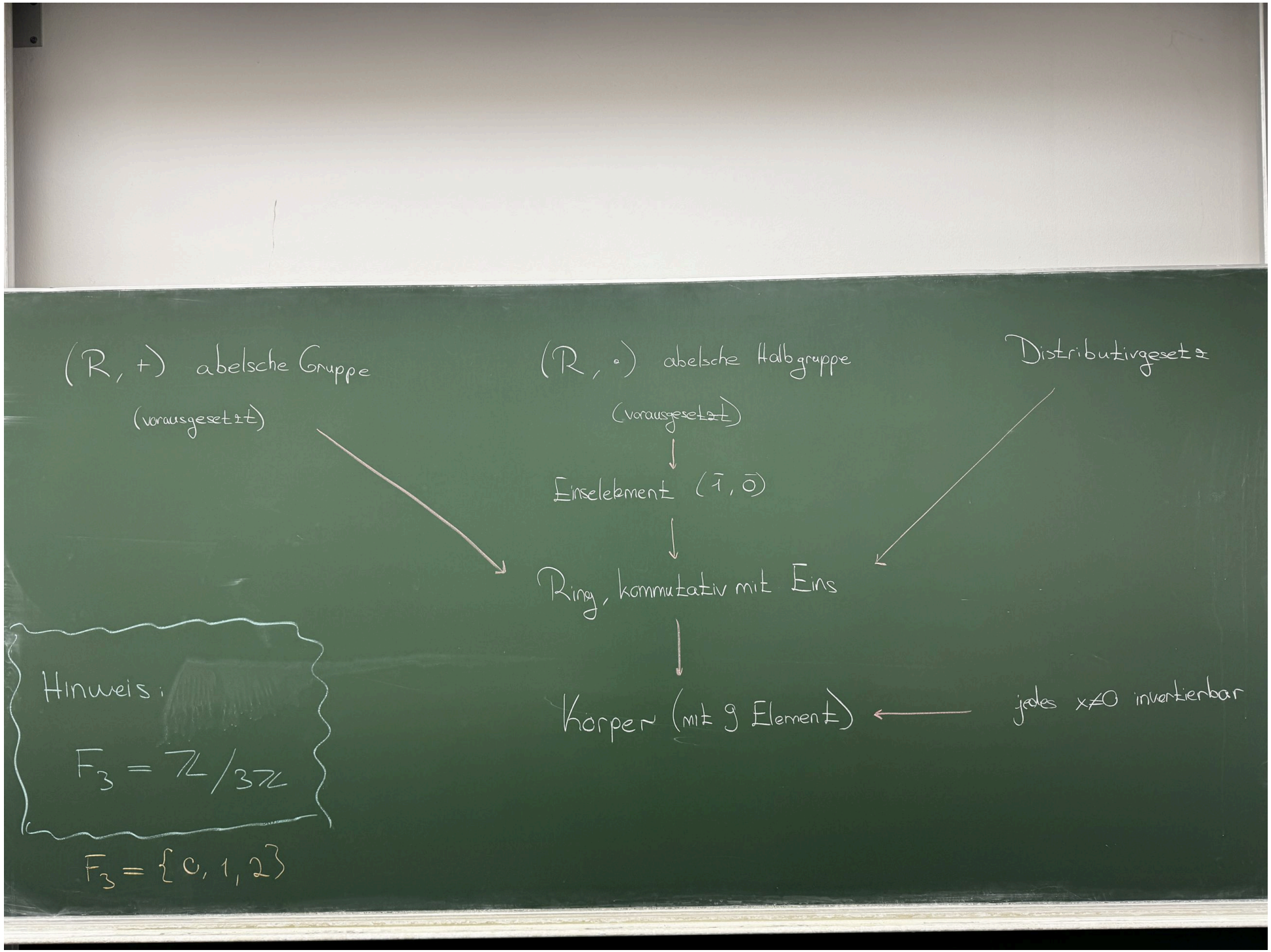
