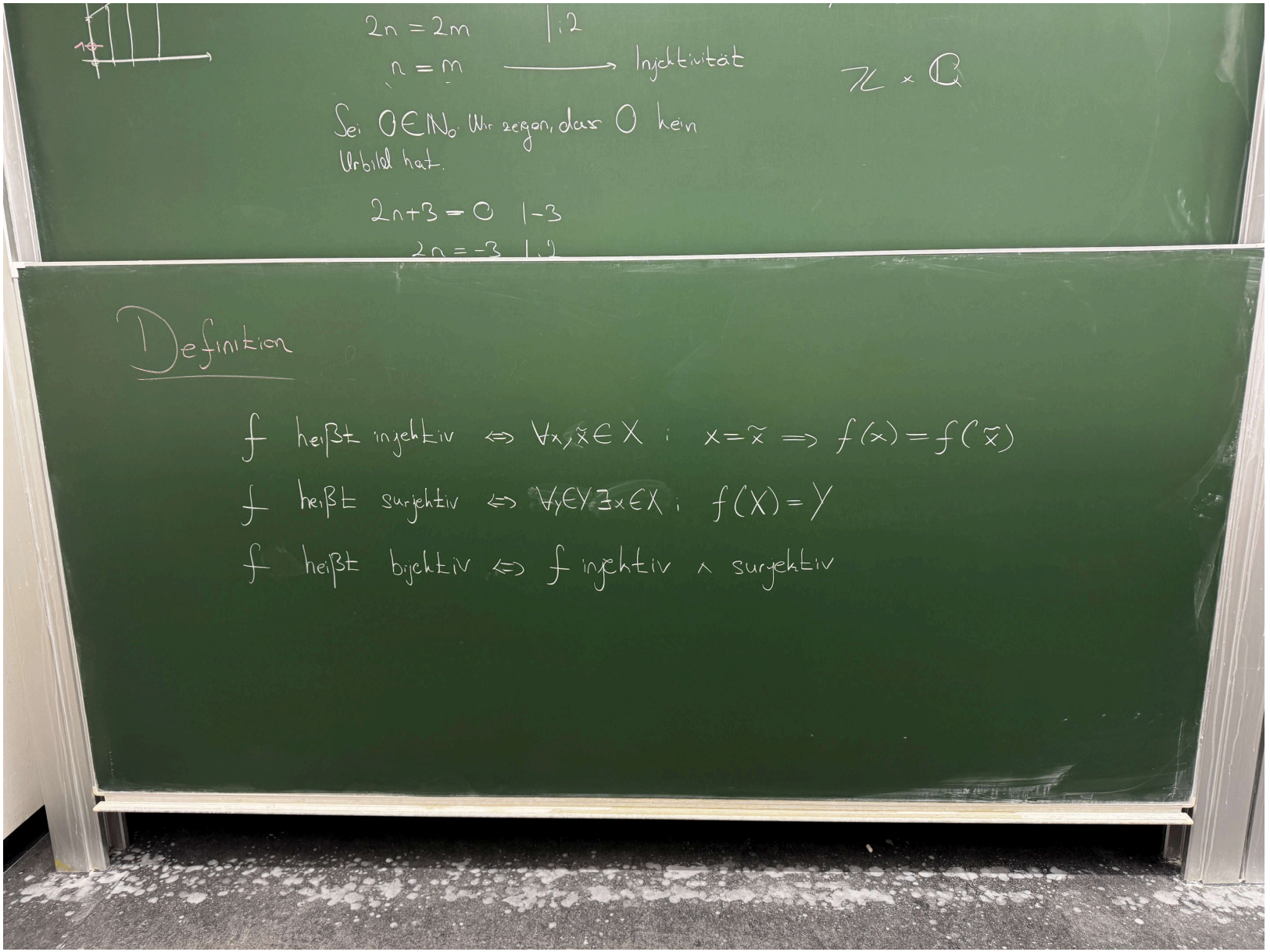


$2n = 2m \quad | :2$

$n = m \longrightarrow$ Injektivität

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

Sei $0 \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, dass 0 kein Urbild hat.

