$.
- Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann geschrieben werden als $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Sie enthält also einen **Real-** und einen **Imaginärteil**.
- Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist auf herkömmliche Weise möglich. Für die **imaginäre Einheit** i gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Komplexe Zahlen können in der **Gauß-Zahlenebene** graphisch dargestellt werden. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$; sie entsprechen der **reellen Achse** in der Gauß-Ebene.
- Bei der **komplexen Konjugation** wechselt der Imaginärteil sein Vorzeichen.
- Der **Betrag** einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand der Zahl vom Ursprung der Gauß-Ebene.
- Die **komplexe Exponentialreihe ist absolut konvergent**. Eine Darstellung des Graphen der komplexen Exponentialfunktion ist nicht auf einfache Weise möglich. Er enthält allerdings den reellen Graphen. Außerdem gilt für die Exponentialfunktion weiter die bekannte **Funktionalgleichung**, und auch im Komplexen besitzt sie **keine Nullstelle**.
- Die **Euler-Formel** stellt einen Zusammenhang zwischen der komplexen Exponentialfunktion und Cosinus und Sinus her. Sie ergibt sich aus der Reihendarstellung der Funktionen.
- Die Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x \in \mathbb{R}$, bilden den **Einheitskreis** der Gauß-Zahlenebene.
- Die **Polarkoordinatendarstellung** einer komplexen Zahl z lautet $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Den Winkel φ bezeichnet man als das **Argument** von z.
- Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer anderen komplexen Zahl entspricht geometrisch einer **Drehstreckung**.
- Über $\mathbb{C}$ besitzt die Gleichung $z^n = 1$ stets n verschiedene Lösungen. Man bezeichnet sie als die **n-ten Einheitswurzeln**.

Und was bedeuten die Formeln?

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu), \quad (x, 0) = x, \quad (0, 1) = \mathrm{i},$$
$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}), \quad |z| := \sqrt{z\overline{z}},$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}, \quad z^2 + z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2,$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} c_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Im} c_n), \quad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)},$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x,$$
$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i} \sin x,$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right),$$
$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit } \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } r = |z| \in \mathbb{R}_+, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi)} z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-10\pi)},$$
$$zw = |z||w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}, \quad z^n = 1 \iff z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n} \text{ mit } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Übungsaufgaben

A8.1 Für reelle Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$. Stimmt das auch für komplexe Zahlen? Oder ist für komplexe Zahlen z die folgende Aussage richtig: Es ist entweder $z^2 < 0$ oder $z^2 = 0$ oder $z^2 > 0$?

A8.2 Gib für die folgenden komplexen Zahlen jeweils Real- und Imaginärteil an, schreibe sie also in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}, \quad z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}, \quad z_3 = \frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}, \quad z_4 = \mathrm{i}^4,$$
$$z_5 = \frac{2+3\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}, \quad z_6 = 6\mathrm{i}^4 + 3\mathrm{i}^3 + 4\mathrm{i}^2 - \mathrm{i} + 1, \quad z_7 = \mathrm{i}^{17} + \mathrm{i}^{18} + \mathrm{i}^{19} + \mathrm{i}^{20},$$
$$z_8 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

A8.3 Zeige folgenden Satz: *Für $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung*

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reellen Lösungen, wenn gilt $|a| < 1$. Und in diesem Fall besitzt die Gleichung zwei konjugiert komplexe Lösungen mit dem Betrag 1.

A8.4 Ermittle jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (1+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) + (4\mathrm{i}-3)(1-\mathrm{i}z) + 1 + 7\mathrm{i} = 0 \\
&(2) \quad z^2 + \overline{z} = 0 \\
&(3) \quad z^2 + 2|z| = 0 \\
&(4) \quad |z+1| = 1 \\
&(5) \quad \left| \begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 1 + \mathrm{i} \\ 3z_1 + \mathrm{i}z_2 &= 2 - 3\mathrm{i} \end{aligned} \right| .
\end{aligned}$$

A8.5 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils die Antwort.

(I) Bei den reellen Zahlen handelt es sich um eine Teilmenge der komplexen Zahlen.
(II) Für komplexe Zahlen ist die Bedingung $\overline{z} = z$ gleichbedeutend mit $z \in \mathbb{R}$.
(III) Der Kehrwert einer rein-imaginären Zahl ist stets wieder eine rein-imaginäre Zahl.
(IV) Ein Polynom n-ten Grads besitzt über $\mathbb{C}$ stets genau n voneinander verschiedene Nullstellen.
(V) Es gilt $\sqrt{\mathrm{i}} = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$.
(VI) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{e}^z$, besitzt keine Nullstellen.
(VII) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{e}^z$, besitzt keine reellen Funktionswerte.
(VIII) Für komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \cos y$.

A8.6 Berechne die folgenden Ausdrücke:

$$z_1 = \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}, \qquad z_2 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{100}, \qquad z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^{2n+1}}{(1-\mathrm{i})^{2n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A8.7 Gib jeweils sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen an:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad z^3 = -1 \\
&(2) \quad z^3 = 8\mathrm{i} \\
&(3) \quad z^6 + 64 = 0.
\end{aligned}$$

Anhang – Lösungen der Übungsaufgaben

L1.1

$$a = 337, \quad b = 683, \quad c = 240 \cdot \frac{1}{4} = 60, \quad d = 1\,000 : \frac{1}{4} = 4\,000, \quad e = 3.$$
$$f = 2\,519{,}16, \quad g = 2\,172{,}28, \quad h = 7\,975{,}448, \quad j = 710{,}8\overline{24}.$$

L1.2 Minus ist nicht kommutativ, es ist $1 - 2 \neq 2 - 1$, und auch nicht assoziativ, $(1 - 2) - 3 \neq 1 - (2 - 3)$. Daher gibt es die „Minusklammer".