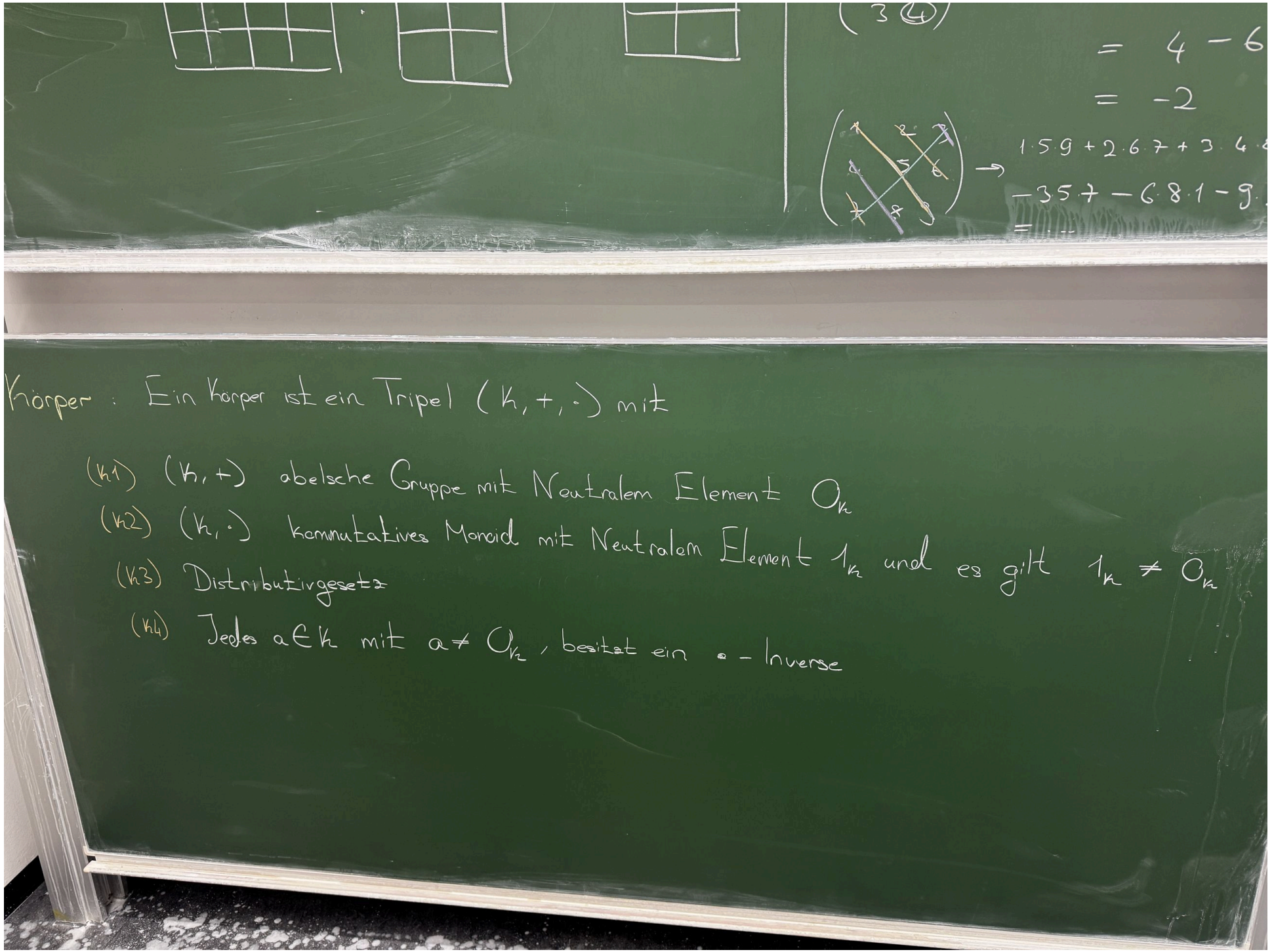

