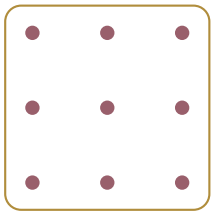
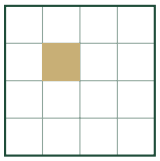
LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER | WISE 2026/27

Begleitskript zu Blatt 5

Ein Körper mit 9 Elementen
Matrixprodukte • Basismatrizen



$\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$



B_{kl}

Mirkan Deniz Günkaya

Tutorium Donnerstag, 14–16 Uhr

Was ist das hier?

Dieses Skript habe ich als Tutor zusätzlich zum Tutorium geschrieben. Es ist **kein offizielles Material** der Vorlesung und ersetzt weder das Skript noch die Musterlösung von Dr. Gerkmann. Verbindlich ist immer das, was in Moodle steht. Ihr dürft das Skript gern weitergeben, wenn es jemandem hilft.
So ist es aufgebaut: Zuerst ein *Werkzeugkasten* mit allem, was ihr für das Blatt braucht. Dann zu jeder Aufgabe die **Idee**, die **Lösung** und die **typischen Fehler**. Am Ende ein Selbsttest mit Lösungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Werkzeugkasten **3**
1.1 Ring und Körper . . . 3
1.2 Rechnen in $\mathbb{F}_3$ . . . 3
1.3 Das Vorbild: komplexe Zahlen . . . 4
1.4 Matrizen und das Matrixprodukt . . . 4
1.5 Summenzeichen und Kronecker-Delta . . . 5
1.6 Basismatrizen . . . 6

2 Aufgabe 1: Ein Körper mit 9 Elementen **7**
2.1 Teil (a): Distributivgesetz . . . 7
2.2 Teil (b): Das Einselement . . . 8
2.3 Teil (c): Inverse, also ist R ein Körper . . . 8

3 Aufgabe 2: Welche Matrixprodukte gibt es? **11**
3.1 Schritt 1: Formate . . . 11
3.2 Schritt 2: Welche Paare passen? . . . 11
3.3 Schritt 3: Rechnen . . . 12
3.4 Was es nicht gibt, und warum . . . 13

4 Aufgabe 3: Basismatrizen als Zeilenfilter **14**
4.1 Teil (a) . . . 14
4.2 Teil (b): Die allgemeine Aussage . . . 15
4.3 Zum Weiterdenken . . . 16

5 Überblick **17**

6 Selbsttest **17**

1 Werkzeugkasten

1.1 Ring und Körper

Letzte Woche hattet ihr Halbgruppen, Monoide, Gruppen und Körper. Heute kommt der Begriff *Ring* dazu. Ein Ring ist ein Körper, bei dem man nicht unbedingt dividieren kann.

Kommutativer Ring und Körper

Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt **kommutativer Ring**, wenn

(R1) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist (Neutralelement 0_R),

(R2) $(R, \cdot)$ ein kommutatives Monoid ist (Neutralelement 1_R),

(R3) das Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in R$ gilt.

Gilt zusätzlich $1_R \neq 0_R$ und ist **jedes** Element $a \neq 0_R$ multiplikativ invertierbar, so heißt R ein **Körper**. Mit der Einheitengruppe $R^\times$ geschrieben: $R^\times = R \setminus \{0_R\}$.

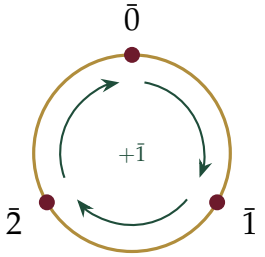
	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$
kommutativer Ring	ja	ja	ja
Körper	nein (2 hat kein Inverses)	nein ($\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$)	ja

Merke

Bei Aufgabe 1 sind (R1) und die Halbgruppe schon geschenkt. Ihr müsst nur noch das Distributivgesetz (a), das Einselement (b) und die Inversen (c) zeigen. Jede Teilaufgabe liefert also genau ein fehlendes Puzzlestück.

1.2 Rechnen in $\mathbb{F}_3$

$\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ ist „Rechnen mit Rest modulo 3“. Stellt euch eine Uhr mit nur drei Stunden vor: $\bar{1} + \bar{2}$ ist einmal rundherum, also $\bar{0}$.



Jeder Pfeil: $+\bar{1}$.

Drei Schritte = wieder bei $\bar{0}$.

Also $-\bar{1} = \bar{2}$ und $-\bar{2} = \bar{1}$.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
x^{-1}	–	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Die dritte Tabelle ist für heute die wichtigste. Merkt euch:

Merke

In $\mathbb{F}_3$ sind die einzigen Quadrate $\bar{0}$ und $\bar{1}$. Es gibt kein $x \in \mathbb{F}_3$ mit $x^2 = \bar{2} = -\bar{1}$.
Außerdem: $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$ und $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$ (denn $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$).

Für Informatiker: In Python wäre das einfach `(a*b) % 3` bzw. `(a+b) % 3`. Und $-b$ ist `(-b) % 3`, was in Python tatsächlich 2 für $b = 1$ liefert.