Auch die Division ist weder kommutativ, $1 : 2 \neq 2 : 1$, noch assoziativ, $(1 : 2) : 3 \neq 1 : (2 : 3)$. Deswegen ist es bei Doppelbrüchen wichtig, den Hauptbruchstrich durch seine Lage und größere Länge zu kennzeichnen, $\frac{\frac{1}{2}}{3} \neq \frac{1}{\frac{2}{3}}$. Der Ausdruck $1 : 2 : 3$ ist somit ohne Klammern eigentlich gar nicht definiert – auch wenn ein Computerprogramm ihn verstehen mag, weil es einfach von vorne nach hinten vorgeht, diesen Ausdruck somit als $(1 : 2) : 3$ rechnet.

L1.3

$$x_1 = \frac{ab}{a-b}, \text{ nur lösbar für } a \neq b,$$
$$x_2 = \frac{abc}{ab-c}, \text{ nur lösbar für } c \neq ab,$$
$$x_3 = \frac{bd}{d-bc} - a, \text{ nur lösbar für } d \neq bc,$$
$$x_4 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{b}}, \text{ nur lösbar für } \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{b} \geq 0.$$

J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3

L1.4 $s = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$.
Beweis durch vollständige Induktion über n:
Induktionsanfang für $n = 0$: $\sum_{k=1}^{0}(2k-1) = 0$, leere Summe, und $0^2 = 0$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2.$$

Und wir haben $s = \sum_{k=1}^{7}(2k-1) - \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 7^2 - 2^2$.

L1.5 Im Induktionsschritt steht zunächst $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$. Dann wird die Induktionsvoraussetzung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ verwendet, um daraus $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$ zu folgern. Das ist aber nur richtig, wenn der zusätzliche Faktor $(1+x)$ in dieser Ungleichung ≥ 0 ist, also $x \geq -1$. Ansonsten müsste das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

L2.1 Bei einer konvergenten Folge versammeln sich die Folgenglieder in der Nähe des Grenzwerts. Nur endlich viele sind dann beispielsweise weiter als 1 von ihm entfernt. Davon das Größte ist dann die obere und das Kleinste die untere Schranke. Und wenn keines außerhalb der 1-Umgebung liegt, stellt diese Umgebung selbst bereits die Schranken dar.

L2.2 Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

L2.3 Nein, ∞ ist keine reelle Zahl. Die Menge $\mathbb{R}$ besteht zwar aus unendlich vielen Zahlen, und sie ist nicht nach oben beschränkt, d. h., zu jeder Zahl gibt es immer eine noch größere Zahl. Aber ∞ ist keine Zahl.

L2.4 Nein, die Aussage stimmt so nicht. Sofern die Nullfolge alterniert, wechselt auch der Kehrwert stets sein Vorzeichen, und wird dabei dem Betrag nach immer größer. Und eine solche Folge ist nicht bestimmt divergent.

L2.5
(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2 + \frac{(-1)^n}{n}) = \infty$ wegen $n^2 \to \infty$, die Addition einer Nullfolge ändert daran nichts.
(2) $\lim_{n\to\infty}((-1)^n n^2 + \frac{1}{n})$ ist nicht definiert bzw. die Folge ist divergent. Das alternierende Vorzeichen bei n^2 bewirkt einen ständigen Vorzeichenwechsel der immer größer werdenden Folgenglieder.
(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}) = 0$, man hat hier einfach die Summe zweier Nullfolgen.
(4) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n+7}) = 1$, für große n nähern sich Zähler und Nenner immer mehr an. Das sieht man auch so: $\frac{n-3}{n+7} = \frac{n(1-3/n)}{n(1+7/n)} = \frac{1-3/n}{1+7/n}$, mit $3/n \to 0$ und $7/n \to 0$.

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n-3}{n+7}) = 2$, denn $\frac{2n-3}{n+7} = \frac{n(2-3/n)}{n(1+7/n)} = \frac{2-3/n}{1+7/n}$.
(6) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{2n^2+7}) = 0$, denn $\frac{n-3}{2n^2+7} = \frac{n^2(1/n-3/n^2)}{n^2(2+7/n^2)} = \frac{1/n-3/n^2}{2+7/n^2} \to 0$.

L2.6 Die Summe $\sum_{k=0}^{n}(k^2-1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach nur eine endliche Summe, also eine Summe mit endlich vielen endlichen Summanden. Und als solche natürlich immer endlich.

L2.7 Nein, die Aussage stimmt nicht. Der Zusammenhang lautet umgekehrt: „Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$". Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt somit nicht die Konvergenz der Reihe. Gilt hingegen $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so folgt, dass die Reihe nicht konvergieren kann.

L2.8 Die Divergenz einer Reihe entsteht ggf. immer durch ihre unendlich vielen Glieder. Das Ändern oder Weglassen endlich vieler Glieder hat darauf keinen Einfluss. Allerdings ändert es natürlich bei konvergenten Reihen in der Regel den Reihenwert.

L2.9 Zunächst zu s_1: Es ist offenbar $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$. Wir haben es nur mit positiven Reihengliedern zu tun, und alle Summanden von s_1 sind kleiner als die von s. Daher konvergiert auch s_1.

Der Summand der Reihe s_2 wäre für $n = 1$ nicht definiert. Daher geht es hier bei 2 los. Leider ist $\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$, so dass das obige Argument zunächst nicht funktioniert. Trotzdem wird man wohl vermuten, dass auch diese Reihe endlich ist. Wir wandeln das obige Argument leicht ab: Es ist $n^2 - 1 \geq \frac{n^2}{2}$ für alle $n \geq 2$, damit $\frac{1}{n^2-1} \leq \frac{2}{n^2}$, und mit $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, und somit auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

L2.10 Nein, die Reihe kann nicht konvergieren, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{7n^2+17n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+2/n^2)}{n^2(7+17/n)} = \frac{1}{7} \neq 0,$$

so dass das notwendige Kriterium für die Konvergenz von Reihen nicht erfüllt ist.