$2n+3 = 0 \quad | -3$

$2n = -3 \quad | :2$

Definition

f heißt injektiv $\Leftrightarrow \forall x, \tilde{x} \in X : x = \tilde{x} \Rightarrow f(x) = f(\tilde{x})$

f heißt surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(X) = Y$

f heißt bijektiv $\Leftrightarrow f$ injektiv $\wedge$ surjektiv

$g(x,y) = ((u+1)-1,\ (v-u-3)+(u+1)+2) = (u, v)$

$\Rightarrow$ injektiv $\wedge$ surjektiv

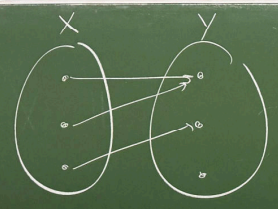
$\rightarrow$ bijektiv

---

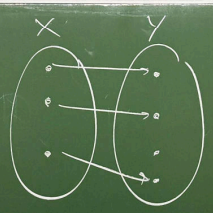
nicht injektiv

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $2 \in A \cup \{2\} = h(A)$

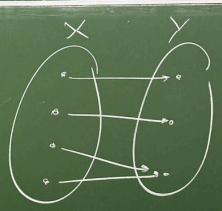
$h(A) \neq \emptyset$ mit $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$



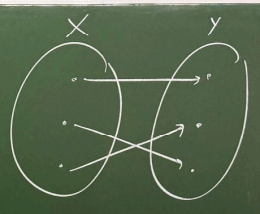
weder injektiv noch surjektiv



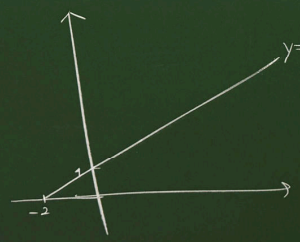
injektiv aber nicht surjektiv



surjektiv aber nicht injektiv

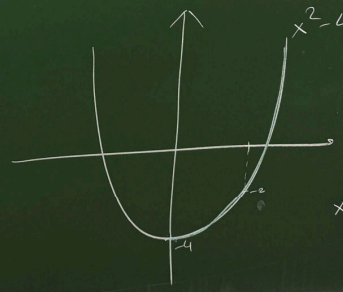


bijektiv



$f: [-2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



$f: [0, \infty[\rightarrow [-4, +\infty[$ (∈ℝ, ∈ℝ)

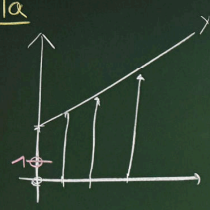
$f(x) = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = -2$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

1a



Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2n+3 &= 2m+3 \quad |-3 \\ 2n &= 2m \quad |:2 \\ n &= m \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Injektivität

Sei $0 \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, dass 0 kein Urbild hat.

$$\begin{aligned} 2n+3 &= 0 \quad |-3 \\ 2n &= -3 \quad |:2 \\ n &= -1{,}5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow n \notin \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ nicht surjektiv

1b

$(x,y) \mapsto (y-1,\ x+y+2)$

$y-1 = \tilde{y}-1 \Rightarrow y = \tilde{y}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

Definition

1b)

Sei $g(x,y) = (u,v)$ mit $u,v \in \mathbb{Z}$

$y - 1 = u \Rightarrow y = u+1$

$x+y+2 = v \Rightarrow x + u + 1 + 2 = v \rightarrow x = v-u-3$

Wir setzen ein:

$g(x,y) = ((u+1)-1, (v-u-3)+(u+1)+2) = (u, v)$

$\Rightarrow$ injektiv $\wedge$ surjektiv

$\rightarrow$ bijektiv

1c)

