LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER · TUTORIUM · WINTERSEMESTER 2026/27

Blatt 6 erklärt

Vektorraum-Axiome · Untervektorräume · Zerlegung mit einer Spiegelung

Begleitmaterial zum Nacharbeiten der Tutoriumsaufgaben 1 bis 3 – mit Werkzeugkasten, gestuften Hinweisen, ausführlichen Lösungswegen, Skizzen, typischen Fehlern und einem Selbsttest.

Mirkan Deniz Günkaya · Tutorium donnerstags 14–16 Uhr, Mathematisches Institut, B041 · mirkan-analysis.de

Bevor ihr loslegt

Dieses Begleitmaterial habe ich für euch geschrieben, damit ihr das Tutoriumsblatt 6 in Ruhe nacharbeiten könnt. Es ist ein **freiwilliges Zusatzangebot** und **keine offizielle Datei oder Musterlösung der Vorlesung**. Verbindlich sind die Vorlesung, das Skript und die Ankündigungen von Dr. Gerkmann. Die Aufgaben sind in eigenen Worten wiedergegeben; das Hausaufgabenblatt ist nicht gelöst. **Weitergeben ausdrücklich erwünscht.** Wenn euch ein Fehler auffällt oder etwas unklar bleibt, sprecht mich im Tutorium an.

So holt ihr am meisten heraus: Versucht jede Aufgabe zuerst selbst. Wenn ihr hängt, lest nur den nächsten Hinweis. Die Lösung ist zum Vergleichen da – nicht zum Abschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1 Werkzeugkasten **2**

2 Aufgabe 1: Eine Skalarmultiplikation, die fast alles kann **2**

3 Aufgabe 2: Untervektorraum oder nicht? **4**

3.1 Teil (a): UVR . . . 4

3.2 Teil (b): kein UVR . . . 4

3.3 Teil (c): UVR . . . 4

3.4 Teil (d): UVR . . . 5

4 Aufgabe 3: Zerlegen mit einer Spiegelung **5**

4.1 Teil (a) . . . 6

4.2 Teil (b) . . . 6

5 Selbsttest **7**

1 Werkzeugkasten

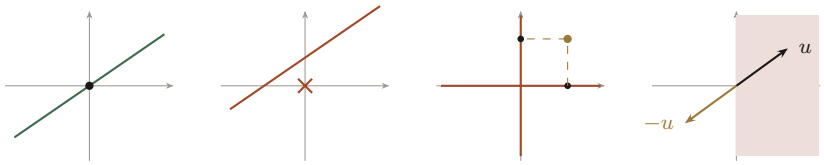
Vektorraum (Definition 6.1) Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ aus einer nichtleeren Menge V, einer Verknüpfung $+\colon V \times V \to V$ und einer Abbildung $\cdot\colon K \times V \to V$ mit
(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe;
(ii) für alle $v, w \in V, \lambda, \mu \in K$: (a) $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$, (b) $\lambda(v+w) = \lambda v+\lambda w$, (c) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$, (d) $1_K\, v = v$.

Merkhilfe: Es gibt genau zwei Operationen – Pfeile *aneinanderhängen* und Pfeile *strecken*. Die Axiome sagen nur, dass beide sich „vernünftig" vertragen.

Untervektorraum (Definition 6.4) $U \subseteq V$ ist ein Untervektorraum (UVR), wenn **(U1)** $0_V \in U$, **(U2)** $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$, **(U3)** $\lambda v \in U$ für alle $\lambda \in K$, $v \in U$.

Das UVR-Rezept

1. Liegt 0_V in U? *Wenn nein: fertig, kein UVR.*
2. Nimm $u, w \in U$ und schreibe hin, was das *bedeutet* (die Bedingung aus der Definition von U).
3. Rechne nach, dass $u + w$ und λu dieselbe Bedingung erfüllen.
4. Für „kein UVR": *ein* konkretes Gegenbeispiel mit Zahlen.