L3.1 Wegen $c > 0$ ist die gesuchte Parabel nach unten geöffnet. Aufgrund der Nullstellen bei a und b besitzt sie die Form $y(x) = d(x-a)(x-b)$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten d. Ihr Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen a und b, bei $(a+b)/2$, und es muss offenbar gelten $y((a+b)/2) = c$. Auswerten dieser Gleichung für d ergibt das Ergebnis

$$y = -\frac{4c}{(a-b)^2}(x-a)(x-b).$$

L3.2 $D_1 = \mathbb{R}^*$, man darf nicht durch 0 teilen.

$D_2 = \mathbb{R}_+$, der Radikant einer Quadratwurzel muss nicht-negativ sein.

$D_3 = \mathbb{R}$, hier kann der Radikant aufgrund des Quadrats nie negativ werden.

$D_4 = \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, damit der Nenner nicht 0 wird.

$D_5 = \mathbb{R}$.

$D_6 = \,]-1,1[$, das Intervall ohne die Grenzen, weil ansonsten durch 0 geteilt würde.

$D_7 = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$, wie sich durch Rechnen ergibt. Es ist zu prüfen, wo der Nenner 0 wird. Dazu hier erste Nullstelle erraten, z. B. 1, Polynomdivision durchführen, und verbleibende quadratische Gleichung lösen.

$D_8 = \mathbb{R}$, die Exponentialfunktion ist für alle reellen Argumente definiert.

L3.3 Nein, eine Parabel kann vollständig oberhalb (oder eine nach unten geöffnete Parabel vollständig unterhalb) der x-Achse liegen, dann besitzt sie keine Nullstelle, oder auf der x-Achse, dann hat sie eine (doppelte) Nullstelle, oder sie schneidet die x-Achse zweimal, dann hat sie zwei Nullstellen.

Ein Polynom dritten Grads besitzt immer mindestens eine Nullstelle, da es von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, und kann bis zu drei Nullstellen haben.

Allgemein: Ein Polynom vom Grad n kann für gerade n zwischen 0 und n Nullstellen aufweisen, und für ungerade n sind es zwischen 1 und n Nullstellen.

L3.4 Bei gebrochen rationalen Funktionen ist es oft nützlich, Zähler und Nenner bestmöglich zu faktorisieren (Nullstellen raten, Polynomdivision usw., wobei hier die erste Nullstelle 4 des Zählers gegeben ist). Dies ergibt

$$f(x) = 2\frac{(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)^2} = 2\frac{(x-4)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Mit Kürzen des Linearfaktors $x+2$ wird klar, dass hier keine Nullstelle vorliegt, sondern nur bei $x = 3$, 4 und -1. Die Polstellen liegen an den Nullstellen des Nenners, also bei $x = 1$ und -2. Die Asymptote schließlich ergibt sich, indem man für f die Polynomdivision mit Rest durchführt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 44x + 48) : (x^3 + 3x^2 - 4) \\ &= 2x - 14 + \frac{28x^2 + 52x - 8}{x^3 + 3x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Für $x \to \pm\infty$ geht der echt gebrochen rationale Rest gegen 0, so dass sich $y = 2x - 14$ als Asymptote ergibt.

L3.5

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ist nicht definiert. Zwar ist $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, und $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, aber das ist eben nicht dasselbe.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, aufgrund des Quadrats im Nenner stellt sich hier nicht das Problem von (2).
(4) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2(1/x+1/x^2)}{x^2} = \lim_{x\to -\infty}(1/x + 1/x^2) = 0$.
(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(9/x-7/x^2+49/x^3)}{x^3(1-1/x^2-100/x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{9/x-7/x^2+49/x^3}{1-1/x^2-100/x^3} = 0/1 = 0$.
(6) $\lim_{x\to 0} \frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100} = -\frac{49}{100}$, einfach durch Einsetzen von $x = 0$ (stetige Funktion).
(7) $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$, wie wir aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion wissen.
(8) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^6+x^4+2x^2+1}{\frac{7}{6}x^6+7x^5} = \frac{6}{7}$, wie du durch Ausklammern und Kürzen von x^6 in Zähler und Nenner siehst.
(9) $\lim_{r_1\to\infty}((n-1)\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}) = \frac{1-n}{r_2}$, wie schon mehrfach gehabt einfach eine gebrochen rationale Funktion, nur mit anderen Buchstaben.

L3.6 Nein, es kann mehrere Stellen geben, an denen der Zwischenwert angenommen wird. *Dann gibt es „genau ein“* … ist also nicht richtig.

L4.1 Es ist richtig, dass diese beiden Funktionen jeweils gleich ihren Umkehrfunktionen sind. Aber es sind nicht die beiden Einzigen: Jede Funktion, deren Funktionsgraph unter Spiegelung an der Achse $y = x$ in sich selbst übergeht, besitzt diese Eigenschaft. Und das ist zum Beispiel auch für jede Gerade mit der Steigung -1 der Fall, also für die Geraden $y = -x + a$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$. Überzeuge dich durch Auflösen der Funktionsvorschrift nach x.

