↳ Leere Menge

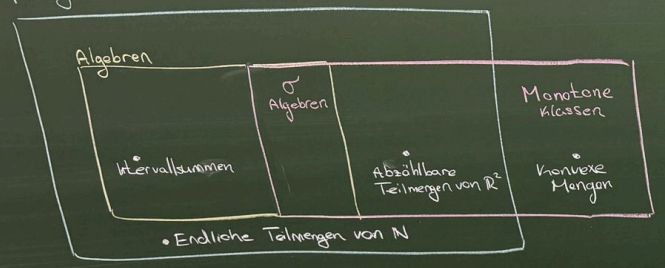
↳ Vereinigung

↳ Rechteck – Rechteck ⟶ $(A \times B) \setminus (C \times D) =$ ..... , dann $\subseteq$, $\supseteq$

↳ Summe – Rechteck ⟶ $X \setminus (C \times D) =$ ..... , dann $\in \mathcal{R}$, wobei $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_k \times B_k$

↳ Summe – Summe ⟶ $X \setminus Y =$ ..... , dann $\in \mathcal{R}$, wobei $Y = \tilde{\bigcup}_{j=1} C_j \times D_j$

Ringe



- σ-Algebra = Algebra + Monotone Klasse
- Algebra = Ring mit Ω
- σ-Algebra $\Rightarrow$ Monotone Klasse

  (Aufsteigende Vereinigungen sind abzählbare Vereinigungen)
- Satz 18.7: Eine Algebra ist genau dann eine σ-Algebra, wenn sie aufsteigende Vereinigungen enthält.

Mengenring: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$

Folgerung: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$

Algebren: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$

↳ σ-Algebra: Zusätzlich gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Monotone Klassen: $A_n \nearrow A$ heißt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

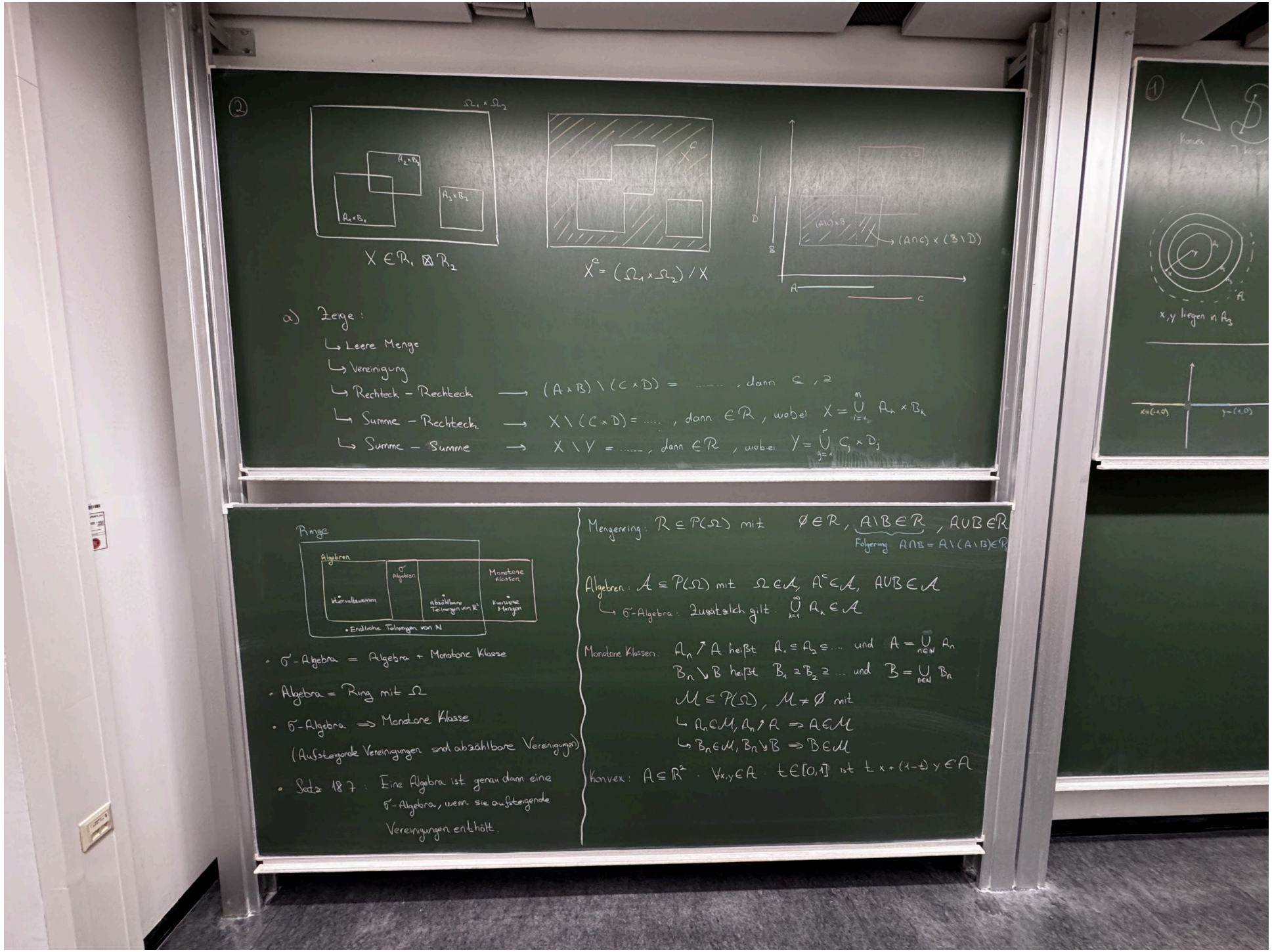
$B_n \searrow B$ heißt $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ mit