(A) UVR Gerade durch 0 | **(B) kein UVR** $0 \notin U$: (U1) | **(C) kein UVR** $xy = 0$: (U2) | **(D) kein UVR** $x \geq 0$: (U3)

Jede der drei Bedingungen kann einzeln scheitern. Bei (C) liegt die Null drin und man darf strecken – aber die Summe fällt heraus.

Lineare Abbildungen (Definition 6.8) $\varphi\colon V \to W$ ist linear, wenn $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ und $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$. Dann ist $\varphi(0_V) = 0_W$ (Lemma 6.9), und $\ker\varphi = \{v : \varphi(v) = 0\}$ ist ein UVR (6.16, 6.17). $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, die Menge aller linearen Abbildungen $V \to W$, ist selbst ein K-Vektorraum (Satz 6.23) mit $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ und $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$.

2 Aufgabe 1: Eine Skalarmultiplikation, die fast alles kann

Aufgabe 1 (in eigenen Worten)

Auf $V = \mathbb{R}^2$ sei $+$ die übliche komponentenweise Addition und $*\colon \mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

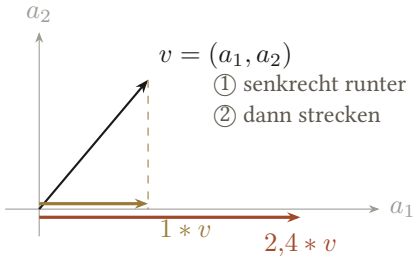
$$\lambda * (a_1, a_2) = (\lambda a_1,\ 0).$$

Zeige: $(V, +, *)$ erfüllt (i) und (ii)(a), (b), (c) aus Definition 6.1, aber nicht (ii)(d).

Worum es geht

$*$ macht zwei Dinge: erst den Vektor **senkrecht auf die a_1-Achse drücken**, dann strecken. Die

Rechenregeln (a)–(c) betreffen nur die erste Koordinate, und dort ist alles gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen. Nur (d) merkt, dass die zweite Koordinate verloren geht. Die Aufgabe zeigt: **(d) folgt nicht aus den anderen Axiomen** – man muss es wirklich fordern.



Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Für (i): Hat sich an der Addition etwas geändert?

Hinweis 2. Für (a)–(c): Schreibe beide Seiten mit $v = (a_1, a_2)$ und $w = (b_1, b_2)$ aus. Die zweite Koordinate ist auf beiden Seiten 0.

Hinweis 3. Für (d): Für welche Vektoren gilt $1 * v = v$? Nimm einen, für den es nicht gilt.

Lösung, Schritt für Schritt

Seien $v = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2) \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) Die Addition ist die gewöhnliche des $\mathbb{R}^2$. Nach Proposition 6.2 ist $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe – daran ändert die neue Abbildung $*$ nichts. ✓

(a) $(\lambda + \mu) * v = \big((\lambda + \mu)a_1, 0\big) = (\lambda a_1, 0) + (\mu a_1, 0) = \lambda * v + \mu * v.$ ✓

(b) $\lambda * (v + w) = \lambda * (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2) = \big(\lambda(a_1 + b_1), 0\big) = (\lambda a_1, 0) + (\lambda b_1, 0) = \lambda * v + \lambda * w.$ ✓

(c) $(\lambda\mu) * v = (\lambda\mu a_1, 0)$ und $\lambda * (\mu * v) = \lambda * (\mu a_1, 0) = (\lambda\mu a_1, 0).$ ✓

Warum: Bei (c) wird auf $(\mu a_1, 0)$ noch einmal $*$ angewendet. Die zweite Koordinate ist schon 0, Plattdrücken ändert nichts mehr.

(d) Für $v = (1, 1)$ ist $1 * (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$. ×

Also gelten (i), (a), (b), (c), aber (d) nicht; $(V, +, *)$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum. □

Typische Fehler

- Die Axiome nur an einem Beispiel „prüfen“. (a)–(c) müssen für *alle* v, w, λ, μ gezeigt werden – also allgemein mit Buchstaben.
- Bei (d) allgemein „$1 * v \neq v$“ behaupten. Für $v = (a_1, 0)$ stimmt $1 * v = v$ sogar! Ein Gegenbeispiel muss konkret sein.
- Bei (c) vergessen, dass auf der rechten Seite $*$ *zweimal* angewendet wird.