1.3 Das Vorbild: komplexe Zahlen

Die Multiplikation in Aufgabe 1 wirkt auf den ersten Blick willkürlich:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Sie ist aber alles andere als zufällig. Rechnet mal mit komplexen Zahlen:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bd\, i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

Schreibt man $a + bi$ als Paar (a, b), steht da **genau** die Formel aus der Aufgabe. Der Ring R ist also so etwas wie „komplexe Zahlen, deren Real- und Imaginärteil in $\mathbb{F}_3$ liegen“.

	in $\mathbb{C}$	in $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$
Element	$a + bi$	(a, b)
Eins	$1 = 1 + 0i$	$(\bar{1}, \bar{0})$
„i“	i, mit $i^2 = -1$	$(\bar{0}, \bar{1})$, mit $(\bar{0}, \bar{1})^2 = (\bar{2}, \bar{0}) = -1_R$
Konjugiertes	$\bar{z} = a - bi$	$(a, -b)$
$z \cdot \bar{z}$	$a^2 + b^2$	$(a^2 + b^2,\ \bar{0})$
Inverses	$z^{-1} = \bar{z}/(a^2 + b^2)$	$(a, b)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \cdot (a, -b)$

Mit dieser Tabelle im Kopf errät man die Lösungen von (b) und (c) sofort. Beweisen muss man sie trotzdem, und zwar mit der Formel aus der Aufgabe, nicht mit $\mathbb{C}$.

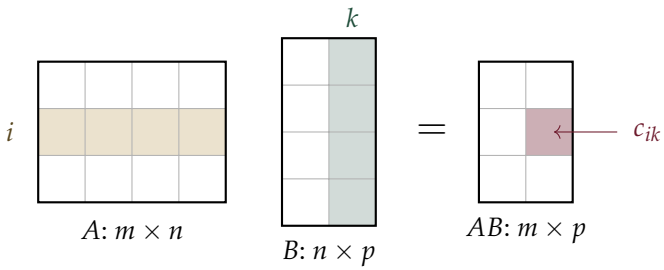
1.4 Matrizen und das Matrixprodukt

Matrixprodukt

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ und $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p,\mathbb{R}}$. Dann ist $AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times p,\mathbb{R}}$ definiert durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

In Worten: Der Eintrag an der Stelle (i, k) ist „Zeile i von A mal Spalte k von B“. Man legt die Zeile auf die Spalte, multipliziert paarweise und addiert alles.



Merke

Formatregel: $(m \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times p) = (m \times p)$.
Die inneren Zahlen müssen gleich sein, die äußeren bilden das Format des Ergebnisses. Wie bei Dominosteinen: Nur gleiche Seiten passen aneinander.

Ein Beispiel Schritt für Schritt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Für Informatiker: das Matrixprodukt als Code

```
def matmul(A, B):
   m, n, p = len(A), len(B), len(B[0])
   assert len(A[0]) == n
   C = [[0]*p for _ in range(m)]
   for i in range(m):
      for k in range(p):
         for j in range(n):
            C[i][k] += A[i][j] * B[j][k]
   return C
```

Die Zeile mit `assert` ist genau die Formatregel. Die innerste Schleife läuft über den gemeinsamen Index j. Deshalb muss die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B sein, sonst würde die Schleife über das Ende einer der beiden Matrizen hinauslaufen.

Achtung: nicht kommutativ

Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$. Oft existiert sogar nur eines der beiden Produkte. Beispiel aus Aufgabe 2: BA existiert (2×2 mal 2×4), AB nicht (2×4 mal 2×2 passt nicht, $4 \neq 2$).

1.5 Summenzeichen und Kronecker-Delta

Kronecker-Delta

Für ganze Zahlen i, j ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Das Delta ist ein „Schalter“: Es ist 1, wenn die beiden Indizes gleich sind, sonst 0. Im Code: `1 if i == j else 0`.

Die wichtigste Rechenregel ist der **Auswahleffekt**:

Auswahlregel

Für $k \in \{1, \dots, m\}$ und beliebige Zahlen $x_1, \dots, x_m$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^{m} \delta_{k\ell}\, x_\ell = x_k.$$

Warum? Ausgeschrieben steht da $\delta_{k1}x_1 + \delta_{k2}x_2 + \cdots + \delta_{km}x_m$. Alle Deltas sind 0, außer $\delta_{kk} = 1$. Es bleibt nur x_k übrig.

Beispiel mit $m = 4$, $k = 3$:

$$\sum_{\ell=1}^{4} \delta_{3\ell}\, x_\ell = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = x_3.$$

1.6 Basismatrizen

Basismatrix

Für $1 \le k \le m$ und $1 \le l \le n$ ist $B_{kl}^{(m\times n)} \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ die Matrix mit einer 1 an der Stelle (k, l) und Nullen überall sonst. Mit dem Kronecker-Delta: der Eintrag an der Stelle (i, j) ist

$$\left(B_{kl}^{(m\times n)}\right)_{ij} = \delta_{ki}\,\delta_{lj}.$$

Das Produkt $\delta_{ki}\delta_{lj}$ ist genau dann 1, wenn *beide* Faktoren 1 sind, also wenn $i = k$ *und* $j = l$. Beispiele:

$$B_{12}^{(2\times3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{22}^{(3\times3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{31}^{(3\times3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Typischer Fehler

$\left(B_{kl}\right)_{ij} = \delta_{ij}$ ist falsch, denn das wären die Einträge der *Einheitsmatrix*. Die Indizes k, l sagen, *wo* die 1 steht. Die Indizes i, j sagen, *welchen* Eintrag man gerade anschaut.