↳ $A_n \in \mathcal{M}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

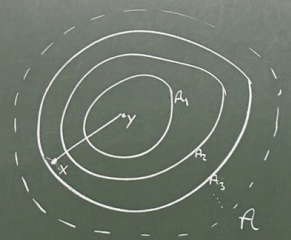
↳ $B_n \in \mathcal{M}, B_n \searrow B \Rightarrow B \in \mathcal{M}$

Konvex: $A \subseteq \mathbb{R}^2$: $\forall x, y \in A$: $t \in [0,1]$ ist $t x + (1-t) y \in A$

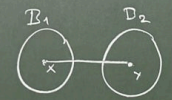


②
$\Omega_1 \times \Omega_2$
$A_2 \times B_2$
$A_3 \times B_3$
$A_1 \times B_1$
$X \in \mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$
X^c
$X^c = (\Omega_1 \times \Omega_2) / X$
$(A \setminus C) \times B$
$(A \cap C) \times (B \setminus D)$
a) Zeige:
↳ Leere Menge
↳ Vereinigung
↳ Rechteck – Rechteck ⟶ $(A \times B) \setminus (C \times D) = \ldots$, dann $\subseteq, \supseteq$
↳ Summe – Rechteck ⟶ $X \setminus (C \times D) = \ldots$, dann $\in \mathcal{R}$, wobei $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_k \times B_k$
↳ Summe – Summe ⟶ $X \setminus Y = \ldots$, dann $\in \mathcal{R}$, wobei $Y = \bigcup_{j=1}^{r} C_j \times D_j$
Ringe
Algebren
σ Algebren
Monotone Klassen
Intervallsummen
Abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}^2$
Konvexe Mengen
• Endliche Teilmengen von N
• σ-Algebra = Algebra + Monotone Klasse
• Algebra = Ring mit Ω
• σ-Algebra ⟹ Monotone Klasse
(Aufsteigende Vereinigungen sind abzählbare Vereinigungen)
• Satz 18.7: Eine Algebra ist genau dann eine σ-Algebra, wenn sie aufsteigende Vereinigungen enthält.
Mengenring: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$
Folgerung $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$
Algebren: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$
↳ σ-Algebra: Zusätzlich gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$
Monotone Klassen: $A_n \nearrow A$ heißt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
$B_n \searrow B$ heißt $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ mit
↳ $A_n \in \mathcal{M}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$
↳ $B_n \in \mathcal{M}, B_n \searrow B \Rightarrow B \in \mathcal{M}$
Konvex: $A \subseteq \mathbb{R}^2$: $\forall x, y \in A$ $t \in [0,1]$ ist $tx + (1-t)y \in A$
①
Konvex
x, y liegen in A_3