L4.2
(a) $1-e^{2x^2-3} = 0$: Entweder Exponentialfunktion isolieren und dann ln anwenden, oder hinsehen: Nur e^0 ist gleich 1, also sind die x mit $2x^2 - 3 = 0$ gesucht, d. h. $x = \pm\sqrt{3/2}$.
(b) $2^x = \sqrt{8}$: Wir schreiben $\sqrt{8}$ für unsere Zwecke besser auf: $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$, also $x = 3/2$. Anders ausgedrückt: $\log_2 \sqrt{8} = 3/2$.
(c) $\ln(x^2+2x+1) = 2$: Hier haben wir die quadratische Gleichung $x^2+2x+1 = e^2$, also $x^2 + 2x + 1 - e^2 = 0$. Auflösen ergibt $x = -1 \pm e$.
(d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2+3}} - \frac{1}{4} = 0$: Wurzel isolieren, z. B. als $\sqrt[3]{2x^2+3} = 4$, daraus folgt $2x^2 + 3 = 64$, also $x = \pm\sqrt{61/2}$.
(e) $x^5 = -243$: Hier steht $x = \sqrt[5]{-243} = -3$, was gerade noch so im Kopf geht, wenn man weiß, dass ein einfaches Ergebnis herauskommen sollte.
(f) $\sqrt[3]{x^5} = -32$: Hier steht $x = \sqrt[5]{(-32)^3}$, was anders herum einfacher geht: $x = (\sqrt[5]{-32})^3 = (-2)^3 = -8$.

L4.3 Da $x \mapsto x^3$ streng monoton steigend ist, ist die Funktion f streng monoton fallend, und somit umkehrbar. Sie bildet $\mathbb{R}$ bijektiv ab auf $\mathbb{R}_+^*$. Zur Ermittlung der

Funktionsvorschrift von f^{-1} lösen wir die Gleichung $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4x^3}$ nach x auf:

$$2y = \mathrm{e}^{-4x^3} \quad \Rightarrow \quad \ln(2y) = -4x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\ln(2y)}.$$

Wir haben also $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\ln(2x)}$. Und das Bild von f^{-1} ist ganz $\mathbb{R}$, als Formel: $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

L4.4

a) Die maximale Endgeschwindigkeit v_m ergibt sich als Grenzwert:

$$v_\mathrm{m} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) = \frac{mg}{c},$$

da die Exponentialfunktion gegen 0 läuft. Die halbe Endgeschwindigkeit wird erreicht, wenn gilt $\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} = 1/2$, also bei $t = \frac{m}{c}\ln 2$.

b) Aus $v_\mathrm{m} = \frac{mg}{c}$ folgt

$$c = \frac{mg}{v_\mathrm{m}} = \frac{100\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{200\cdot 10^3\,\mathrm{m}/(3{,}6\cdot 10^3\,\mathrm{s})} = \frac{3\,600\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{s}} = 18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Die halbe Endgeschwindigkeit wird somit erreicht bei

$$t = \frac{100\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{kg/s}}\ln 2 \approx 5{,}5\cdot 0{,}7\,\mathrm{s} \approx 4\,\mathrm{s}.$$

L4.5 Richtig ist, dass alle Logarithmusfunktionen nur auf $\mathbb{R}_+^*$ definiert sind. Für $a < 1$ sind die Funktionen $\log_a$ jedoch streng monoton fallend.

Eins als Basis ist nicht erlaubt, weil die Funktion $x \mapsto 1^x = 1$ nicht bijektiv und daher nicht umkehrbar ist. Anders ausgedrückt: „$\log_1 x$“ wäre die Zahl, mit der man 1 potenzieren müsste, um x zu erhalten. Und das funktionierte überhaupt nur für $x = 1$, und dann könnte man alle Zahlen als Potenz verwenden.

L4.6

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2\mathrm{e}^{-x}) = 0$, die fallende Exponentialfunktion setzt sich gegen x^2 durch.

(2) $\lim_{x\to\infty}(x\ln x) = \infty$, hier gibt es gar keinen Konflikt, sowohl x als auch $\ln x$ laufen gegen ∞.

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \infty$, x im Zähler setzt sich gegen $\ln x$ im Nenner durch.

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1+\mathrm{e}^x}{x^2+7x} = \infty$, die Exponentialfunktion im Zähler setzt sich gegen x^2 im Nenner durch. Die übrigen Terme spielen im Grenzwert $x \to \infty$ ohnehin keine Rolle.

(5) $\lim_{x\searrow 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = 0$, es ist $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\lim_{x\searrow 0}\ln x = -\infty$.

(6) $\lim_{x\searrow 0}(x\ln x) = 0$, hier geht x gegen 0 und $\ln x$ gegen $-\infty$, wobei sich x durchsetzt.

L5.1 Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang und damit auch alle Innenwinkel gleich und gleich 60°.

Ein rechtwinkliges Dreieck weist einen rechten (Innen-) Winkel auf.

Der Thales-Kreis ist ein Halbkreis über einer Strecke. Die Endpunkte der Strecke bilden mit jedem Punkt auf dem Thales-Kreis ein rechtwinkliges Dreieck.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden. Eine Seitenhalbierende läuft von einem Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seite.

Der Mittelpunkt des Umkreises liegt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreieckseiten.

L5.2 Wir verwenden $b = r x_{\text{Bogenmaß}}$, wo r die Entfernung ist. Es ist

$$x_{\text{Bogenmaß}} = \frac{\pi}{180^\circ}\frac{0{,}001 \cdot 1^\circ}{3\,600} = \frac{0{,}001\pi}{180 \cdot 3\,600} \approx 4{,}85 \cdot 10^{-9}$$

und

$$r = 26\,000 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3\,600\,\text{s} \cdot 300\,000\,\text{km/s} \approx 2{,}46 \cdot 10^{17}\,\text{km},$$

so dass wir $b \approx 1{,}19 \cdot 10^9\,\text{km}$ erhalten. Eine astronomische Einheit (das ist die Enfernung Erde – Sonne) entspricht etwa $150 \cdot 10^6$ km, so dass wir es mit etwa acht astronomischen Einheiten zu tun haben.

L5.3 Wahrscheinlich entnimmt man die Werte am einfachsten einer Skizze der Funktionsgraphen. Es ist $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{17\pi}{6}$, und $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{17\pi}{6} = \cos\frac{19\pi}{6}$.