2 Aufgabe 1: Ein Körper mit 9 Elementen

Aufgabenstellung

Wir betrachten $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ mit

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d) \qquad \text{und} \qquad (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{F}_3$. Bekannt: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralelement $(\bar{0}, \bar{0})$, und $(R, \cdot)$ ist eine abelsche Halbgruppe.

(a) Überprüft das Distributivgesetz.

(b) Zeigt, dass $(R, \cdot)$ ein Neutralelement besitzt. (Daraus folgt: R ist ein Ring.)

(c) Berechnet $(a,b) \cdot (a,-b)$ und zeigt damit, dass R ein Körper mit 9 Elementen ist.

Zuerst ein Gefühl für R: Es hat $3 \cdot 3 = 9$ Elemente,

$$R = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})\}.$$

Die Addition ist komponentenweise, die Multiplikation *nicht*. Ein Beispiel zum Warmwerden:

$$(\bar{1},\bar{1}) \cdot (\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1}\cdot\bar{1} - \bar{1}\cdot\bar{1},\ \bar{1}\cdot\bar{1} + \bar{1}\cdot\bar{1}) = (\bar{0},\bar{2}).$$

Komponentenweise hätte man $(\bar{1},\bar{1})$ erwartet. Das ist der Grund, warum man bei dieser Aufgabe genau hinschauen muss.

2.1 Teil (a): Distributivgesetz

Idee

Wir müssen zeigen: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ für *alle* $x, y, z \in R$. Dazu schreiben wir allgemein $x = (a,b)$, $y = (c,d)$, $z = (f,g)$, rechnen beide Seiten mit den Definitionen aus und vergleichen. Benutzen dürfen wir dabei alle Rechenregeln in $\mathbb{F}_3$, denn $\mathbb{F}_3$ ist ein Körper.

Lösung

Seien $(a,b), (c,d), (f,g) \in R$. **Linke Seite:** Zuerst die Summe, dann das Produkt.

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot \big((c,d) + (f,g)\big) &= (a,b) \cdot (c+f,\ d+g) \\ &= \big(a(c+f) - b(d+g),\ a(d+g) + b(c+f)\big) \\ &= (ac + af - bd - bg,\ ad + ag + bc + bf).\end{aligned}$$

Rechte Seite: Zuerst die beiden Produkte, dann die Summe.

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (f,g) &= (ac - bd,\ ad + bc) + (af - bg,\ ag + bf) \\ &= (ac - bd + af - bg,\ ad + bc + ag + bf) \\ &= (ac + af - bd - bg,\ ad + ag + bc + bf).\end{aligned}$$

Beide Seiten sind gleich. Damit gilt $x(y+z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in R$.
Das Distributivgesetz von der anderen Seite folgt, weil $(R, \cdot)$ kommutativ ist:

$$(y+z) \cdot x = x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z = y \cdot x + z \cdot x. \qquad \square$$

Welche Regeln haben wir benutzt? Im zweiten Schritt der linken Seite das Distributivgesetz in $\mathbb{F}_3$ ($a(c+f) = ac + af$), außerdem $-(d+g)\cdot b = -bd - bg$. Auf der rechten Seite nur Assoziativität und Kommutativität der Addition in $\mathbb{F}_3$, um die Summanden umzusortieren.

Typischer Fehler

„Ich habe $(\bar{1},\bar{1})\cdot\big((\bar{1},\bar{0})+(\bar{2},\bar{1})\big)$ ausgerechnet und es kam auf beiden Seiten dasselbe heraus, also gilt das Distributivgesetz."
Das ist ein Beispiel, kein Beweis. Es gibt $9^3 = 729$ Tripel. Ein Gesetz „für alle" zeigt man allgemein, mit Variablen. Nur zum *Widerlegen* reicht ein einziges Beispiel.

2.2 Teil (b): Das Einselement

Idee

Welches Element könnte die Eins sein? Das Vorbild $\mathbb{C}$ sagt: $1 = 1 + 0\,i$, also $(\bar{1},\bar{0})$. Wir prüfen, ob $(a,b)\cdot(\bar{1},\bar{0}) = (a,b)$ für alle (a,b) gilt.

Lösung

Wir zeigen, dass $1_R := (\bar{1},\bar{0})$ ein Neutralelement von $(R,\cdot)$ ist. Für jedes $(a,b)\in R$ gilt

$$(a,b)\cdot(\bar{1},\bar{0}) = (a\cdot\bar{1} - b\cdot\bar{0},\ a\cdot\bar{0} + b\cdot\bar{1}) = (a-\bar{0},\ \bar{0}+b) = (a,b).$$

Da $(R,\cdot)$ kommutativ ist, gilt auch $(\bar{1},\bar{0})\cdot(a,b) = (a,b)$. (Man kann es natürlich auch direkt nachrechnen: $(\bar{1}\cdot a - \bar{0}\cdot b,\ \bar{1}\cdot b + \bar{0}\cdot a) = (a,b)$.)
Also ist $(R,\cdot)$ ein kommutatives Monoid. Zusammen mit (a) und der Voraussetzung über $(R,+)$ ist $(R,+,\cdot)$ ein **kommutativer Ring mit Eins**. □

Typischer Fehler

„Die Eins ist $(\bar{1},\bar{1})$, weil das komponentenweise die Eins ist."
Das stimmt nur bei komponentenweiser Multiplikation. Hier: $(\bar{1},\bar{1})\cdot(\bar{1},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{2}) \neq (\bar{1},\bar{1})$. Also ist $(\bar{1},\bar{1})$ nicht neutral.