(R, +) abelsche Gruppe
(voraussetzt)
(R, ·) abelsche Halbgruppe
(voraussetzt)
Distributivgesetz
Einselement (1̄, 0̄)
Ring, kommutativ mit Eins
Körper (mit 3 Element)
jedes x≠0 invertierbar
Hinweis:
F3 = ℤ/3ℤ
F3 = {0, 1, 2}



Körper: Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ mit

(K1) $(K, +)$ abelsche Gruppe mit Neutralem Element 0_K

(K2) $(K, \cdot)$ kommutatives Monoid mit Neutralem Element 1_K und es gilt $1_K \neq 0_K$

(K3) Distributivgesetz

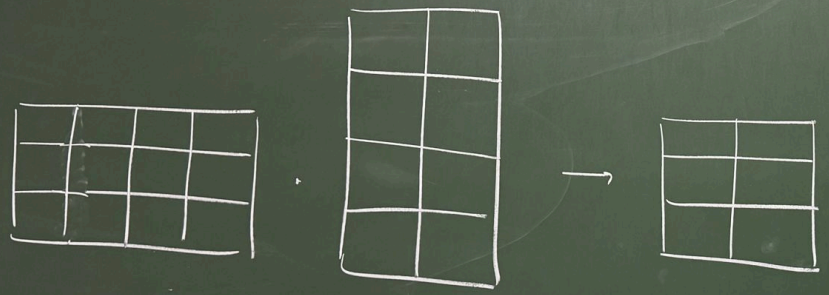
(K4) Jedes $a \in K$ mit $a \neq 0_K$, besitzt ein $\cdot$-Inverse

Matrixprodukt

Für $A = a_{ij}$, $B = b_{jk}$ $\Rightarrow$ $A \cdot B = c_{ik}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad b_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} & a_{11} \cdot b_{21} + a_{21} b_{22} \\ a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12} & a_{12} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

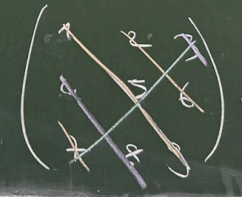




$\rightarrow$ det $= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$

$= 4 - 6$

$= -2$



$\rightarrow$ $1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8$

$- 3 5 7 - 6 8 1 - 9 2 4$

$= \ldots$

① a) Starte mit $(a,b)\cdot((c,d)+(f,g))$ und andersrum!

(Verwende die Definition in der Aufgabenstellung)

Sei $(a,b),(c,d),(e,f) \in R$

$$(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) = (a,b)\cdot(c+e,\ d+f)$$
$$= (a\cdot(c+e)-b\cdot(d+f),\ a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e))$$
$$= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be)$$

