Die Tangentialebene, mit Kurven erklärt

Warum ∇h senkrecht auf M steht und was das mit Lagrange zu tun hat

Das Skript erklärt Satz 17.15 geometrisch mit Niveaulinien: Im Extremum berührt die Menge $h(x) = 0$ eine Niveaulinie von f. Dieses Blatt erklärt dasselbe mit Kurven, die in der Nebenbedingungsmenge laufen. Der Vorteil: Man braucht nur die Kettenregel für Kurven aus Abschnitt 14.4, und das Bild funktioniert in jeder Dimension und für mehrere Nebenbedingungen.

Die Bezeichnungen sind die des Skripts: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, h_1, \dots, h_m \in C^1(D, \mathbb{R})$, $M = \{x \in D : h_1(x) = \cdots = h_m(x) = 0\}$, Extremstelle x_0, Jacobi-Matrix $J_h(x_0)$. In der Musterlösung zu Blatt 4 heißt die Nebenbedingung g statt h.

1 Zwei Tangentialebenen, die man auseinanderhalten muss

Im Skript kommt das Wort an zwei Stellen vor, und gemeint ist jeweils etwas anderes.

- **Abschnitt 14.2:** die Tangentialhyperebene an den *Graphen* einer Funktion. Für $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist das die Ebene $z = g(x_0, y_0) + g_x \cdot (x - x_0) + g_y \cdot (y - y_0)$ im $\mathbb{R}^3$.
- **Abschnitt 17.4:** die Tangentialebene an die *Nullstellenmenge* $M = \{h = 0\}$. Um sie geht es bei Lagrange.

Beide hängen zusammen. Ein Graph ist eine Nullstellenmenge: $z = g(x, y)$ ist dasselbe wie $h(x, y, z) = 0$ mit

$$h(x, y, z) = z - g(x, y), \qquad \nabla h = (-g_x, -g_y, 1).$$

Die Tangentialebene des Graphen lässt sich umschreiben zu $-g_x(x - x_0) - g_y(y - y_0) + (z - z_0) = 0$, also

$$\langle \nabla h(x_0, y_0, z_0),\ (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \rangle = 0.$$

Das ist die Ebene durch den Punkt, auf der ∇h senkrecht steht.

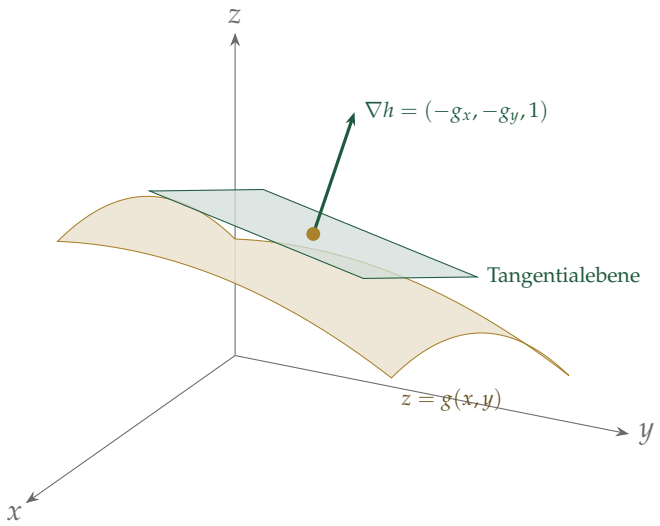

Abbildung 1: Der Graph $z = g(x, y)$ als Nullstellenmenge von $h = z - g$. Der Gradient ∇h steht senkrecht auf der Tangentialebene aus Abschnitt 14.2.

Merke

Die Tangentialebene an $M = \{h = 0\}$ im Punkt x_0 ist die Ebene durch x_0, auf der $\nabla h(x_0)$ senkrecht steht:

$$x_0 + \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla h(x_0), v \rangle = 0\}.$$

Die folgenden Abschnitte erklären, warum das die richtige Definition ist.