Merke

Um zu zeigen, dass ein Element neutral ist, reicht es, den Kandidaten zu nennen und die Gleichung für *alle* Elemente nachzurechnen. Wie man auf den Kandidaten kommt, muss nicht in den Beweis.

2.3 Teil (c): Inverse, also ist R ein Körper

Idee

In $\mathbb{C}$ bekommt man das Inverse von $z = a + bi$ so: Man multipliziert mit dem Konjugierten $a - bi$ und erhält die reelle Zahl $a^2 + b^2$. Durch diese teilt man dann. Genau so gehen wir hier vor, in vier Schritten:

1. $(a,b)\cdot(a,-b)$ ausrechnen.
2. Klären, wann $a^2 + b^2 = \bar{0}$ ist. (Durch $\bar{0}$ kann man nicht teilen.)

3. Für $(a,b) \neq (\bar{0},\bar{0})$ das Inverse angeben und nachrechnen.
4. Begründen, warum 0_R kein Inverses hat, und zusammenfassen.

Lösung, Schritt 1: das Produkt

Für $a, b \in \mathbb{F}_3$ gilt

$$(a,b)\cdot(a,-b) = \big(a\cdot a - b\cdot(-b),\ a\cdot(-b)+b\cdot a\big) = (a^2+b^2,\ -ab+ab) = (a^2+b^2,\ \bar{0}).$$

Die zweite Komponente verschwindet, das ist der ganze Trick. Das Produkt landet in der „reellen Achse“ $\{(c,\bar{0}) : c \in \mathbb{F}_3\}$, und dort ist das Rechnen einfach.

Lösung, Schritt 2: Wann ist $a^2+b^2=\bar{0}$?

In $\mathbb{F}_3$ gilt $\bar{0}^2 = \bar{0}$, $\bar{1}^2 = \bar{1}$ und $\bar{2}^2 = \bar{4} = \bar{1}$. Für alle $a, b \in \mathbb{F}_3$ ist also $a^2, b^2 \in \{\bar{0},\bar{1}\}$. Damit gibt es nur vier Möglichkeiten:

a^2	b^2	a^2+b^2
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Es ist also $a^2+b^2=\bar{0}$ genau dann, wenn $a^2=b^2=\bar{0}$, und das gilt nur für $a=b=\bar{0}$.
Für $(a,b)\neq(\bar{0},\bar{0})$ ist $c := a^2+b^2 \in \{\bar{1},\bar{2}\}$, also $c \neq \bar{0}$, und c hat in $\mathbb{F}_3$ ein Inverses c^{-1}.

Lösung, Schritt 3: das Inverse

Sei $(a,b) \in R$ mit $(a,b)\neq(\bar{0},\bar{0})$ und $c = a^2+b^2$. Wir behaupten: $(c^{-1}a,\ -c^{-1}b)$ ist invers zu (a,b). Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(c^{-1}a,\ -c^{-1}b) &= \big(a\cdot c^{-1}a - b\cdot(-c^{-1}b),\ a\cdot(-c^{-1}b)+b\cdot c^{-1}a\big)\\ &= \big(c^{-1}(a^2+b^2),\ -c^{-1}ab + c^{-1}ab\big)\\ &= (c^{-1}c,\ \bar{0}) = (\bar{1},\bar{0}) = 1_R.\end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität gilt auch $(c^{-1}a, -c^{-1}b)\cdot(a,b) = 1_R$. Also ist (a,b) invertierbar mit

$$(a,b)^{-1} = \big(c^{-1}a,\ -c^{-1}b\big) \qquad \text{wobei } c = a^2+b^2.$$

Lösung, Schritt 4: Abschluss

Das Nullelement $0_R = (\bar{0},\bar{0})$ ist nicht invertierbar, denn für alle $(a,b) \in R$ gilt

$$(a,b)\cdot(\bar{0},\bar{0}) = (a\cdot\bar{0} - b\cdot\bar{0},\ a\cdot\bar{0}+b\cdot\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0}) \neq (\bar{1},\bar{0}) = 1_R.$$

Zusammen mit Schritt 3: $R^\times = R \setminus \{0_R\}$. Außerdem ist $1_R = (\bar{1},\bar{0}) \neq (\bar{0},\bar{0}) = 0_R$. Mit (a) und (b) folgt: $(R,+,\cdot)$ ist ein **Körper mit 9 Elementen**. □

Ein Inverses konkret ausrechnen

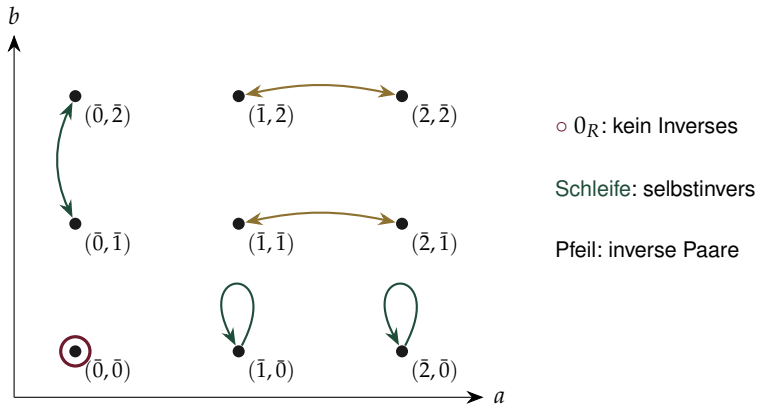
Nehmen wir $x = (\bar{1}, \bar{2})$. Dann $c = \bar{1}^2 + \bar{2}^2 = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$, und $c^{-1} = \bar{2}$. Also

$$x^{-1} = (\bar{2} \cdot \bar{1},\ -\bar{2} \cdot \bar{2}) = (\bar{2},\ -\bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2}).$$