L5.4

a) Wir verwenden den Cosinussatz:

$$c^2 = 36\,\text{cm}^2 + 4\,\text{cm}^2 - 24\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1}{2} = 28\,\text{cm}^2,$$

also ist $c = \sqrt{28}\,\text{cm}$ die Länge der dritten Seite.

b) Vielleicht sieht man bereits, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, denn es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dann ergeben sich die zwei verbleibenden Winkel einfach aus $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ und $\sin\beta = \frac{4}{5}$ zu $\alpha \approx 37^\circ$ und $\beta \approx 53^\circ$ (der dritte Winkel natürlich immer auch schon aus der Innenwinkelsumme).

Sieht man nicht, dass es ein rechtwinkliges Dreieck ist, berechnet man den ersten Winkel über den Cosinussatz via $\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$. Den zweiten Winkel ebenso, oder über den Sinussatz, und den dritten dann wieder über die Innenwinkelsumme.

L5.5
(1) $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(2) $\frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x$.
(3) Der „Trick" hier ist $3x$ als $2x + x$ zu schreiben und alles auf Sinus zu bringen:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

(4) Hier versuchen wir es mit $4x = 2x + 2x$ und auf Cosinus bringen:

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2x + 2x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \cos^2(2x) - (1 - \cos^2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x\right) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.\end{aligned}$$

So funktioniert es, aber es gibt auch etliche andere Wege, immer unter wiederholter Anwendung der Additionstheoreme und des trigonometrischen Pythagoras.

L5.6 Nein, es ist $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Bei Arcussinus handelt es sich per Definition um die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mit der das zentrale Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ des Sinus umgekehrt wird. Winkel außerhalb dieses Intervalls können daher bei Arcussinus nicht herauskommen.

L5.7 Mit $\arctan\infty = \frac{\pi}{2}$ ist gemeint $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$. Bei Arcustangens wird der zentrale Zweig des Tangens umgedreht, also die streng monoton steigende und bijektive Funktion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Daher läuft Arcustangens für $x \to \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$, und für $x \to -\infty$ übrigens gegen $-\frac{\pi}{2}$.

Da der Tangens bei $\frac{\pi}{2}$ nicht definiert ist, würde $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$ bedeuten $\lim_{x\to\pi/2}\tan x = \infty$. Das ist jedoch nicht richtig, da der Grenzwert an dieser Stelle nicht definiert ist. Allerdings ist $\lim_{x\nearrow\pi/2}\tan x = \infty$ und $\lim_{x\searrow\pi/2}\tan x = -\infty$.

L5.8 Die Gleichung $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist gleichbedeutend mit $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Nun ist

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$

L6.1 Die Prozentzahl p gibt an, welchen Anteil einer zurückgelegten horizontalen Strecke h man gleichzeitig vertikal zurücklegt, nennen wir sie v. Es ist also $p = v/h$. Und das ist genau derselbe Begriff der Steigung, wie wir ihn auch in der Mathematik verwenden. Und eine Straße mit 100 % Steigung, d. h. mit Steigung 1, steigt unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen an.

L6.2

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^3\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^3-4x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-4x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(12x^2+12xh+4h^2\right) = 12x^2.\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

L6.3 Wir lassen die Prozent an den Zahlen p weg. Die Steigung der gesuchten Geraden ist $m = \frac{1-4}{100-50} = -\frac{3}{50}$. Bei $p = 50$ geht es mit $n = 4$ los, daher ist

$$n(p) = 4 - \frac{3}{50}(p-50).$$

Dazu sagt man „Punktrichtungsform“, und man hätte stattdessen auch direkt die „Zweipunkteform“ verwenden können. Testen wir kurz die Vorschrift: $n(100) = 4 - \frac{3}{50}\cdot 50 = 1$, $n(50) = 4 - \frac{3}{50}\cdot 0 = 4$.

L6.4 Es ist $\exp = \ln^{-1}$, und wir verwenden den Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion. Er lautet hier:

$$\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1} x)} = \frac{1}{1/(\exp(x))} = \exp(x).$$

L6.5 Die Normalparabel mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$ besitzt die Ableitung $f'(x) = 2x$. Die Tangente an der Stelle a hat die Gleichung

$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = a^2 + 2a(x-a).$$

Wir haben also $t_{-1}(x) = 1 - 2(x+1) = -2x - 1$, $t_0(x) = 0$ und $t_2(x) = 4 + 4(x-2) = 4x - 4$.

L6.6

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 16x^3.\\ f_2'(x) &= -\frac{9}{x^4} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2}.\\ f_3'(x) &= \frac{-3x^4+42x^3-9x^2+2x-7}{(3x^3+1)^2}.\\ f_4'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x \sin x)'\, 3x^2 - \mathrm{e}^x \sin x \left(3x^2\right)'}{9x^4} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x)\, 3x^2 - \mathrm{e}^x \sin x \cdot 6x}{9x^4} \\
&= \frac{x\mathrm{e}^x \sin x + x\mathrm{e}^x \cos x - 2\mathrm{e}^x \sin x}{3x^3} = \frac{\mathrm{e}^x}{3x^3}\left(x \sin x + x \cos x - 2 \sin x\right). \\
f_6'(x) &= \left(\frac{2\mathrm{e}^x + 4x^2 + 8}{\sin x}\right)' = \frac{(2\mathrm{e}^x + 8x)\sin x - \left(2\mathrm{e}^x + 4x^2 + 8\right)\cos x}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

L6.7 Die Funktion arccot ist die Umkehrfunktion des Cotangens, dessen Ableitung wir mit der Quotientenregel ermitteln können:

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Nun erhalten wir mit dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{-1 - (\cot(\operatorname{arccot} x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

also alles ganz ähnlich wie beim Arcustangens.

L6.8 Die Ableitung der Wurzeln lautet

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Es steht also eine Wurzel im Nenner, so dass der Ausdruck für $x = 0$ „automatisch“ nicht definiert ist.