3 Aufgabe 2: Untervektorraum oder nicht?

Aufgabe 2 (in eigenen Worten)

Entscheide jeweils, ob U ein Untervektorraum von V ist.

(a) $V = \mathbb{R}^2,\ U = \{(x, y) : 2x - 3y = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z) : x + 2y - 5z = 7\}$

(c) $V = \mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}},\ U = \{A \in V : AB = 0\}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ U = \{\varphi \in V : 2\varphi(1, 0) + \varphi(0, 1) = 0\}$

Worum es geht

Alle vier Teile laufen nach demselben Rezept. Der erste Blick gilt immer der Null. Steht in der Bedingung rechts eine Zahl $\neq 0$ (wie bei (b)), ist der Fall nach einer Zeile erledigt. Bei (c) und (d) sind die „Vektoren“ Matrizen bzw. Abbildungen – die kann man nicht als Pfeile zeichnen, aber das Rezept funktioniert genauso.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Prüfe in jedem Teil zuerst (U1).

Hinweis 2. Bei (c): Rechenregeln für Matrizen, $(A + A')B = AB + A'B$ und $(\lambda A)B = \lambda(AB)$.

Hinweis 3. Bei (d): Was ist der Nullvektor in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$? Und was bedeutet $(\varphi + \psi)(1, 0)$?

3.1 Teil (a): UVR

(U1) $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$, also $(0, 0) \in U$.

(U2) Seien $(x, y), (x', y') \in U$, also $2x - 3y = 0$ und $2x' - 3y' = 0$. Dann

$$2(x + x') - 3(y + y') = (2x - 3y) + (2x' - 3y') = 0 + 0 = 0,$$

also $(x + x', y + y') \in U$.

(U3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$: $2(\lambda x) - 3(\lambda y) = \lambda(2x - 3y) = \lambda \cdot 0 = 0$. □

Warum: Geometrisch ist U die Gerade $y = \frac{2}{3}x$ durch den Ursprung – Bild (A) oben.

3.2 Teil (b): kein UVR

$0 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 \neq 7$, also $(0, 0, 0) \notin U$; (U1) ist verletzt. □

Warum: U ist eine Ebene, die am Ursprung vorbeigeht – ein affiner *Unterraum (Definition 6.6), Bild (B). Mit $(7, 0, 0) \in U$ ist $U = (7, 0, 0) + \{(x, y, z) : x + 2y - 5z = 0\}$.*

3.3 Teil (c): UVR

(U1) $0_{2\times 3} \cdot B = 0_{2\times 2}$, also $0 \in U$.

(U2) Für $A, A' \in U$: $(A + A')B = AB + A'B = 0 + 0 = 0$.

(U3) Für $A \in U, \lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda \cdot 0 = 0$. □

Was ist U konkret? Multipliziert man $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ mit B, erhält man genau die ersten beiden Spalten:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad \text{Also} \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Warum: Die Rechnung mit der konkreten Form ist ein guter Kontrollblick, aber der Beweis oben braucht sie nicht. Er funktioniert für jede *Matrix B: Der Kern der Abbildung $A \mapsto AB$ ist immer ein UVR.*

3.4 Teil (d): UVR

Der Nullvektor von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist die Nullabbildung $0(v) = 0$.

(U1) $2 \cdot 0(1,0) + 0(0,1) = 0$, also $0 \in U$.

(U2) Für $\varphi, \psi \in U$ gilt nach Definition der Summe

$$2(\varphi+\psi)(1,0) + (\varphi+\psi)(0,1) = \big(2\varphi(1,0) + \varphi(0,1)\big) + \big(2\psi(1,0) + \psi(0,1)\big) = 0 + 0 = 0.$$

(U3) $2(\lambda\varphi)(1,0) + (\lambda\varphi)(0,1) = \lambda\big(2\varphi(1,0) + \varphi(0,1)\big) = 0.$ □

Was ist U konkret? Jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ hat die Form $\varphi(x,y) = ax + by$ mit $a = \varphi(1,0), b = \varphi(0,1)$. Die Bedingung heißt $2a + b = 0$, also $b = -2a$:

$$U = \{\varphi_a : a \in \mathbb{R}\}, \qquad \varphi_a(x,y) = a(x - 2y).$$

Wie bei (a) ist U eine „Gerade“ – nur dass ihre Punkte Abbildungen sind.