Probe: $(\bar{1}, \bar{2}) \cdot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{1} \cdot \bar{2} - \bar{2} \cdot \bar{2},\ \bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{2}) = (\bar{2} - \bar{1},\ \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})$. Passt.

Alle Inversen auf einen Blick

x	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{2})$
a^2+b^2	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
x^{-1}	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$



Von den neun Elementen hat nur eines keinen Partner, nämlich die Null. Genau das bedeutet „Körper“.

Typischer Fehler

„$a^2 + b^2 = 0$ gilt doch nur für $a = b = 0$, das sieht man sofort.“
In $\mathbb{R}$ stimmt das, weil Quadrate nie negativ sind. In $\mathbb{F}_3$ gibt es aber kein „positiv“ oder „negativ“, man kann Elemente nicht der Größe nach vergleichen. Das Argument muss über die Liste der Quadrate laufen (Schritt 2). In anderen Körpern $\mathbb{F}_p$ geht es tatsächlich schief, dort kann $a^2 + b^2 = 0$ auch für $(a, b) \neq (0, 0)$ passieren. Probiert es mit $\mathbb{F}_2$ im Selbsttest aus.

Typischer Fehler

Den Schritt „0_R ist nicht invertierbar“ weglassen. Für $R^\times = R \setminus \{0_R\}$ braucht man formal beide Richtungen: alles außer 0_R ist invertierbar *und* 0_R nicht. Für die Körpereigenschaft selbst reicht zwar „jedes $x \neq 0$ ist invertierbar“ plus $1_R \neq 0_R$, aber es schadet nicht, den Satz hinzuschreiben.

3 Aufgabe 2: Welche Matrixprodukte gibt es?

Aufgabenstellung

Berechnet sämtliche Produkte, die mit den folgenden Matrizen gebildet werden können:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 27 & 55 & 2 \\ 1 & 89 & -6 & 0 & 3 \\ -48 & 10 & 7 & 19 & -4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Idee

Bevor man irgendetwas rechnet, klärt man, *welche* Produkte überhaupt existieren. Dafür braucht man nur die Formate. XY existiert genau dann, wenn X so viele Spalten hat wie Y Zeilen. Es gibt $5 \cdot 5 = 25$ Paare (X, Y), auch $X = Y$ ist erlaubt. Die gehen wir systematisch durch.

3.1 Schritt 1: Formate

Matrix	A	B	C	D	E
Format	2×4	2×2	4×1	3×5	1×2
Zeilen	2	2	4	3	1
Spalten	4	2	1	5	2

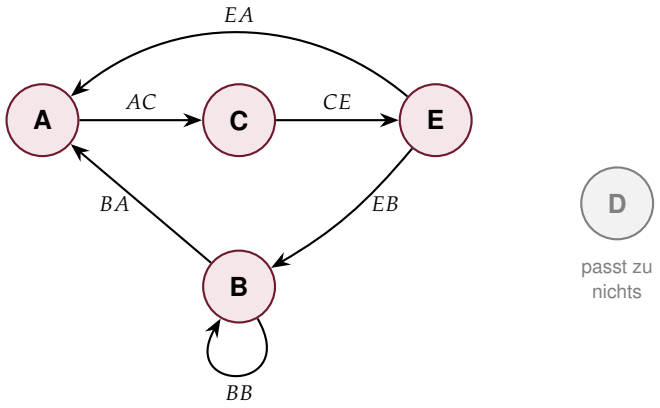
3.2 Schritt 2: Welche Paare passen?

Für jede Matrix X links fragen wir: Welche Matrizen Y haben so viele Zeilen, wie X Spalten hat?

- A hat 4 Spalten. Vier Zeilen hat nur C. $\Rightarrow$ AC.
- B hat 2 Spalten. Zwei Zeilen haben A und B. $\Rightarrow$ BA, BB.
- C hat 1 Spalte. Eine Zeile hat nur E. $\Rightarrow$ CE.
- D hat 5 Spalten. Keine Matrix hat 5 Zeilen. $\Rightarrow$ nichts.
- E hat 2 Spalten. Zwei Zeilen haben A und B. $\Rightarrow$ EA, EB.

$X \backslash Y$	A (2 Z.)	B (2 Z.)	C (4 Z.)	D (3 Z.)	E (1 Z.)
A (4 Sp.)	–	–	2×1	–	–
B (2 Sp.)	2×4	2×2	–	–	–
C (1 Sp.)	–	–	–	–	4×2
D (5 Sp.)	–	–	–	–	–
E (2 Sp.)	1×4	1×2	–	–	–

Als Graph: Ein Pfeil von X nach Y heißt „XY existiert“.