Zur Ableitung des Betrags greift man entweder auf seine abschnittweise Definition zurück,

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

und wird dazu geführt, die Stelle 0 bzgl. des Ableitungsgrenzwerts separat zu untersuchen (und festzustellen, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht gleich sind), oder man schreibt

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

und hat bei der Ableitung dann wieder eine Wurzel im Nenner.

L6.9

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= -3k\sin(kx).\\
f_2'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}.\\
f_3'(x) &= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.\\
f_4'(x) &= 2x\ln x + x.\\
f_5'(x) &= 2^x\ln 2.\\
f_6'(x) &= \left(\left(1+\cos^2(kx)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(kx)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\cos^2(kx)\right)'\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\sin^2(kx)\right)^{-\frac{1}{2}} 2\cos(kx)(-\sin(kx))k = -\frac{k\sin(kx)\cos(kx)}{\sqrt{1+\cos^2(kx)}}.\\
f_7'(x) &= 8\tan(4x)\cdot\frac{1}{\cos^2(4x)}\cdot 4 = 32\frac{\sin(4x)}{\cos^3(4x)}.\\
f_8'(x) &= \left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.\\
f_9'(x) &= \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x\\
&= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right).
\end{aligned}
$$

L6.10 Es ist alles in Ordnung. Macht man sich $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ klar, so sieht man, dass der Graph von $x \mapsto \ln(2x)$ nur um $\ln 2$ höher liegt als der Graph von $x \mapsto \ln x$ und daher die Ableitungen gleich sind.

L6.11 Nein, 2^x lässt sich keinesfalls so ableiten. Bei der Formel für x^n ist die Variable x in der Basis der Potenz, und bei 2^x im Exponenten. Und das sind zwei grundverschiedene Dinge.

L6.12 Die Nullstellen der ersten Ableitung befinden sich bei 0 und $\pm\sqrt{3/5}$, und die Nullstellen der zweiten Ableitung bei 0 und $\pm\sqrt{3/10}$. Die Tangenten sind $t_1(x) = 2x - 2$ und $t_{-1}(x) = 2x + 2$.

L6.13 Die Nullstellen von f_a ergeben sich aus

$$f_a(x) = ax^3 + x^2 - \frac{x}{a} = x\left(ax^2 + x - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Der Klammerausdruck wird 0 für

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2}} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{5}{4a^2}} = -\frac{1}{2a} \pm \frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{5}}{2}$$

und ergibt neben $x = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}^*$ zwei weitere Nullstellen.

Die stationären Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung

$$f_a'(x) = 3ax^2 + 2x - \frac{1}{a}$$

und liegen bei

$$x = -\frac{1}{3a} \pm \sqrt{\frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2}} = -\frac{1}{3a} \pm \frac{2}{3|a|}.$$

L6.14

a) Die Nullstelle der Funktion „sieht" man entweder, sie liegt bei $x = -2$, oder man löst die Gleichung $f(x) = x/2 + 2/x + 2 = 0$, was nach Multiplikation mit x auf eine quadratische Gleichung führt. Die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

ist bei -2 auch gleich 0, so dass die Tangente durch $t_{-2}(x) = 0$ gegeben wird.

b) Es ist $f'(x) = 0$ für $x = -2$ und $x = 2$. Die zweite Ableitung $f''(x) = 4/x^3$ ist bei -2 kleiner 0, dort liegt also ein lokales Maximum, und bei 2 größer 0, so dass wir dort ein lokales Minimum haben. Da die Funktion bei Null eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt, sind dies aber nur lokale und keine globalen Extrema. Außerdem ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

L6.15 Bezeichnen wir die Seitenlänge der Quadrate mit x, so wird das zu optimierende Volumen der Schachtel gegeben durch

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - x^2(2a + 2b) + abx.$$

Die Funktion V ist offenbar zwischen $x = 0$ und $b/2$ definiert, und es ist $V(0) = 0 = V(b/2)$. Wir suchen stationäre Punkte:

$$V'(x) = 12x^2 - x(4a + 4b) + ab = 0$$

ist gleichbedeutend mit

$$x = \frac{a+b}{6} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{36} - \frac{ab}{12}},$$

also mit $a = 16$ und $b = 10$

$$x = \frac{13}{3} \pm \frac{7}{3}.$$

Somit liegt bei $x = 2$ der einzige stationäre Punkt im Definitionsbereich, die Funktion V ist differenzierbar und positiv, so dass hier das Maximum zwischen den zwei Nullstellen am Rand des Definitionsbereichs liegen muss. Die auszuschneidenden Quadrate müssen also eine Seitenlänge von 2 cm haben.

L6.16 Die zu optimierende Funktion ist die Fläche

$$F = 2rl.$$

Dabei hängen r und l zusammen über

$$400 = 2l + 2\pi r,$$

das heißt $r = (200 - l)/\pi$. Einsetzen ergibt

$$F = \frac{2}{\pi}(200 - l)l.$$

Wir haben jetzt F als Funktion von l mit $l \in [0, 200]$ und $F(0) = 0 = F(200)$. Bei dieser nach unten geöffneten Parabel liegt das Maximum zwischen den Nullstellen bei $l = 100\,\mathrm{m}$. Dazu gehört der Radius $r = 100\,\mathrm{m}/\pi \approx 32\,\mathrm{m}$.

L6.17 Wir betrachten einen zu langen Baumstamm, der am Eckpunkt der beiden Kanäle und den beiden jeweils gegenüberliegenden Kanalrändern hängen bleibt und dabei den Winkel α mit der ersten Kanalseite einschließt. Seine Länge beträgt

$$l = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = l(\alpha).$$

Ein Baumstamm kann nun vollständig in den zweiten Kanal gelangen, wenn er alle Winkel α durchlaufen kann. Wir suchen daher das Minimum der Funktion l, die definiert ist für $\alpha \in\,]0, \pi/2[$, die differenzierbar ist und für die gilt $\lim_{\alpha\searrow 0} l(\alpha) = \infty = \lim_{\alpha\nearrow \pi/2} l(\alpha)$. Also:

$$l' = -a\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + b\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Dies führt über $a\cos^3\alpha = b\sin^3\alpha$ auf

$$\tan^3\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Für $a = 10\,\mathrm{m}$ und $b = 20\,\mathrm{m}$ und mit einem Taschenrechner führt dies auf die maximal mögliche Länge von $41{,}62\,\mathrm{m}$.

