- Gegenbeispiel für (d) finden

Nutze die Definitionen aus der Aufgabenstellung!

1. Liegt 0_V in U? → Wenn nein, dann kein UVR
2. Seien $u, \bar{u} \in U$ und $\lambda \in K$ vorgegeben
   ↳ Bedingungen aufschreiben
3. $u + \bar{u}$ und $\lambda \cdot u$ nachrechnen

Hinweis (3)

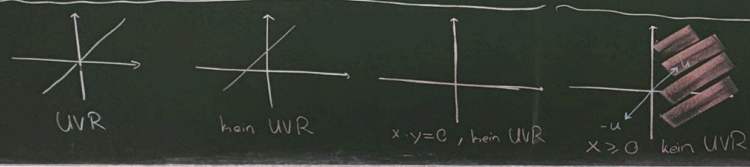
- Teil a ist analog zur Aufgabe 2
- Für (b) ausprobiere

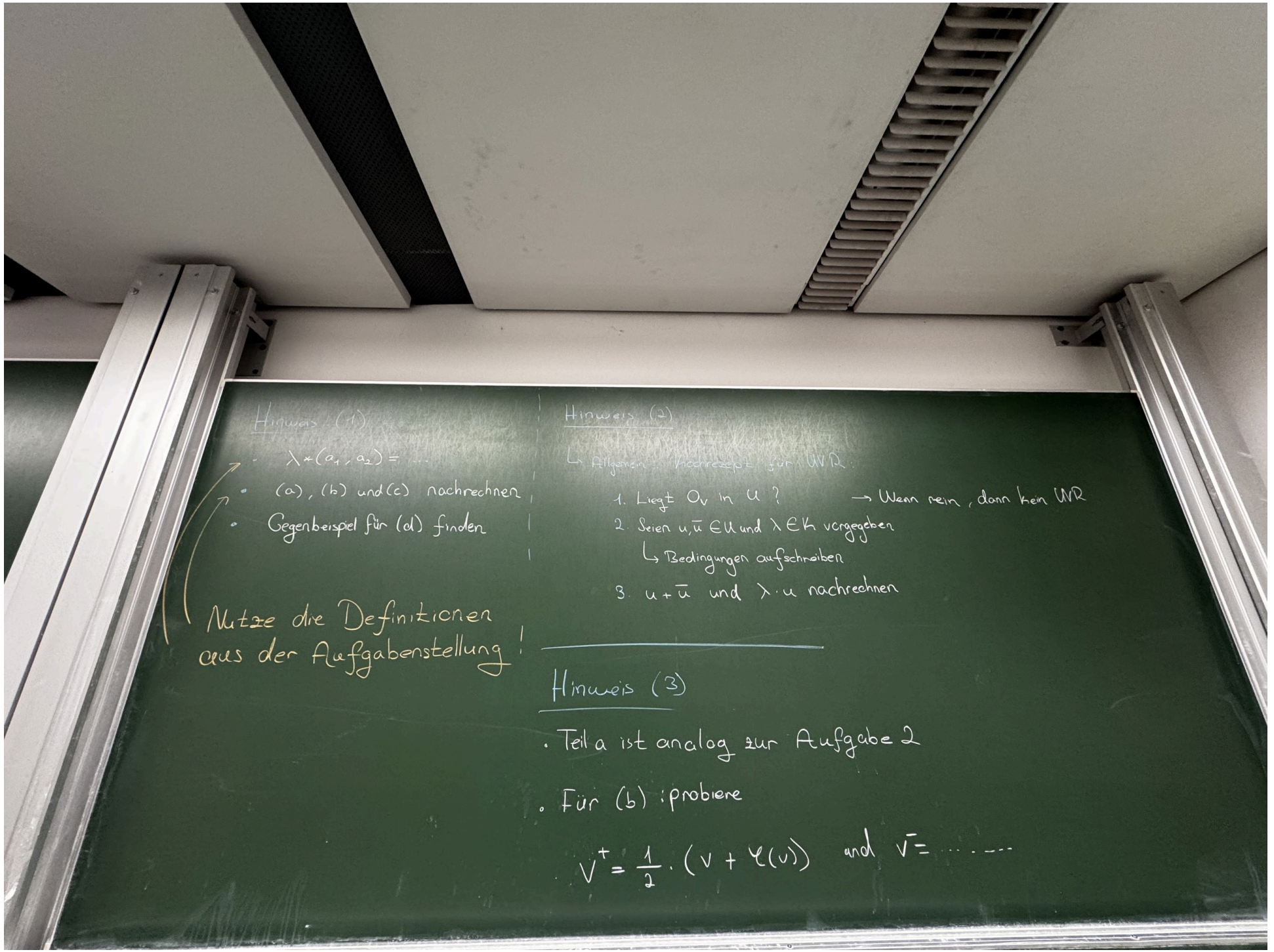
$v^+ = \frac{1}{2} \cdot (v + \gamma(v))$ und $v^- = \ldots$