$\emptyset \neq \{2\}$

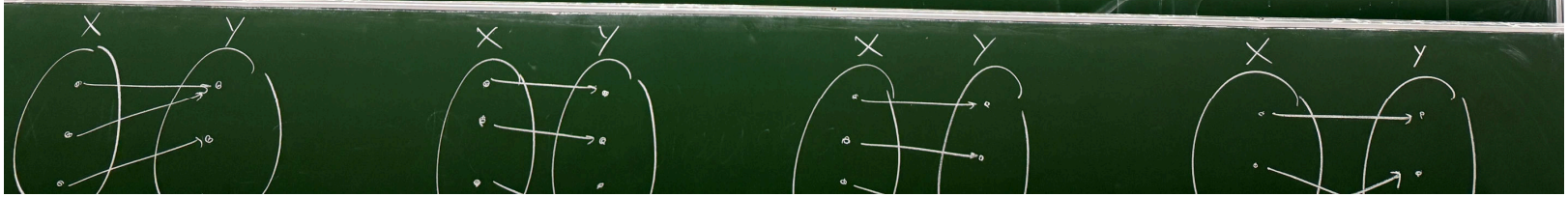
$\Rightarrow h(\emptyset) = \emptyset \cup \{2\} = \{2\} \cup \{2\} = h(\{2\})$