Es gibt genau **sechs** Produkte: AC, BA, BB, CE, EA, EB.

3.3 Schritt 3: Rechnen

AC**:** $(2\times 4)\cdot(4\times 1) = 2\times 1$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2+5\cdot(-3)+0\cdot(-5)+5\cdot 8 \\ 2\cdot 2+0\cdot(-3)+1\cdot(-5)+7\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+40 \\ 4-5+56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \end{pmatrix}.$$

BA**:** $(2\times 2)\cdot(2\times 4) = 2\times 4$

Jeder Eintrag ist „Zeile von B mal Spalte von A“. Erste Zeile von B ist $(4,\ 3)$:

$$(BA)_{11} = 4\cdot 0+3\cdot 2 = 6, \quad (BA)_{12} = 4\cdot 5+3\cdot 0 = 20,$$
$$(BA)_{13} = 4\cdot 0+3\cdot 1 = 3, \quad (BA)_{14} = 4\cdot 5+3\cdot 7 = 41.$$

Zweite Zeile von B ist $(-4,\ 3)$:

$$(BA)_{21} = -4\cdot 0+3\cdot 2 = 6, \quad (BA)_{22} = -4\cdot 5+3\cdot 0 = -20,$$
$$(BA)_{23} = -4\cdot 0+3\cdot 1 = 3, \quad (BA)_{24} = -4\cdot 5+3\cdot 7 = 1.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 3 & 41 \\ 6 & -20 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

BB**:** $(2\times 2)\cdot(2\times 2) = 2\times 2$

$$BB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12 & 12+9 \\ -16-12 & -12+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ -28 & -3 \end{pmatrix}.$$

EA **und** EB**: Zeile mal Matrix**

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 21 \end{pmatrix}, \qquad EB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Hier lohnt sich ein zweiter Blick: $E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$ nimmt 0-mal die erste Zeile und 3-mal die zweite Zeile. Also ist EA einfach „3· zweite Zeile von A“, und EB ist „3· zweite Zeile von B“. Das ist die Idee, die in Aufgabe 3 wieder auftaucht.

Merke

Eine Zeile $(x_1, \ldots, x_m)$ von links an eine Matrix multipliziert ergibt die Kombination $x_1 \cdot (\text{Zeile } 1) + \cdots + x_m \cdot (\text{Zeile } m)$. Analog ergibt eine Spalte von rechts eine Kombination der Spalten.

CE: $(4 \times 1) \cdot (1 \times 2) = 4 \times 2$

$$CE = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \\ -5 \cdot 0 & -5 \cdot 3 \\ 8 \cdot 0 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -9 \\ 0 & -15 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Bei „Spalte mal Zeile“ wird jeder Eintrag der Spalte mit jedem Eintrag der Zeile multipliziert. Jede Summe hat nur einen Summanden, weil der gemeinsame Index nur den Wert 1 annimmt.

3.4 Was es nicht gibt, und warum

Produkt	Formate	Problem
AB	$(2 \times \mathbf{4})(\mathbf{2} \times 2)$	$4 \neq 2$
AA	$(2 \times \mathbf{4})(\mathbf{2} \times 4)$	$4 \neq 2$
CC	$(4 \times \mathbf{1})(\mathbf{4} \times 1)$	$1 \neq 4$
EE	$(1 \times \mathbf{2})(\mathbf{1} \times 2)$	$2 \neq 1$
$D \cdot$ irgendwas	$(3 \times \mathbf{5})(\ldots)$	keine Matrix hat 5 Zeilen
irgendwas $\cdot D$	$(\ldots)(\mathbf{3} \times 5)$	keine Matrix hat 3 Spalten
EC	$(1 \times \mathbf{2})(\mathbf{4} \times 1)$	$2 \neq 4$

Typischer Fehler

„BA existiert, also existiert auch AB.“ Nein. Bei nicht-quadratischen Matrizen hängt schon die Existenz von der Reihenfolge ab. Und selbst bei quadratischen Matrizen ist meistens $AB \neq BA$ (siehe Selbsttest).

Typischer Fehler

„CE ist eine Zahl.“ Nein, „Spalte mal Zeile“ ergibt eine große Matrix (4×2). Eine Zahl (1×1) bekommt man bei „Zeile mal Spalte“.

4 Aufgabe 3: Basismatrizen als Zeilenfilter

Aufgabenstellung

Sei $A \in \mathcal{M}_{3\times 4,\mathbb{R}}$.

(a) Sei $i \in \{1,2,3\}$. Welches Ergebnis erhält man, wenn man A von links mit der Basismatrix $B_{ii}^{(3\times 3)}$ multipliziert?

(b) Formuliert eine entsprechende Aussage für beliebige reelle $m \times n$-Matrizen und beweist sie durch eine Rechnung.

4.1 Teil (a)

Idee

Einfach ausrechnen, für alle drei Werte von i. Formatcheck: $(3 \times \mathbf{3}) \cdot (\mathbf{3} \times 4) = 3 \times 4$, passt. Dann schauen wir auf das Muster.