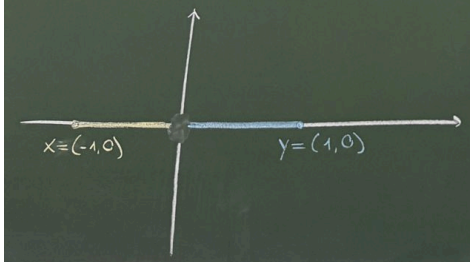
① Δ $\mathcal{D}$



x, y liegen in A_3



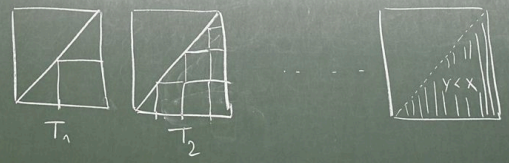
$B_1 \cup B_2$ nicht konvex



③ $T = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y < x\}$

$T_n = \bigcup_{0 \le i < j \le n} (I_{n,i} \times I_{n,j}) \in \mathcal{R}$

a)



→ Zuerst Monotonie

→ Dann $\bigcup T_n = T$

b) Widerspruchsbeweis mit $T \in \mathcal{R}$

$I_{n,i} \times I_{n,j}$ ist ein Rechteck

T_n ist eine endliche Vereinigung solcher Rechtecke.

c) Bestimme $A(T_n)$

$A(T_n)$ = Die Flächeninhalte T_n

= Die Anzahl der Quadrate · Fläch

$= \sum \dots \cdot \dots$

Insgesamt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = T$

T hat also unendlich vie

Widerspruch ↯ $\Rightarrow T \notin$?

c)



4^{-n}

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} i = \frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2}$$

$$Fl(T_n) = \frac{(2^n-1)\,2^n}{4^{-n}} = \frac{1}{2}\cdot(1-2^{-n}) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

"$\supseteq$" Sei $(x,y) \in T$ mit $y < x$.

Wir wählen ein n so, dass $2^{-n} < x - y$ $(*)$

und i, j mit $x \in I_{n,i}$ und $y \in I_{n,j}$

Wäre $i \leq j$, so müsste

$$x - y < \frac{i+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{i-j+1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Widerspruch zur Annahme $(*)$.

$\Rightarrow j < i$

$\Rightarrow (x,y) \in T_n$

Insgesamt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = T$

b)

Für $X = [0,1)^2$ und $x \in [0,1)$, sei $X_x = \{y : (x,y) \in X\}$

Für T ist $T_x = [0,x)$

Ang. $T \in \mathcal{R}$, also $T = \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times B_k)$ mit $A_k, B_k \in \mathcal{Q}$

Dann liegt (x,y) genau dann in T, wenn es ein k mit $x \in A_k$ und $y \in B_k$ gibt. Dann