$(a,b)\cdot(e,d)+(a,b)(e,f) = \ldots -$

$a,b,c,d,e,f \in F_3$

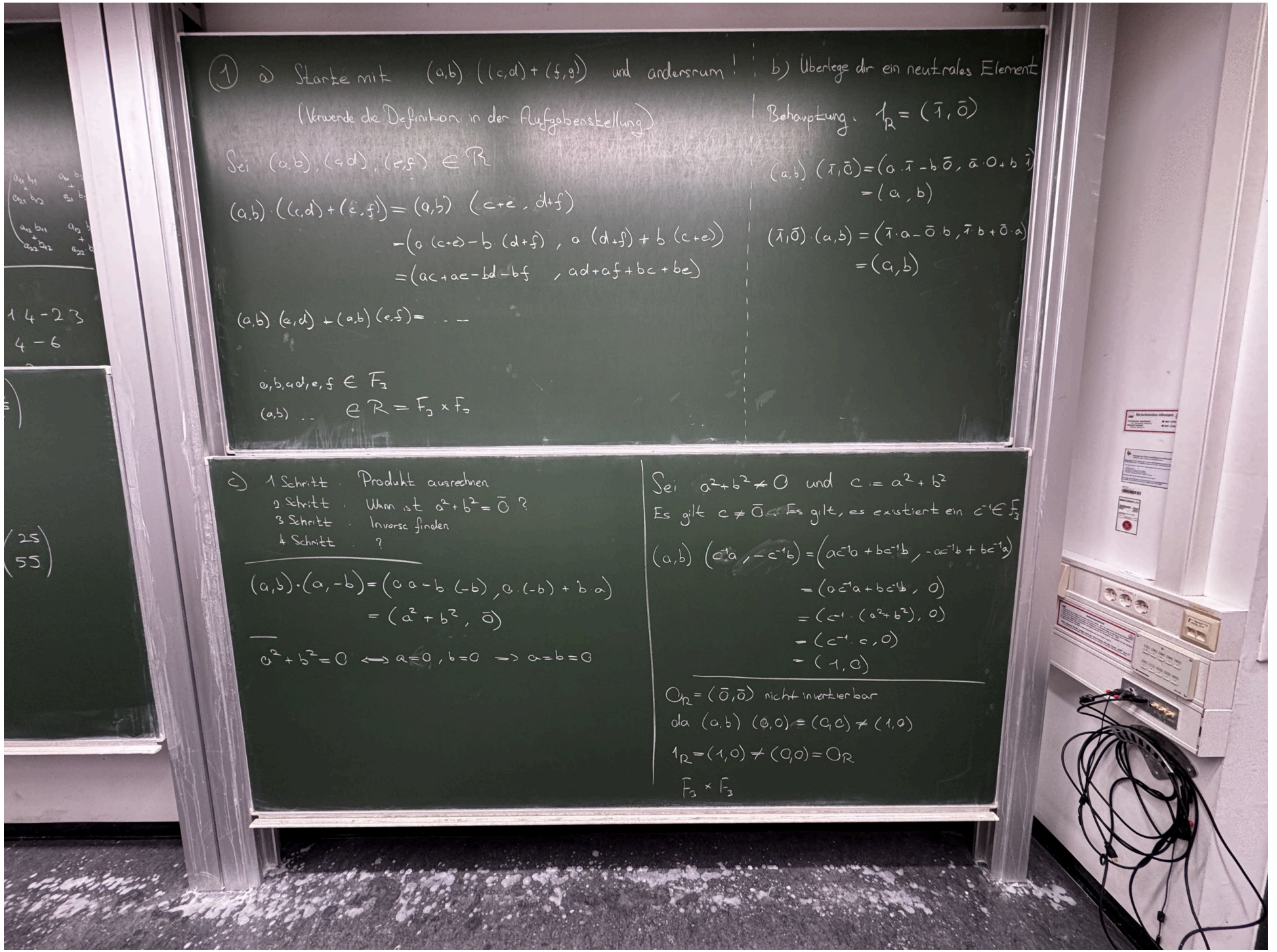
$(a,b)\ldots \in R = F_3 \times F_3$

b) Überlege dir ein neutrales Element

Behauptung: $1_R = (\bar{1},\bar{0})$

$$(a,b)\cdot(\bar{1},\bar{0}) = (a\cdot\bar{1}-b\cdot\bar{0},\ \bar{a}\cdot 0+b\cdot\bar{1})$$
$$= (a,b)$$

$$(\bar{1},\bar{0})\cdot(a,b) = (\bar{1}\cdot a-\bar{0}\cdot b,\ \bar{1}\cdot b+\bar{0}\cdot a)$$
$$= (a,b)$$