Lösung

Sei $A = (a_{ij})$. Für $i = 1$:

$$B_{11}^{(3\times 3)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Warum? Die zweite und dritte Zeile von B_{11} sind Nullzeilen, „Nullzeile mal jede Spalte“ gibt 0. Die erste Zeile $(1,0,0)$ mal Spalte j von A ergibt $1 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + 0 \cdot a_{3j} = a_{1j}$.
Genauso für $i = 2$ und $i = 3$:

$$B_{22}^{(3\times 3)} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{33}^{(3\times 3)} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Antwort: $B_{ii}^{(3\times 3)} A$ ist die Matrix, die in Zeile i die i-te Zeile von A enthält und sonst nur Nullen.



$B_{22}^{(3\times 3)}$ $\cdot$ A $=$ nur Zeile 2 bleibt

Für Informatiker: Das ist eine *Maske*. In SQL entspräche es `SELECT * WHERE zeile = i`, nur dass die übrigen Zeilen nicht verschwinden, sondern auf 0 gesetzt werden.

4.2 Teil (b): Die allgemeine Aussage

Idee

Erst überlegen, welche Basismatrix überhaupt passt. A ist jetzt $m \times n$. Von links muss eine Matrix mit m Spalten kommen. Damit das Ergebnis wieder $m \times n$ ist, nehmen wir eine $m \times m$-Matrix. Also $B_{kk}^{(m\times m)}$ mit $k \in \{1, \dots, m\}$. Dann formulieren wir die Beobachtung aus (a) und beweisen sie mit der Formel für das Matrixprodukt und der Auswahlregel für das Delta.

Aussage

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Sei $C = (c_{ij}) := B_{kk}^{(m\times m)} \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$. Dann gilt für alle $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{kj} & \text{falls } i = k, \\ 0 & \text{falls } i \neq k. \end{cases}$$

In Worten: Die k-te Zeile von C ist die k-te Zeile von A, alle anderen Zeilen von C sind Nullzeilen.

Beweis

Wir schreiben $B := B_{kk}^{(m\times m)} = (b_{i\ell})$. Nach Definition der Basismatrix ist $b_{i\ell} = \delta_{ki}\,\delta_{k\ell}$. Nach Definition des Matrixprodukts ist

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} b_{i\ell}\, a_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{m} \delta_{ki}\,\delta_{k\ell}\, a_{\ell j} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Der Faktor δ_{ki} hängt nicht von ℓ ab, wir ziehen ihn vor die Summe:

$$c_{ij} = \delta_{ki} \cdot \sum_{\ell=1}^{m} \delta_{k\ell}\, a_{\ell j}.$$

Nach der Auswahlregel ist $\sum_{\ell=1}^{m} \delta_{k\ell}\, a_{\ell j} = a_{kj}$. Also

$$c_{ij} = \delta_{ki}\, a_{kj}.$$

Fall $i = k$: $\delta_{kk} = 1$, also $c_{kj} = a_{kj}$ für alle j. Die k-te Zeile von C ist die k-te Zeile von A.
Fall $i \neq k$: $\delta_{ki} = 0$, also $c_{ij} = 0$ für alle j. Die i-te Zeile von C ist eine Nullzeile. □

Wer es lieber in einer Zeile mag, ohne den Faktor vorzuziehen, rechnet die beiden Fälle getrennt:

$$c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\delta_{kk}}_{=1}\, \delta_{k\ell}\, a_{\ell j} = a_{kj}, \qquad c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\delta_{ki}}_{=0}\, \delta_{k\ell}\, a_{\ell j} = 0 \quad (i \neq k).$$

Beide Wege sind gleich gut.

Typischer Fehler

Indexsalat. k ist in dieser Aufgabe *fest* vergeben (welche Zeile wir herausfiltern). Wer im Matrixprodukt $c_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}$ schreibt, benutzt denselben Buchstaben für zwei verschiedene

Dinge, und dann geht alles durcheinander. Nehmt für den Summationsindex einen neuen Buchstaben, z. B. ℓ.

Typischer Fehler

Falsches Format. $B_{kk}^{(m\times n)}$ von links an $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ passt nur, wenn $n = m$. Die Basismatrix muss $m \times m$ sein.

Typischer Fehler

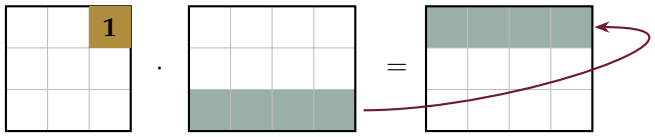
Nur ein Beispiel. Teil (b) verlangt einen Beweis für alle m, n. Eine Rechnung mit $m = 3$, $n = 4$ ist Teil (a), nicht (b). Für den allgemeinen Fall braucht man die Summenformel.

4.3 Zum Weiterdenken

Was passiert, wenn man eine Basismatrix B_{kl} mit $k \neq l$ nimmt? Mit derselben Rechnung:

$$\left(B_{kl}^{(m\times m)} A\right)_{ij} = \sum_{\ell'=1}^{m} \delta_{ki}\, \delta_{l\ell'}\, a_{\ell' j} = \delta_{ki}\, a_{lj}.$$

Die l-te Zeile von A wird also in die k-te Zeile *verschoben*, alles andere wird null. Basismatrizen sind damit kleine Bausteine, mit denen man Zeilen auswählen und umsortieren kann. Das braucht ihr später beim Gauß-Algorithmus.