> **Typische Fehler**
>
> - (U1) bei (b) übersehen und mühsam (U2) prüfen. Erst die Null!
> - Bei (U2) nicht aufschreiben, was $u, w \in U$ *bedeutet*. Ohne die Bedingungen $2x - 3y = 0$ usw. hat man nichts in der Hand.
> - Bei (d) $(\varphi+\psi)(1,0)$ einfach „ausmultiplizieren“, ohne zu sagen, dass das die *Definition* der Summe in Hom ist.
> - Bei (c) BA statt AB rechnen. BA ist hier ein 3×3-Produkt und hat mit U nichts zu tun.

4 Aufgabe 3: Zerlegen mit einer Spiegelung

Aufgabe 3 (in eigenen Worten)

Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Setze

$$V^+ = \{v \in V : \varphi(v) = v\}, \qquad V^- = \{v \in V : \varphi(v) = -v\}.$$

(a) Zeige, dass V^+ und V^- Untervektorräume sind.

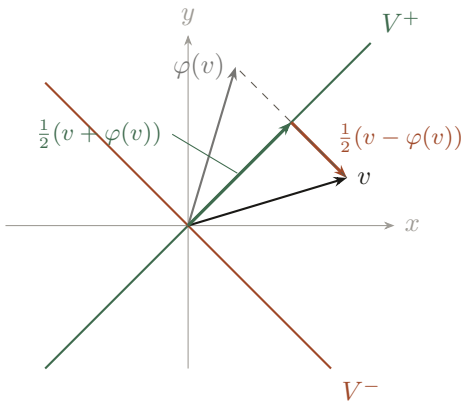
(b) Zeige $V = V^+ + V^-$ und $V^+ \cap V^- = \{0_V\}$.

Worum es geht

Das Musterbeispiel ist eine **Spiegelung**: Zweimal spiegeln gibt das Original. V^+ sind die Vektoren, die beim Spiegeln liegen bleiben (die Spiegelachse), V^- die, die genau umklappen (senkrecht zur Achse). Jeder Vektor lässt sich in einen „Achsenanteil“ und einen „Umklappanteil“ zerlegen:

$$v = \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(v+\varphi(v)\big)}_{\in V^+} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(v-\varphi(v)\big)}_{\in V^-}.$$

Woher kommt die Formel? Ansatz $v = v^+ + v^-$; Anwenden von φ gibt $\varphi(v) = v^+ - v^-$. Addieren bzw. subtrahieren der beiden Gleichungen liefert $2v^+ = v + \varphi(v)$ und $2v^- = v - \varphi(v)$.



Spiegelung an der Diagonalen, $\varphi(x,y) = (y,x)$: Jeder Vektor ist Summe eines Anteils auf der Achse und eines Anteils senkrecht dazu.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Für (a): Rezept – oder schneller: $V^+ = \ker(\varphi - \mathrm{id}_V)$ und $V^- = \ker(\varphi + \mathrm{id}_V)$.
Hinweis 2. Für $V = V^+ + V^-$: Prüfe, dass φ den ersten Anteil festlässt und den zweiten umklappt. Dafür brauchst du $\varphi(\varphi(v)) = v$.
Hinweis 3. Für den Schnitt: Was folgt aus $\varphi(v) = v$ und $\varphi(v) = -v$ gleichzeitig?

4.1 Teil (a)

Wir zeigen es für V^-; V^+ geht genauso (ohne Minuszeichen).

(U1) $\varphi(0_V) = 0_V = -0_V$ (Lemma 6.9), also $0_V \in V^-$.