L6.18

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{3x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3} = \infty$.

(2) $\lim_{x\searrow 0}(x\ln(2x)) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(2x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0}(-x) = 0$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{2} = \frac{3}{2}$.

(4) $\lim_{x\searrow\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\searrow\pi/2} \tan x = -\infty$, und hier dürfte die Regel von l'Hospital auch gar nicht angewendet werden.

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\tan^2 x} = 1$.

(6) Wir wenden die Regel von l'Hospital mehrfach an, bis der Nenner nicht mehr Unendlich wird:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+2^{2x}}{2x^3+\ln x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x+1+2^{2x}\cdot 2\ln 2}{6x^2+1/x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6+2^{2x}\cdot 4(\ln 2)^2}{12x-1/x^2}$$
$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x}\cdot 8(\ln 2)^3}{12+2/x^3} = \infty.$$

L7.1 Es muss also gelten $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$ und $p''(x_0) = f''(x_0)$. Dabei ist

$$p'(x_0) = 2ax_0 + b \qquad \text{und} \qquad p''(x_0) = 2a.$$

Also muss zunächst $a = f''(x_0)/2$ gewählt werden. Ferner muss gelten

$$b = f'(x_0) - 2ax_0 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} c &= f(x_0) - ax_0^2 - bx_0 = f(x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 - \left[f'(x_0) - f''(x_0)x_0\right]x_0 \\ &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2. \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + \left[f'(x_0) - f''(x_0)x_0\right]x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\left(\frac{1}{2}x^2 - x_0x + \frac{1}{2}x_0^2\right) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Und das ist natürlich nichts anderes als das Taylor-Polynom zweiter Ordnung.

L7.2 Es ist $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$ und $\cos'''' = \cos$. Somit gilt für den Entwicklungspunkt $a_1 = 0$

$$\cos x = 1 + 0\cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{1}{24}x^4 + R_5^1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5^1(x).$$

Für den Entwicklungspunkt $a_2 = \pi/2$ haben wir

$$\begin{aligned}\cos x &= 0 + (-1)(x-\pi/2) + 0\cdot(x-\pi/2)^2 + \frac{1}{6}(x-\pi/2)^3 + 0\cdot(x-\pi/2)^4 \\ &\quad + R_5^2(x) \\ &= -(x-\pi/2) + \frac{1}{6}(x-\pi/2)^3 + R_5^2(x).\end{aligned}$$

L7.3 Wir haben die Funktion arcsin um $a = 0$ zu entwickeln. Es ist $\arcsin 0 = 0$, ferner

$$\begin{aligned}\arcsin' 0 &= \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0} = 1, \\ \arcsin'' 0 &= \left.\left((1-x^2)^{-1/2}\right)'\right|_{x=0} = \left.x(1-x^2)^{-3/2}\right|_{x=0} = 0, \\ \arcsin''' 0 &= \left[(1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}\right]_{x=0} = 1.\end{aligned}$$

Somit haben wir das gewünschte Ergebnis mit

$$\arcsin x \approx x + \frac{1}{6}x^3.$$

L7.4 Das Lagrange-Restglied erlaubt eine Abschätzung des Fehlers, den man mit einer Näherungsformel macht.

L7.5 Es ist

$$\sqrt{\pi + 2x} = \sqrt{\pi\left(1 + \frac{2}{\pi}x\right)} = \sqrt{\pi}\sqrt{1 + \frac{2x}{\pi}},$$

und damit unter Verwendung der Formel

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi + 2x} &\approx \sqrt{\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\pi}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 \pm \ldots\right] \\ &= \sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}x - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}x^2 \pm \ldots\end{aligned}$$

Eine Näherung von $\sqrt{x}$ für kleine x würde bedeuten, dass man um 0 entwickelt. Da $\sqrt{x}$ bei 0 nicht differenzierbar ist, ist das nicht möglich.

L7.6 Die Taylor-Formel besteht aus endlich vielen Summanden und einem Restglied. Hier stellt sich somit keine Frage nach Konvergenz, sondern allenfalls die Frage nach der Größe des Restglieds und damit des Fehlers, den man bis zu einer gegebenen Ordnung macht.

Die Taylor-Reihe ist eine unendliche Reihe. Man muss sich daher nach Konvergenz fragen. Und man kann fragen, ob die Reihe mit der Funktion übereinstimmt.

L7.7 Es ist

$$e^x = ee^{x-1} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k,$$

und möchte man sich auf die ersten zehn Glieder beschränken, so schreibt man

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{9}\frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

L7.8 Man verwendet zunächst die Taylor-Formel mit der Ordnung n und dem Restglied $R_{n+1}(x)$. Und muss nun zeigen, dass das Restglied für $n \to \infty$ gegen Null läuft. Für alle x, für die dies der Fall ist, ist die Taylor-Reihe gleich der Funktion.

L8.1 Nein, für komplexe Zahlen stimmt beides nicht. Zum Beispiel ist $i^2 = -1 < 0$. Im Allgemeinen ist z^2 aber wieder eine komplexe Zahl, z. B. $(2+i)^2 = 3 + 4i$, so dass gar keine Größer-kleiner-Relationen bestehen.