$B_{13}^{(3\times 3)}$ A, Zeile 3 landet in Zeile 1

5 Überblick

Aufgabe	Ergebnis	Kernidee
1(a)	Distributivgesetz gilt	beide Seiten allgemein ausrechnen; Regeln von $\mathbb{F}_3$ benutzen
1(b)	$1_R = (\bar{1}, \bar{0})$	Vorbild $\mathbb{C}$: $1 = 1 + 0i$
1(c)	$(a,b)^{-1} = (a^2+b^2)^{-1}(a,-b)$, R ist Körper	mit dem „Konjugierten“ multiplizieren; in $\mathbb{F}_3$ ist $a^2+b^2 = 0$ nur für $a = b = 0$
2	AC, BA, BB, CE, EA, EB	zuerst Formate prüfen: innen gleich, außen bleibt
3(a)	$B_{ii}A$: nur Zeile i bleibt	Nullzeilen in B_{ii} erzeugen Nullzeilen
3(b)	$(B_{kk}A)_{ij} = \delta_{ki}a_{kj}$	Matrixprodukt als Summe, Auswahlregel des Deltas

6 Selbsttest

Versucht die Fragen zuerst ohne Nachschauen. Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

1. Berechnet in $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ das Produkt $(\bar{1}, \bar{2}) \cdot (\bar{2}, \bar{2})$. Was folgt daraus?
2. Bestimmt das Inverse von $(\bar{0}, \bar{1})$ mit der Formel aus Aufgabe 1(c).
3. Ist $(\bar{2}, \bar{0})$ zu sich selbst invers?
4. Seien $X \in \mathcal{M}_{3\times 2,\mathbb{R}}$ und $Y \in \mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}}$. Welche Formate haben XY und YX?
5. Berechnet für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Produkte PQ und QP. Was fällt auf?
6. Was ergibt $\sum_{\ell=1}^{5} \delta_{3\ell}\, \ell^2$?
7. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Berechnet $A \cdot B_{22}^{(3\times 3)}$. Was macht eine Basismatrix B_{kk} von *rechts*?
8. Wir nehmen dieselben Formeln wie in Aufgabe 1, aber mit $\mathbb{F}_2$ statt $\mathbb{F}_3$. Zeigt, dass $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ dann *kein* Körper ist.

Lösungen zum Selbsttest

1. Mit $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$, $c = \bar{2}$, $d = \bar{2}$: erste Komponente $ac - bd = \bar{2} - \bar{4} = \bar{2} - \bar{1} = \bar{1}$, zweite Komponente $ad + bc = \bar{2} + \bar{4} = \bar{2} + \bar{1} = \bar{0}$. Also $(\bar{1}, \bar{2}) \cdot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{0}) = 1_R$. Die beiden Elemente sind zueinander invers, wie in der Tabelle.

Achtet beim Rechnen darauf, welcher Buchstabe zu welcher Komponente gehört: In $ad + bc$ wird die erste Komponente des einen Faktors mit der *zweiten* des anderen multipliziert. Das verwechselt man leicht.

2. $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, $c = \bar{0}^2 + \bar{1}^2 = \bar{1}$, $c^{-1} = \bar{1}$. Also $(\bar{0}, \bar{1})^{-1} = (\bar{0}, -\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{2})$. Probe: $(\bar{0}, \bar{1})(\bar{0}, \bar{2}) = (\bar{0} - \bar{2},\ \bar{0} + \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{0})$, denn $-\bar{2} = \bar{1}$.

3. Ja: $(\bar{2}, \bar{0}) \cdot (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{4} - \bar{0},\ \bar{0} + \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{0})$.

4. XY: $(3 \times 2)(2 \times 3) = 3 \times 3$. YX: $(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2$. Beide existieren, haben aber verschiedene Formate.

5. $PQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $QP = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Also $PQ \neq QP$. Außerdem: Q von rechts vertauscht die Spalten von P, Q von links vertauscht die Zeilen.

6. Nur $\ell = 3$ trägt bei: $\delta_{33} \cdot 3^2 = 9$.

7. $A \cdot B_{22}^{(3\times 3)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Von rechts filtert B_{kk} die *Spalten*: Spalte k bleibt, alle anderen werden null. Beweis wie in 3(b): $(AB_{kk})_{ij} = \sum_\ell a_{i\ell}\, \delta_{k\ell}\, \delta_{kj} = a_{ik}\, \delta_{kj}$.

8. In $\mathbb{F}_2$ ist $-\bar{1} = \bar{1}$. Dann $(\bar{1}, \bar{1}) \cdot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1} - \bar{1},\ \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$. Wäre $(\bar{1}, \bar{1})$ invertierbar mit Inversem y, so wäre $(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}) \cdot \big((\bar{1}, \bar{1}) \cdot y\big) = \big((\bar{1}, \bar{1}) \cdot (\bar{1}, \bar{1})\big) \cdot y = (\bar{0}, \bar{0}) \cdot y = (\bar{0}, \bar{0})$, Widerspruch. Also ist $(\bar{1}, \bar{1}) \neq 0$ nicht invertierbar und $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ kein Körper. Der Grund: $\bar{1}^2 + \bar{1}^2 = \bar{0}$ in $\mathbb{F}_2$. Genau der Schritt 2 aus Aufgabe 1(c) geht hier schief.

Bei Fragen sprecht mich im Tutorium an. – Mirkan

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Linearer Algebra I gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen
- **Beweis-Werkstatt** – Beweise Schritt für Schritt zusammensetzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /lineare-algebra-1