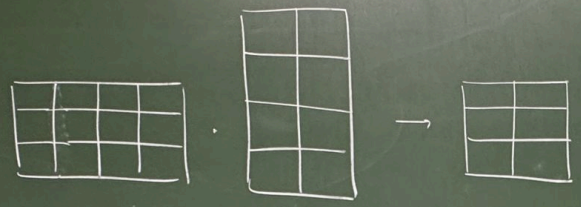

① a) Starte mit $(a,b)\cdot((c,d)+(f,g))$ und andersrum!
(Verwende die Definitionen in der Aufgabenstellung)
Sei $(a,b),(c,d),(e,f) \in R$
$(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) = (a,b)\cdot(c+e, d+f)$
$= (a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e))$
$= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be)$
$(a,b)(e,d)+(a,b)(e,f) = \ldots$
$a,b,c,d,e,f \in F_3$
$(a,b) \ldots \in R = F_3 \times F_3$
b) Überlege dir ein neutrales Element
Behauptung: $1_R = (\bar{1},\bar{0})$
$(a,b)(\bar{1},\bar{0}) = (a\cdot\bar{1}-b\cdot\bar{0},\ \bar{a}\cdot\bar{0}+b\cdot\bar{1})$
$= (a,b)$
$(\bar{1},\bar{0})\cdot(a,b) = (\bar{1}\cdot a-\bar{0}\,b,\ \bar{1}\,b+\bar{0}\cdot a)$
$= (a,b)$
c) 1 Schritt: Produkt ausrechnen
2 Schritt: Wann ist $a^2+b^2=\bar{0}$?
3 Schritt: Inverse finden
4 Schritt: ?
$(a,b)\cdot(a,-b) = (a\,a-b\,(-b),\ a\cdot(-b)+b\,a)$
$= (a^2+b^2,\ \bar{0})$
$a^2+b^2=0 \iff a=0,\ b=0 \Rightarrow a=b=0$
Sei $a^2+b^2\neq 0$ und $c := a^2+b^2$
Es gilt $c\neq\bar{0}$. Es gilt, es existiert ein $c^{-1}\in F_3$
$(a,b)\,(c^{-1}a,\ -c^{-1}b) = (ac^{-1}a+bc^{-1}b,\ -ac^{-1}b+bc^{-1}a)$
$= (a\,c^{-1}a+b\,c^{-1}b,\ 0)$
$= (c^{-1}\cdot(a^2+b^2),\ 0)$
$= (c^{-1}\cdot c,\ 0)$
$= (1,0)$
$0_R = (\bar{0},\bar{0})$ nicht invertierbar
da $(a,b)\,(0,0) = (0,0) \neq (1,0)$
$1_R = (1,0) \neq (0,0) = 0_R$
$F_3 \times F_3$

Matrixprodukt

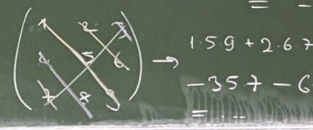
Für $A = a_{ij}$, $B = b_{jk}$ $\Rightarrow$ $AB = c_{ik}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, b_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$
$= 4 - 6$
$= -2$



$\rightarrow 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8$
$- 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4$
$= \dots$

② Überlege zuerst, welche Matrizen miteinander multipliziert werden dürfen

Hinweis: $X \cdot Y$ existiert genau dann, wenn
Anzahl von Spalten von X = Anzahl von Zeilen von Y