$\emptyset \neq \{2\} \not\Rightarrow h(\emptyset) = h(\{2\})$ ↯

nicht injektiv

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $2 \in A \cup \{2\} = h(A)$

$h(A) \neq \emptyset$ mit $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

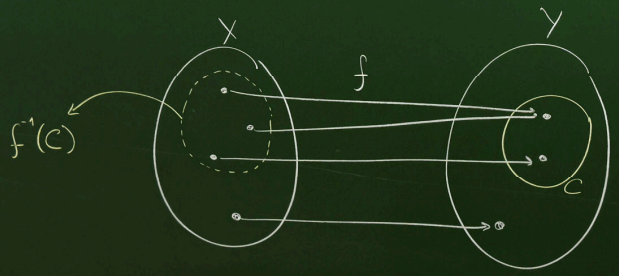


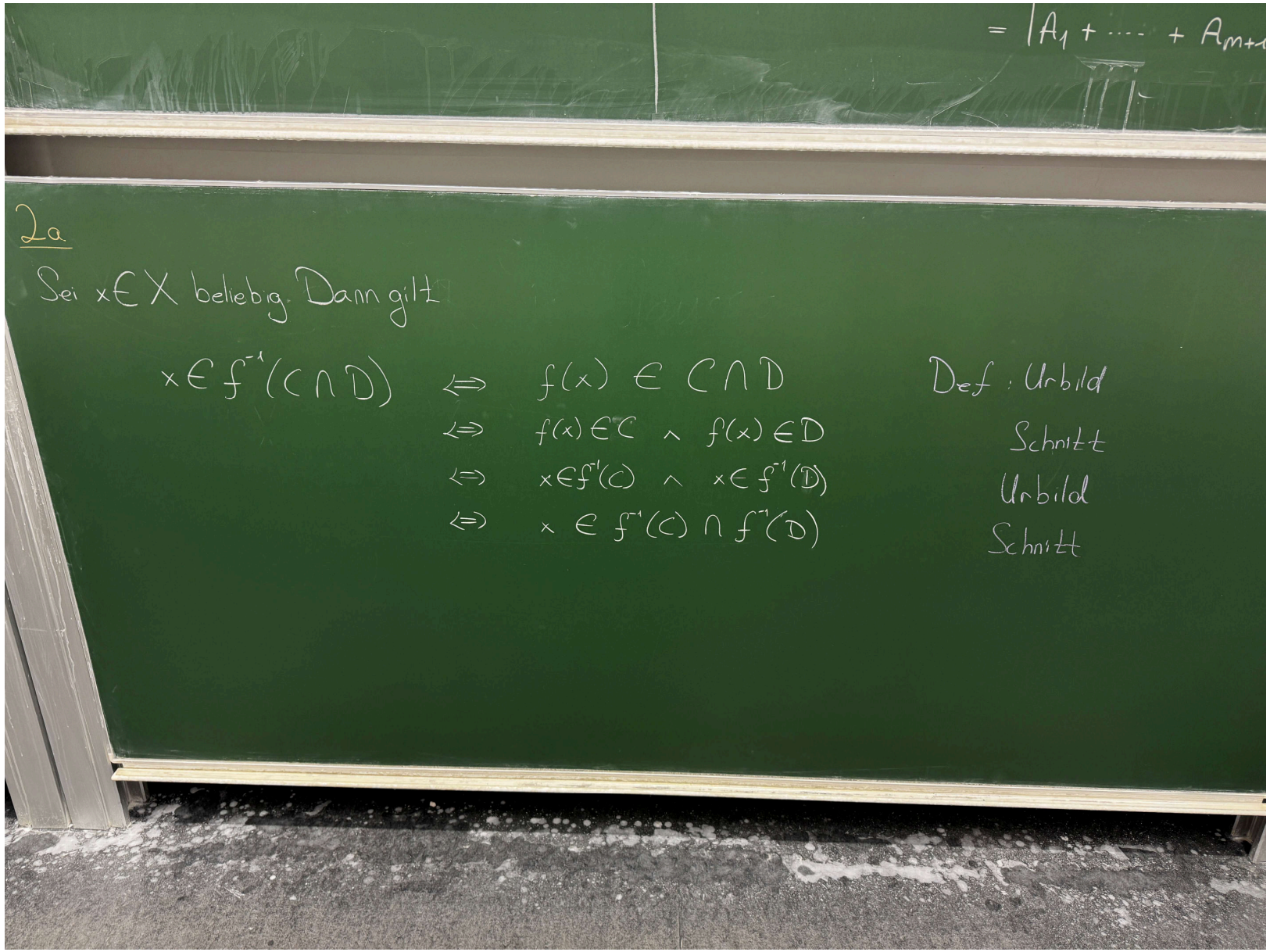
Definition

Sei $f: X \to Y$ eine Abb., $A \subseteq X$ und $C \subseteq Y$:

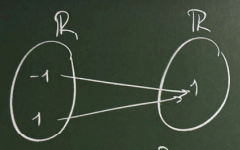
$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq Y \longrightarrow \text{Bild von } A$$

$$f^{-1}(C) = \{ x \in X \mid f(x) \in C \} \subseteq X \longrightarrow \text{Urbild von } C$$




= |A1 + ... + Am+1
2a
Sei x ∈ X beliebig. Dann gilt
x ∈ f^-1(C ∩ D) ⇔ f(x) ∈ C ∩ D
⇔ f(x) ∈ C ∧ f(x) ∈ D
⇔ x ∈ f^-1(C) ∧ x ∈ f^-1(D)
⇔ x ∈ f^-1(C) ∩ f^-1(D)
Def: Urbild
Schnitt
Urbild
Schnitt

2b



Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ sowie $A = \{-1\}$ und $B = \{1\}$

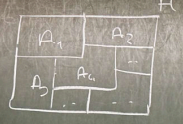
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(\emptyset) = \emptyset$

$f(-1) = 1$ und $f(1) = 1$ also $f(A) = f(B) = \{1\}$ und $f(A) \cap f(B) = \{1\}$

Es gilt $\emptyset \neq \{1\}$ und damit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Definition

3



IA: Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A = A_1$ und $|A| = |A_1|$.

IV: Für ein $m \in \mathbb{N}$ gelte $|A| = |A_1| + \dots + |A_m|$

IS: $m \rightsquigarrow m+1$. Seien $A_1, \dots, A_{m+1}$ endliche und paarweise disjunkte Teilmengen von A.

$$A = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}_{B} \cup A_{m+1}$$

$$A = B \cup A_{m+1}$$

Mit der IV: $|B| = |A_1| + \dots + |A_m|$

Sei $B \cap A_{m+1} = \emptyset$. Angenommen, es gibt ein $b \in B \cap A_{m+1}$. Wegen b gibt es ein $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $b \in A_k \cap A_{m+1}$, dies ist ein Widerspruch, da $A_k \cap A_{m+1} = \emptyset$.

Da B und A_{m+1} nach der Annahme endlich sind gilt:

$$|A| = |B \cup A_{m+1}| = |B| + |A_{m+1}|$$

$$= |A_1 + \dots A_m| + |A_{m+1}|$$

$$= |A_1 + \dots + A_{m+1}|$$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1