L8.2

$$z_1 = -i, \qquad z_2 = i, \qquad z_3 = -2 - i, \qquad z_4 = 1,$$
$$z_5 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i, \qquad z_6 = 3 - 4i, \qquad z_7 = 0, \qquad z_8 = 0.$$

L8.3 Die Gleichung $z^2 + 2az + 1 = 0$ wird gelöst durch

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Für $|a| > 1$ ergibt dies zwei reelle Lösungen, für $a = \pm 1$ die reelle Lösung ∓ 1, und für $|a| < 1$ die zwei komplexen Lösungen

$$z = -a \pm \sqrt{-(1-a^2)} = -a \pm i\sqrt{1-a^2},$$

die offensichtlich konjugiert komplex zueinander sind. Ihr Betrag ist

$$|z| = \sqrt{(-a)^2 + \left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 1 - a^2} = 1.$$

L8.4

(1) Wir haben es mit einer einfachen linearen Gleichung in z zu tun. Auflösen ergibt $z = -1 - i$.

(2) Diese Gleichung lässt sich nicht ohne weiteres nach z auflösen. Wir setzen daher $z = x + iy$ ein: Dies führt auf

$$x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = x^2 - y^2 + x + iy(2x-1) = 0.$$

Es müssen also Real- und Imaginärteil 0 sein. Das heißt zunächst anhand des Imaginärteils $y = 0$ oder $x = 1/2$. Mit $y = 0$ ergibt der Realteil $x^2 + x = x(x+1) = 0$, also insgesamt die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_2 = -1$. Mit $x = 1/2$ folgt aus dem Realteil $y = \pm\sqrt{3}/2$, wir haben also die weiteren Lösungen $z_{3,4} = 1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$.

(3) Auch hier setzt man $z = x + \mathrm{i}y$ ein und erhält so nach kurzer Rechnung die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_{2,3} = \pm 2\mathrm{i}$.

(4) Betrag einer komplexen Zahl gleich 1 bedeutet, dass sie auf dem Einheitskreis liegt. Es ist daher

$$z + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi[,$$

so dass die Menge aller Lösungen gegeben wird durch

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1 \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi[.$$

(5) Hier haben wir ein „normales“ lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Lösung kann auf gewöhnliche Weise erfolgen, zum Beispiel mit Hilfe der Cramer-Regel. Man erhält $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = \mathrm{i}$.

L8.5

(I) Richtig. Eine Zahl mit Imaginärteil Null ist eine reelle Zahl.

(II) Richtig. Komplexe Konjugation bewirkt das Umdrehen des Vorzeichens am Imaginärteil. Ist somit der Imaginärteil nicht Null, ändert sich die Zahl.

(III) Richtig. Betrachten wir $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$: Der Kehrwert lautet $1/z = 1/\mathrm{i}x = -\mathrm{i}/x$.

(IV) Falsch. Richtig ist zwar, dass jedes Polynom n-ten Grads über $\mathbb{C}$ in n Linearfaktoren zerfällt. Diese müssen aber nicht alle verschieden sein.

(V) Richtig. Wir rechnen nach:

$$\left((1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

Wobei wir $\sqrt{\mathrm{i}}$ hier verstehen wollen als eine Zahl, deren Quadrat gleich i ist. Davon gibt es noch eine zweite.

(VI) Richtig. Dies ergibt sich aus der Funktionalgleichung wie folgt:

$$\mathrm{e}^0 = 1 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z}.$$

Ein Produkt, das nicht 0 ist, kann keinen Faktor 0 enthalten. Also ist $\mathrm{e}^z \neq 0$.

(VII) Falsch. Erstens sind ja darin auch die reellen Argumente mit reellen Funktionswerten enthalten. Und zweitens besitzen auch andere Argumente reelle Funktionswerte, etwa $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

(VIII) Richtig. Denn es ist

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$$

und damit $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \cos y$ und $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \sin y$.

L8.6 Es wäre offenbar viel zu aufwändig, hier etwa mit Hilfe des Pascal-Dreiecks hoch 12 oder gar hoch 100 zu rechnen. Das Potenzieren fällt aber leicht, wenn man die Basis in Polarkoordinaten schreibt, was für die ersten zwei Zahlen ohne Rechenaufwand gelingt: So ist

$$z_1 = \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left(\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6}\right)^{12} = \mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}} = 1$$

und

$$z_2 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{100} = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)^{100} = \left(2\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}\right)^{100} = 2^{100}\mathrm{e}^{-100\pi\mathrm{i}/6}.$$

Nun ist $100 = 8 \cdot 12 + 4$, also

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^{100}\underbrace{\mathrm{e}^{-8\cdot 12\pi\mathrm{i}/6}}_{=1}\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}/6} = 2^{100}\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}/6} = 2^{100}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3} = 2^{100}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2^{99} - \mathrm{i}2^{99}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nun zu z_3, was man auch durch geschicktes Aufschreiben löst:

$$z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^{2n+1}}{(1-\mathrm{i})^{2n-1}} = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}^{2n} \cdot 2 = 2(-1)^n.$$

L8.7

(1) Wir verwenden die Logik analog zu den n-ten Einheitswurzeln. Es ist $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, so dass wir $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ als erste Lösung erhalten. Die zweite Lösung ist $z_2 = -1$, und die dritte liegt symmetrisch im Einheitskreis bei $z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}$.

(2) Die Gleichung $z^3 = 8\mathrm{i}$ ist gleichbedeutend mit $(z/2)^3 = \mathrm{i} = w^3$ mit $w = z/2$. Aufgrund von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ ist die offensichtliche erste Lösung $w_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. Aufgrund der Symmetrie erraten wir die zweite Lösung bei $w_2 = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$; tatsächlich ist $3 \cdot 5\pi/6 = 15\pi/6 = 2\pi + \pi/2$. Die dritte Lösung schließlich ist $w_3 = -\mathrm{i}$.

(3) Wir haben $(z/2)^6 = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Eine Lösung lautet daher $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. Und die weiteren fünf Lösungen sind dazu jeweils um $\pi/3$ weitergedreht: $z_k = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6 + k\pi/3)}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sachverzeichnis