- Sei K ein Körper. Dann ist ein **K-Vektorraum** ein Tripel $(V, +, \cdot)$ aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+$ und einer Abbildung $\cdot$, sodass:
  i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
  ii) $\forall \lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$:
  a) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$
  b) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w$
  c) $\lambda \cdot (\mu v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
  d) $1_K \cdot v = v$

- Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist dann ein Untervektorraum, wenn
  (U1) $0_V \in U$
  (U2) $u, \bar{u} \in U \Rightarrow u + \bar{u} \in U$
  (U3) $\lambda \in K, u \in U \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \{\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ linear}\}$




Hinweis (1)
$\lambda * (a_1, a_2) = \ldots$
(a), (b) und (c) nachrechnen
Gegenbeispiel für (d) finden
Nutze die Definitionen aus der Aufgabenstellung!
Hinweis (2)
↳ Allgemeines Vorgehensrezept für UVR:
1. Liegt 0_V in U? → Wenn nein, dann kein UVR
2. Seien $u, \bar{u} \in U$ und $\lambda \in K$ vorgegeben
↳ Bedingungen aufschreiben
3. $u + \bar{u}$ und $\lambda \cdot u$ nachrechnen
Hinweis (3)
. Teil a ist analog zur Aufgabe 2
. Für (b): probiere
$V^+ = \frac{1}{2} \cdot (v + \varphi(v))$ und $V^- = \ldots$

$U = \{ \dots \; 2x - 3y = 0 \}$

$2x - 3y = 0$

$2x = 3y$

$\frac{2}{3}x = y \Rightarrow$ Ursprungsgerade

- $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 = 0$ ✓ also $(0,0) \in U$
- Seien $(x,y), (u,v) \in U$ und $2x - 3y = 0$ und $2u - 3v = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$2(x+u) - 3(y+v) = 2x + 2u - 3x - 3v = (2x - 3y) + (2u - 3v) = 0$

also $(x+u, y+v) \in U$

- $2(\lambda x) - 3(\lambda y) = 2\lambda x - 3\lambda y = \lambda(2x - 3y) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in U$

Lösung zur 1

i) + ist komponentweise Addition auf $\mathbb{R}^2$

also $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

laut Vorlesung

ii) a) Seien $(a_1, a_2) = v$, $(b_1, b_2) = w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda + \mu) \cdot (a_1, a_2)$

$= ((\lambda + \mu) a_1, 0)$

$= (\lambda a_1 + \mu a_1, 0)$

$\lambda \cdot v + \mu \cdot v =$

$\lambda \cdot (a_1, a_2) + \mu \cdot (a_1, a_2)$

$= (\lambda a_1, 0) + (\mu a_1, 0)$

$= (\lambda a_1 + \mu a_1, 0)$

d) $1 \cdot (1,1) = (1 \cdot 1, 0) = (1,0) \neq (-1,1)$

b) $\lambda \cdot ((a_1, a_2) + (b_1, b_2))$

$= \lambda \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$= (\lambda \cdot (a_1 + b_1), 0)$

$= (\lambda a_1 + \lambda b_1, 0)$

andere Richtung analog

c) $\lambda \cdot (\mu \cdot (a_1, a_2))$

$= \lambda (\mu a_1, 0)$

$= (\lambda \mu a_1, 0)$

$= (\lambda \mu) (a_1, a_2)$

$= (\lambda \mu a_1, 0)$

b) $U = \{ \dots \; x + 2y - 5z = 7 \}$

$0 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 \neq 7$

c) $U = \{ A \in \mathcal{M}_{2\times 3, \mathbb{R}} \mid AB = 0 \}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$0_{2\times 3} \cdot B = 0_{2\times 2}$ also $0_{2\times 3} \in U$

Seien $A, A' \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A \cdot B = 0$ und $\bar{A} \cdot B = 0$

$(A + \bar{A}) \cdot B = (AB) + (\bar{A}B) = 0 + 0 = 0$ also $A + \bar{A} \in U$

$(\lambda A) \cdot B = \lambda \cdot (AB) = \lambda \cdot 0 = 0$ also $\lambda A \in U$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1