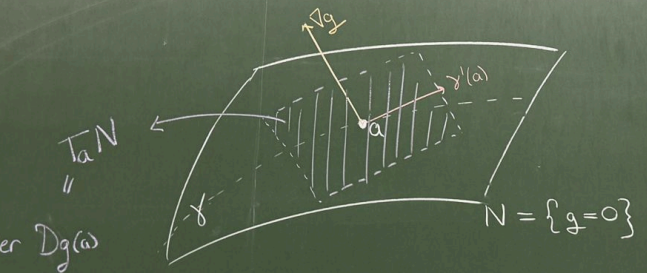
Wieso ist g senkrecht?

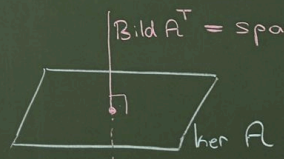
$$Dg \cdot v = v_1 + v_2 + v_3 = \langle \nabla g, v \rangle$$

$$v \perp \nabla g \iff \langle \nabla g, v \rangle = 0 \iff Dg \cdot v = 0 \iff v \in \ker Dg$$



Def. Tangentialraum

$$T_aN = \{ \gamma'(0) : \gamma \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \to N \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = a \}$$

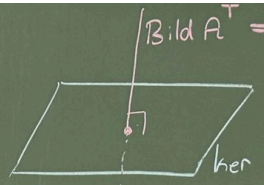


$$(T_aN)^{\perp} = \text{Bild } Dg(a)^T = \text{span}(\nabla g_1, \dots, \nabla g_n)$$

Lagrange: Hat $f|_N$ ein lokales Extremum bei a und ist Rang $Dg = n$ so gilt $\nabla f(a) \in \text{span}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_n(a))$

① Gesucht: $x+y+z = 60$ mit $x, y, z > 0$. Und xyz maximal

Lagrange: Hat $f|_N$ ein lokales Extremum bei a und ist $\operatorname{Rang} Dg = n$ so gilt $\nabla f(a) \in \operatorname{span}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_n(a))$



$(T_a N)^\perp = \text{Bild } Dg(a)^T = \operatorname{span}(\nabla g_1, \dots, \nabla g_n)$

(1) Gesucht: $x+y+z = 60$ mit $x, y, z > 0$ Und xyz maximal

Bezeichne $f(x,y,z) := xyz$ und $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 60 \wedge x,y,z > 0\}$

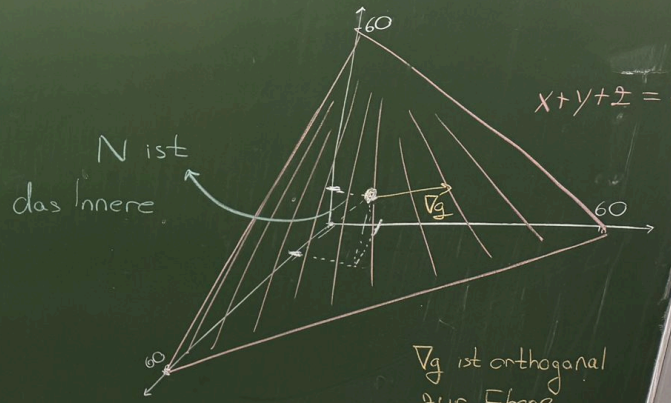
1. Methode: Auflösen & reduzieren auf 2 Variabeln

2 Methode: Lagrange

↳ Tipp: $f(x,y,z) = xyz$
$g(x,y,z) = x+y+z-60$
$U = (0,\infty)^3$

Voraussetzungen prüfen

Lagrange-Funktion aufstellen



① $\nabla g = (1,1,1) \neq 0$, $\mathcal{L}(x,y,z) = xyz + \lambda(x+y+z-60)$

$$\left.\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \quad yz = xy \Rightarrow z = x$$

$$zy + \lambda = 2z + \lambda$$

$$zy = z^2$$

$$y = z \Rightarrow x = y = z$$

$$x+y+z-60 = 0$$

$$3x = 60$$

$$x = 20 \Rightarrow y = z = 20$$

$$\Rightarrow \lambda = -400$$

$\overline{N} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 60,\ xyz \geq 0\}$

$\Rightarrow \overline{N}$ ist kompakt und f ist stetig

$\Rightarrow$ Auf $\overline{N}$ existiert ein Maximum

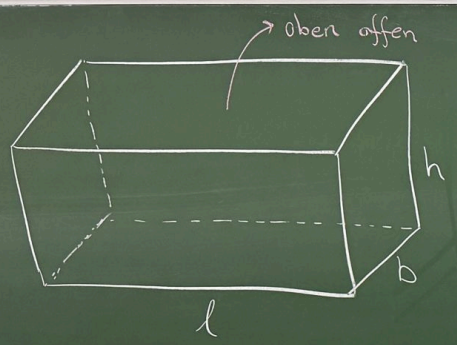
$\overline{N}/N$ ist $f = 0$, da $f > 0$ auf N