(U2) Für $v, w \in V^-$: $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = -v - w = -(v+w)$.

(U3) Für $\lambda \in \mathbb{Q}$: $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda(-v) = -(\lambda v)$. □

Warum: Eleganter: $\varphi - \mathrm{id}_V$ und $\varphi + \mathrm{id}_V$ sind linear (Summe linearer Abbildungen, Satz 6.23), und Kerne linearer Abbildungen sind UVR (Proposition 6.16).

4.2 Teil (b)

$V = V^+ + V^-$. Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar, weil $V^+, V^- \subseteq V$ und V unter $+$ abgeschlossen ist. Für „$\subseteq$“ sei $v \in V$. Setze $v^+ = \frac{1}{2}(v+\varphi(v))$ und $v^- = \frac{1}{2}(v-\varphi(v))$. Dann ist $v^+ + v^- = v$, und mit $\varphi(\varphi(v)) = v$:

$$\varphi(v^+) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi(v) + v\big) = v^+, \qquad \varphi(v^-) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi(v) - v\big) = -v^-.$$

Also $v^+ \in V^+$, $v^- \in V^-$ und $v \in V^+ + V^-$.

$V^+ \cap V^- = \{0_V\}$. 0_V liegt in beiden nach (a). Ist umgekehrt $v \in V^+ \cap V^-$, dann $v = \varphi(v) = -v$, also $2v = 0_V$ und $v = \frac{1}{2} \cdot 2v = \frac{1}{2} \cdot 0_V = 0_V$. □

Wo steckt $\mathbb{Q}$? Zweimal wird durch 2 geteilt: bei $\frac{1}{2}(v \pm \varphi(v))$ und bei $2v = 0 \Rightarrow v = 0$. Das geht, weil $2 \neq 0$ in $\mathbb{Q}$. Über $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist $2 = 0$, und die Aussage kippt: Für $V = \mathbb{F}_2^2$ und $\varphi(x, y) = (y, x)$ ist $-v = v$, also $V^+ = V^- = \{(0,0), (1,1)\}$. Der Schnitt ist nicht $\{0\}$, und $V^+ + V^- \neq V$.

Typische Fehler

- Die Zerlegungsformel hinschreiben, ohne nachzurechnen, dass die Anteile wirklich in V^+ bzw. V^- liegen. Genau dort wird $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$ gebraucht.
- Beim Schnitt aus $v = -v$ direkt $v = 0$ folgern. Das braucht $2 \neq 0$ im Körper.
- $V^+ + V^-$ mit $V^+ \cup V^-$ verwechseln. Die Summe ist $\{u + w : u \in V^+, w \in V^-\}$, die Vereinigung zweier Geraden ist dagegen nicht einmal ein UVR (Bild (C)).

5 Selbsttest

1. Ist $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ ein Untervektorraum?
2. Ist $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ ein Untervektorraum?
3. Auf $V = \mathbb{R}^2$ sei $+$ wie üblich und $\lambda * v = v$ für alle λ. Welches Axiom aus (ii) ist verletzt?
4. Für $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $\varphi(x, y) = (-x, y)$: Bestimme V^+ und V^-.

Lösungen zum Selbsttest

1. Nein. $(1, 0)$ und $(0, -1)$ liegen in U, aber $(1, -1)$ nicht: (U2) ist verletzt. (U1) und (U3) gelten.
2. Ja: $U = \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$, eine Gerade durch 0.
3. (a): $(1 + 1) * v = v$, aber $1 * v + 1 * v = 2v \neq v$ für $v \neq 0$. (Auch (d) gilt hier, (b) und (c) ebenfalls – nur (a) nicht.)
4. $V^+ = \{(0, y) : y \in \mathbb{Q}\}$ (die y-Achse, Spiegelachse), $V^- = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$ (die x-Achse).

Fragen, Fehler gefunden oder Wünsche für das nächste Blatt? Sprecht mich gern im Tutorium an.
Weitere Materialien, Skizzen zum Anfassen und Wissens-Checks: mirkan-analysis.de/lineare-algebra-1.html

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1