$$\sum_{n=1} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n=1} A_n\right)$$

$$\leq p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega \setminus A_n\right)$$

$$= p(\Omega)$$

$$< \infty$$

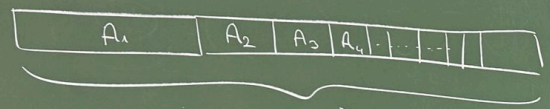
N

Erste Aussage widerlegt: Die Mengen $A_n = \{n\}$ sind paar... disjunkt, aber $S(A_n) = 1 \Rightarrow S(A_n) \not\to 0$

Zweite Aussage widerlegt: $B_n = \{n, n+1, \dots\}$ Dann gilt auch $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Also $B_n \searrow B = \emptyset$

③

a)



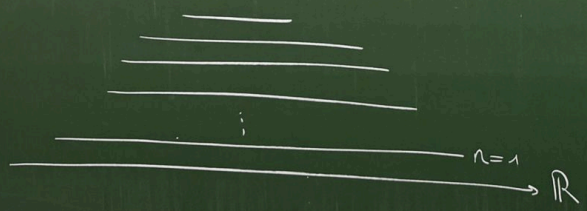
b)



$S(B_n) \to \infty$

$\bigcap B_n = \emptyset$

c)



Mögliche Beweiswege

a) → disjunkt + σ-additivität

→ Schubfachargument (Widerspruchsbeweis)

$P(A_n) \not\to 0$

→ Restmengen und Stetigkeit von oben

b) → S ist ein Maß, 3 Fälle, dann die Aussagen aus der Aufgabenstellung

→ Das Zählmaß als Summe von Dirac-Maßen

c) → Setze $I_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$

Monotonie dann Limes

Monotonie dann Limes

Beweis 3

a) f_n sind paarweise disjunkt und das Maß ist endlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\leq p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega \setminus A_n\right)$$

$$= p(\Omega)$$

$$< \infty$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} A_n \quad \rightarrow p(A_n) = S_N - S_{N-1}$$

$$\rightarrow s - s = 0$$

b) S ist ein Maß: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist eine σ-Algebra.

$$S(\emptyset) = \#\emptyset = 0$$

$\Rightarrow S$ ist ein Maß. Aus $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\}$ und $S(\{k\}) = 1$

$\Rightarrow \sigma$-endlich.

Erste Aussage widerlegt: Die Mengen $A_n = \{n\}$ sind paarweise disjunkt, aber $S(A_n) = 1 \Rightarrow S(A_n) \not\to 0$

Zweite Aussage widerlegt: $B_n = \{n, n+1, \dots\}$. Dann gilt auch $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Also $B_n \searrow B = \emptyset$ mit $S(B) = 0 < \infty$. Aber B_n unendlich mit $S(B_n) = \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} S(B_n) = \infty \neq 0 = S(B)$$

$\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ $\quad \mu(\{x\}) = 0$

$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{q_k}(A_j)$

$\Rightarrow q_k \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$

$\hookrightarrow \mu(\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{Q}) = 0$

$\mu(U) \geq \mu(\{q_n\}) = 2^{-k} > 0 \Rightarrow$ positives Maß

---

(2) $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{q_k}(A)$ mit $\delta_{q_k} = \begin{cases} 1, & q_k \in A \\ 0, & q_k \notin A \end{cases}$

Beweisideen

a) $\rightarrow$ Wohldefiniertheit, $\mu(\emptyset)$, $\mu(\mathbb{R})$, $\delta_{q_k}(A) = \dots$, $\mu(A) = \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$

$\hookrightarrow$ Dirac-Maß

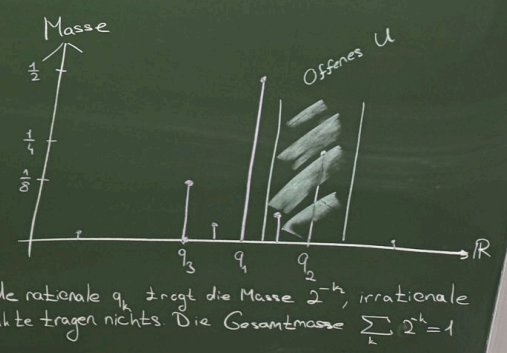
$\hookrightarrow$ Umordnungssatz

b) $\delta_{q_k}(\mathbb{Q}) = \dots$ und $\mu(\mathbb{Q}) = \dots$

c) Wähle $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \dots, \exists q_k \in U$, da $\dots$, $\mu(U) \geq \dots$

$\hookrightarrow$ Kontraposition: Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei $K(A) = \{k \in \mathbb{N} : q_k \in A\}$

Dann aus $\mu(A) = \sum_{k \in K(A)} 2^{-k} \Rightarrow \mu(A) = \dots$



Jede rationale q_k trägt die Masse 2^{-k}, irrationale Punkte tragen nichts. Die Gesamtmasse $\sum_k 2^{-k} = 1$

↳ Kontraposition: Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei $K(A) = \{k \in \mathbb{N} : q_k \in A\}$

Dann aus $\mu(A) = \sum_{k \in K(A)} 2^{-k} \Rightarrow \mu(A) = \dots$

Jede rationale q_k trägt die Masse 2^{-k}, irrationale Punkte tragen nichts. Die Gesamtmasse $\sum_k 2^{-k} =$

1

Setze $I_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$

$I_{n+1} \subseteq I_n$ und $\bigcap_n I_n = \{x\}$

$\mu(I_1) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1 < \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\left(x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \mu(\{x\}) = \begin{cases} 2^{-k}, & x = q_k \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2b

Jedes $q_k \in \mathbb{Q}$ ist $\delta_{q_k}(\mathbb{Q}) = 1$

$\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$

$\mu(\{x\}) =$

$\Rightarrow q_k \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$

$\hookrightarrow \mu(\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{Q}) = 0$

2a

Dirac-Maß ist ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Abzählbare Summen von Maßen sind wieder Maße.

Dann folgt

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{q_k}$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit

$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{q_k}(A_j)$$

$\mu(U) \geq \mu(\{q_n\}) = 2^{-k} > 0 \Rightarrow$ positives Maß

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3