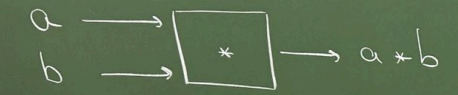
abelsche Gruppe: $a * b = b * a$, $\forall a, b \in A$

Was ist eine Verknüpfung?



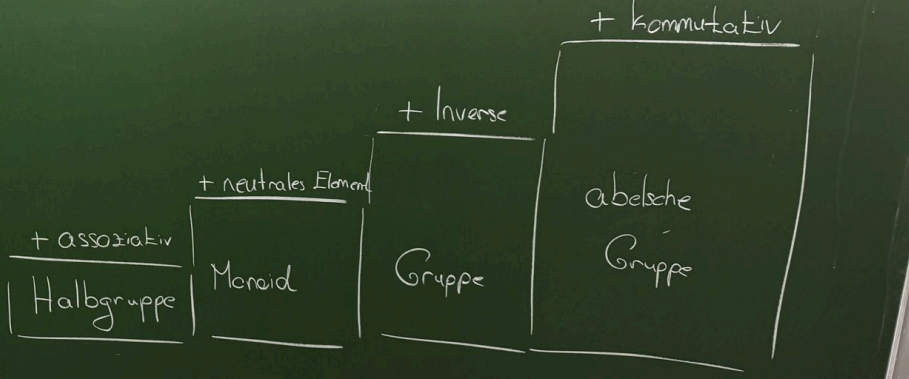
2 Elemente aus A — Wieder ein Element aus A

Verknüpfung: auf einer Menge A: eine Abbildung $* : A \times A \to A$, $(a, b) \to a * b$

Beispiele:

- + auf $\mathbb{N}$ ✓, da $3 + 5 = 8 \in \mathbb{N}$
- − auf $\mathbb{N}$ ✗, da $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$
- $\cup$ auf $P(M)$ ✓, da $A, B \subseteq M \Rightarrow A \cup B \in M$

Beispiele	ass.	neutrales Element	invertierbar sind/ist	Stufe
$(\mathbb{N}, +)$	✓	–	–	H. G.
$(\mathbb{N}_0, +)$	✓	0	0	Monoid
$(\mathbb{Z}, +)$	✓	0	alle ($a^{-1} = -a$)	abelsche Gruppe
$(\mathbb{Z}, \cdot)$	✓	1	1 und −1	Monoid



Halbgruppe: $*$ ist assoziativ, also $a*(b*c) = (a*b)*c$, $\forall a,b,c \in A$

Monoid: Halbgruppe mit Neutralem Element $e \in A$ also $e*a = a$ und $a*e = a$

a heißt invertierbar: $\exists b \in A$ mit $a*b = e \wedge b*a = e$ (Schreibweise $b = a^{-1}$)

Gruppe: Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist.

abelsche Gruppe: $a*b = b*a$, $\forall a,b \in A$

s ist eine Verknüpfung ?

Beispiele	ass.	neutrales Element	invertierbar sin
$(\mathbb{N}, +)$	✓	–	–

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

nicht invertierbar

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & & \\ & 3 & \end{pmatrix}$

OS_n



$a = 3$
$b = 4, 5$

$3+4=7$ $\quad 3+5=8$
$4+3=7$ $\quad 5+3=8$

$b = 0$

$3+0=3$
$0+3=3$

$a \in A$, b [illegible], $e = 0$

$a * b = 0 \Rightarrow b = 0$
$b * a = 0 \Rightarrow b = 0$

Gl_n

$(M_{\mathbb{N}}^{3\times 3}, \cdot)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ✓ 1 alle $a^{-1} = \frac{1}{a}$ abelsche

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1