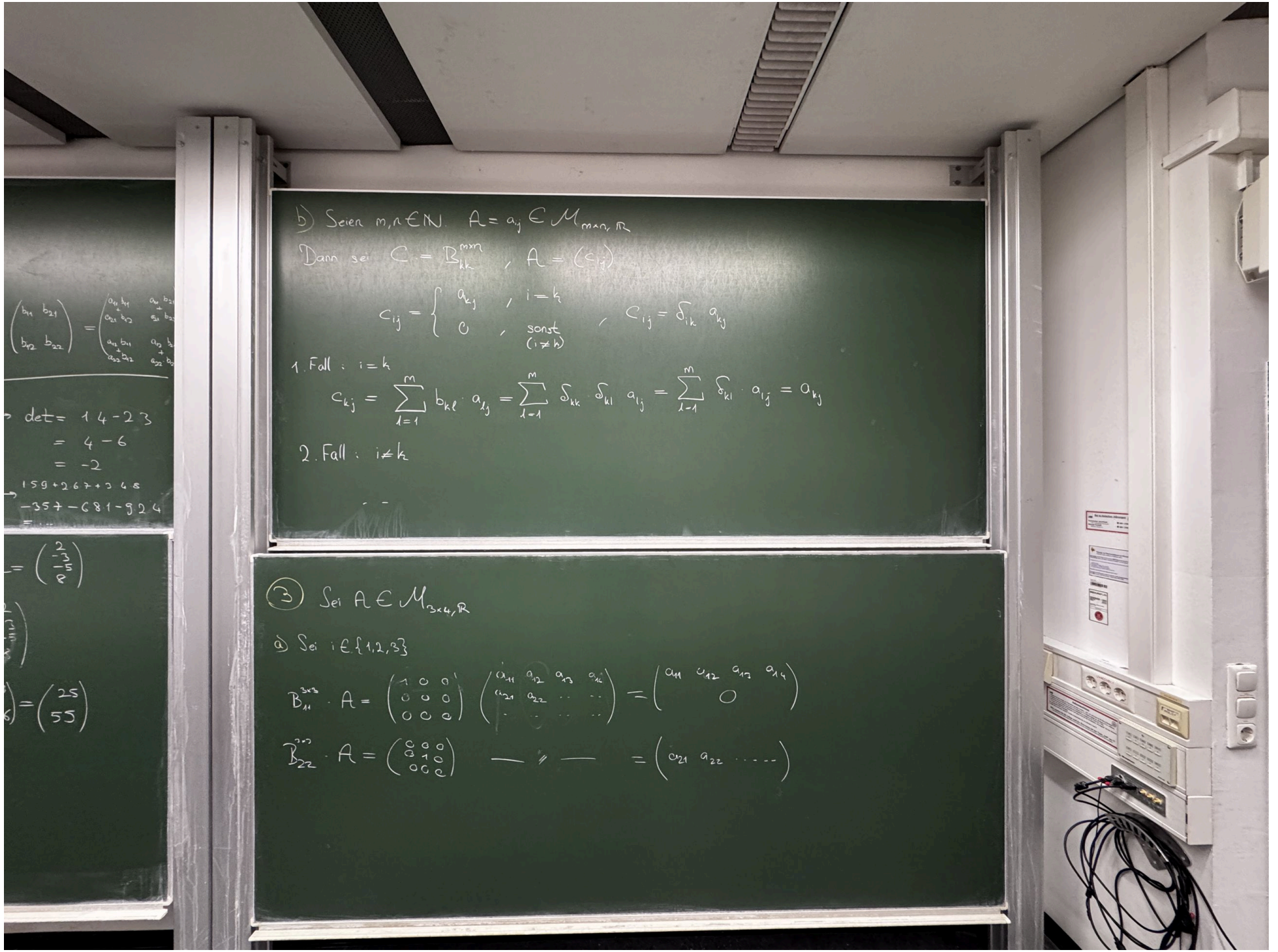
AC, BA, BB, EA

$E \cdot B$, $C \cdot E$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 15 + 0 + 40 \\ 4 - 0 - 5 + 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \end{pmatrix}$$


b) Seien $m,n \in \mathbb{N}$. $A = a_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$
Dann sei $C = B_{kk}^{m\times n}$, $A = (c_{ij})$
$c_{ij} = \begin{cases} a_{kj}, & i = k \\ 0, & \text{sonst } (i \neq k) \end{cases}$, $c_{ij} = \delta_{ik}\, a_{kj}$
1. Fall: $i = k$
$c_{kj} = \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\, a_{lj} = \sum_{l=1}^{m} \delta_{kk}\, \delta_{kl}\, a_{lj} = \sum_{l=1}^{m} \delta_{kl}\, a_{lj} = a_{kj}$
2. Fall: $i \neq k$
③ Sei $A \in \mathcal{M}_{3\times 4,\mathbb{R}}$
a) Sei $i \in \{1,2,3\}$
$B_{11}^{3\times 3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & & & \end{pmatrix}$
$B_{22}^{3\times 3} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — // — $= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$
$\det = 14 - 23$
$= 4 - 6$
$= -2$
$159 + 267 + 348$
$-357 - 681 - 924$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1