$$T_k = \bigcup_{k\,:\, x \in A_k} B_k$$

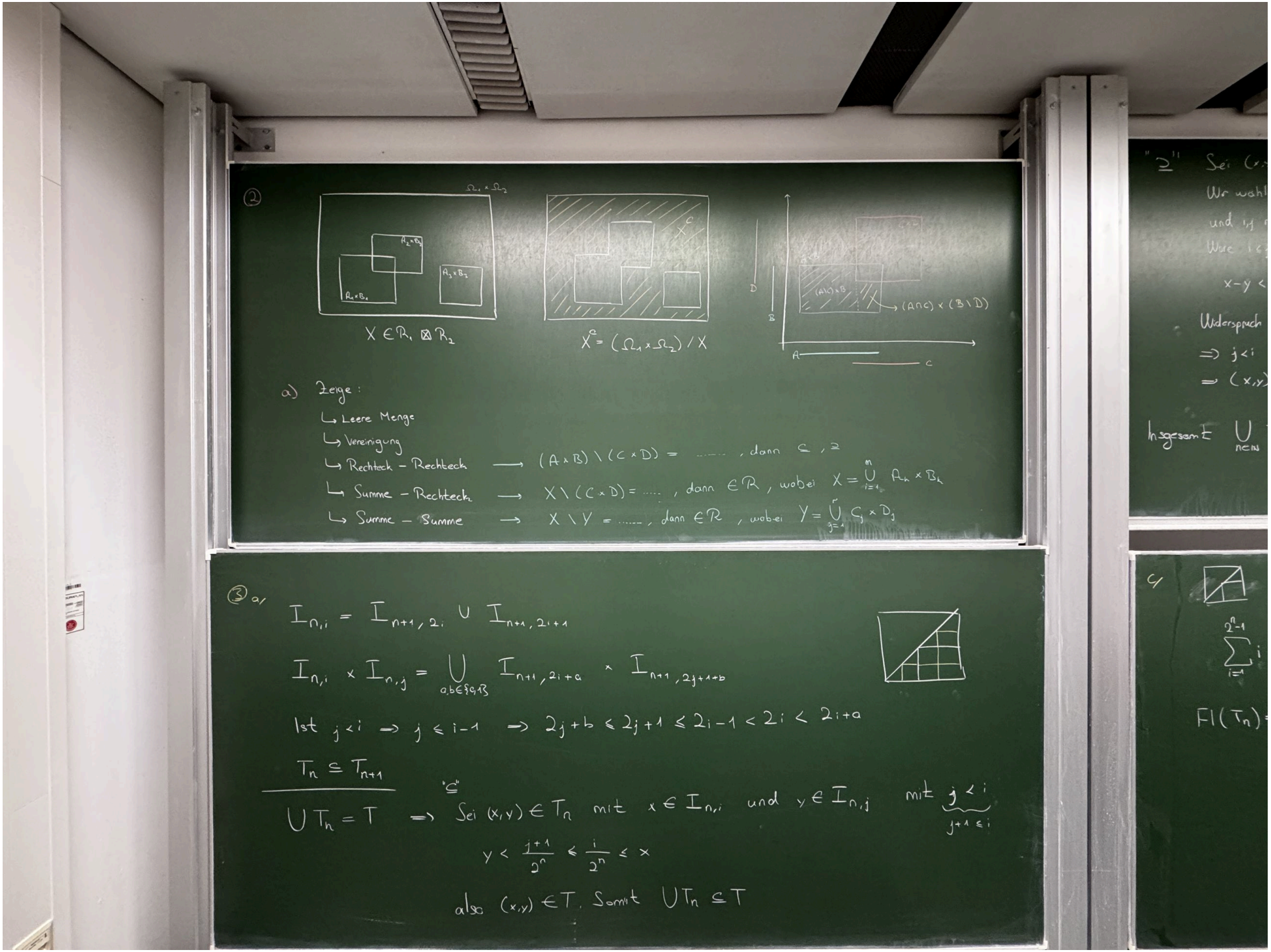
Andererseits ist $T_x = [0,x)$ und für $x_1 < x_2$ ist $[0,x_1) \neq [0,$

T hat also unendlich viele verschiedene Schnitte.

Widerspruch $\Rightarrow T \notin \mathcal{R}$

$(B_1, \ldots, B_m)$

$\leq 2^m$



②
$\Omega_1 \times \Omega_2$
$A_2 \times B_2$
$A_3 \times B_3$
$A_1 \times B_1$
$X \in \mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$
X^c
$X^c = (\Omega_1 \times \Omega_2) / X$
$(A \setminus C) \times B$
$(A \cap C) \times (B \setminus D)$
D
B
A
C
a) Zeige:
↳ Leere Menge
↳ Vereinigung
↳ Rechteck – Rechteck ⟶ $(A \times B) \setminus (C \times D) = \ldots\ldots$, dann $\subseteq$, $\supseteq$
↳ Summe – Rechteck ⟶ $X \setminus (C \times D) = \ldots\ldots$, dann $\in \mathcal{R}$, wobei $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_k \times B_k$
↳ Summe – Summe ⟶ $X \setminus Y = \ldots\ldots$, dann $\in \mathcal{R}$, wobei $Y = \bigcup_{j=1}^{r} C_j \times D_j$
③ a/
$I_{n,i} = I_{n+1,2i} \cup I_{n+1,2i+1}$
$I_{n,i} \times I_{n,j} = \bigcup_{a,b \in \{0,1\}} I_{n+1,2i+a} \times I_{n+1,2j+1+b}$
Ist $j < i \Rightarrow j \leq i-1 \Rightarrow 2j+b \leq 2j+1 \leq 2i-1 < 2i < 2i+a$
$T_n \subseteq T_{n+1}$
"$\subseteq$"
$\bigcup T_n = T \Rightarrow$ Sei $(x,y) \in T_n$ mit $x \in I_{n,i}$ und $y \in I_{n,j}$ mit $\underbrace{j < i}_{j+1 \leq i}$
$y < \frac{j+1}{2^n} \leq \frac{i}{2^n} \leq x$
also $(x,y) \in T$. Somit $\bigcup T_n \subseteq T$
"$\supseteq$" Sei
Wir wähl
und i,j
Wäre
$x - y <$
Widerspruch
$\Rightarrow j < i$
$\Rightarrow (x,y)$
Insgesamt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$
c/
$\sum_{i=1}^{2^n-1} i$
$Fl(T_n) =$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3