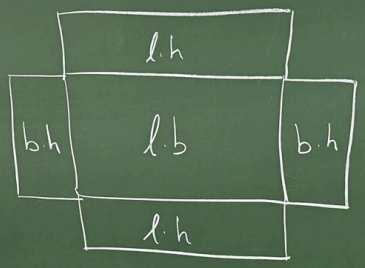
$\Rightarrow$ Es gibt ein Maximum auf N $\Rightarrow (x,y,z) = (20,20$

Auf $\bar{N}$ existiert ein Maximum

$\bar{N}/N$ ist $f=0$, da $f>0$ auf N

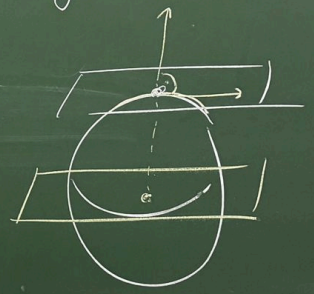
$\Rightarrow$ Es gibt ein Maximum auf N $\Rightarrow (x,y,z)=(2c$

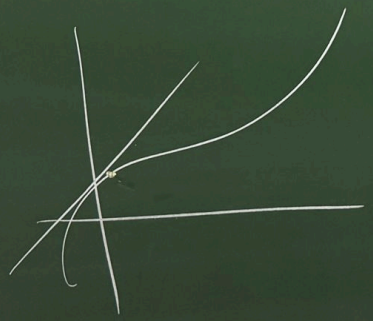


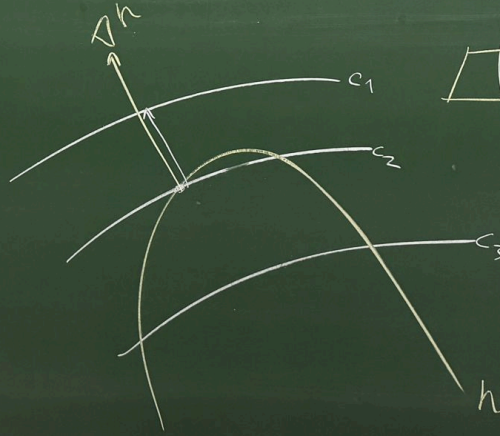


$\longrightarrow O(l,b,h) = lb + 2bh + 2lh$

$\longrightarrow g(l,b,h) = lbh - V_0 = 0$







V_0

$\sqrt[3]{\frac{32}{V_0}} = \lambda$

$3\sqrt[3]{(2V_0)}$

② $\nabla g = (bh, lh, lb) \neq 0$, da $l, b, h > 0$

$f = lb + 2bh + 2lh + \lambda \cdot (l \cdot b \cdot h - V_0)$

(1) $b + \lambda bh + 2h = 0$

(2) $l + \lambda lh + 2h = 0$

(3) $2l + \lambda lb + 2b = 0$

$l \cdot b \cdot h = V_0$

$\Rightarrow b \cdot (1 + \lambda h) = l \cdot (1 + \lambda h)$

$b = l$

$\rightarrow 2b + \lambda b^2 + 2b = 4b + \lambda b^2 \Rightarrow 4b = -\lambda b^2$

$4 = -\lambda b$

$-\frac{4}{\lambda} = b$

$4b + \lambda b^2 = b + \lambda bh + 2h$

$3b + \lambda b^2 = \lambda bh + 2h$

$-\frac{4}{\lambda} + \lambda \cdot \left(-\frac{4}{\lambda}\right) h + 2h = 0$

$-\frac{4}{\lambda} - 4h + 2h = 0$

$-\frac{4}{\lambda} - 2h = 0 \Rightarrow h = -\frac{2}{\lambda}$

$V_0 = \left(-\frac{2}{\lambda}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\lambda}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\lambda}\right)$

$V_0 = -\frac{32}{\lambda^3}$

$l = -\frac{4}{\lambda}$

$b = -\frac{4}{\lambda}$

$h = -\frac{2}{\lambda}$

$V_0 = -\frac{32}{\lambda^3}$

$-\frac{4}{\lambda} + \lambda \cdot \frac{8}{\lambda^2} = -\frac{4}{\lambda}$

$-\frac{8}{\lambda} + \frac{8}{\lambda} = 0$

$-\frac{8}{\lambda} = -8$

$\lambda = 1$

$\lambda = -\frac{2 \cdot (b+l)}{l \cdot b} \Rightarrow$

$\frac{-4\lambda}{\lambda l} = -\frac{4}{l}$

$-\frac{32}{\lambda^3} - V_0 = 0$

$-\frac{32}{\lambda^3} = V_0$

$-\frac{32}{V_0} = \lambda^3$

$\sqrt[3]{\frac{32}{V_0}} = \lambda$

$O^* = l^2 + 2l \cdot \frac{l}{2} + 2l \cdot \frac{l}{2} = 3l^2$

$\Rightarrow 3 (2V_0)^{\frac{2}{3}} = O^*$

$3\sqrt[3]{(2V_0)}$

(2) $\nabla g = (bh, lh, lb) \neq 0$, da $l, b, h > 0$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3