2 Kurven auf M und ihre Geschwindigkeiten

Auf einer gekrümmten Fläche kann man nicht geradeaus gehen, ohne sie zu verlassen. Was man tun kann: auf der Fläche eine Kurve entlanglaufen. Eine Kurve auf M durch x_0 ist eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) \in M \text{ für alle } t, \qquad \gamma(0) = x_0.$$

Ihre Geschwindigkeit $\gamma'(0)$ ist ein Vektor, der in x_0 angeheftet ist und angibt, in welche Richtung und wie schnell man gerade läuft.

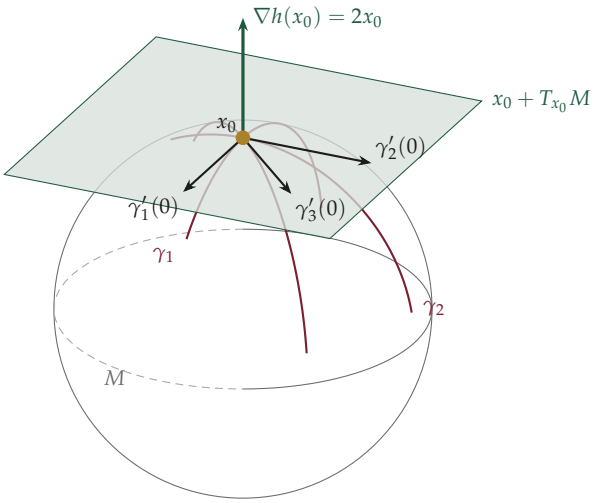

Abbildung 2: Die Sphäre $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit drei Kurven durch den Nordpol $x_0 = (0, 0, 1)$. Alle drei Geschwindigkeiten liegen in einer Ebene, und $\nabla h(x_0)$ steht senkrecht darauf.

Das Beispiel nachgerechnet

Für $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ist $\nabla h(x) = 2x$, im Nordpol also $\nabla h(x_0) = (0, 0, 2)$. Drei Kurven auf der Sphäre durch den Nordpol:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\sin t,\, 0,\, \cos t), & \gamma_1'(0) &= (1, 0, 0), \\ \gamma_2(t) &= (0,\, \sin t,\, \cos t), & \gamma_2'(0) &= (0, 1, 0), \\ \gamma_3(t) &= \left(\tfrac{\sin t}{\sqrt{2}},\, \tfrac{\sin t}{\sqrt{2}},\, \cos t\right), & \gamma_3'(0) &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{aligned}$$

Jede Geschwindigkeit hat dritte Koordinate 0, steht also senkrecht auf $(0, 0, 2)$. Egal welche Kurve man auf der Sphäre durch den Nordpol legt: Ihre Geschwindigkeit ist dort waagerecht.

3 Orthogonalität ist die Kettenregel

Dass das kein Zufall ist, zeigt eine Zeile Rechnung.

Satz 1

Ist γ eine Kurve auf $M = \{h = 0\}$ mit $\gamma(0) = x_0$, so gilt

$$\langle \nabla h(x_0), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Beweis. Die Kurve liegt in M, also ist $h(\gamma(t)) = 0$ für alle t. Die Funktion $t \mapsto h(\gamma(t))$ ist konstant, ihre Ableitung ist null. Nach der Kettenregel für Kurven (Skript, Abschnitt 14.4, „Spezialfall einer Kurve“) ist

$$0 = \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i h(\gamma(t))\, \gamma_i'(t) = \langle \nabla h(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Für $t = 0$ ist das die Behauptung. □

In Worten: Wer auf M läuft, ändert den Wert von h nicht. Die Änderungsrate von h in Laufrichtung ist $\langle \nabla h, \gamma' \rangle$ (das ist die Richtungsableitung aus Abschnitt 14.3). Sie muss null sein, also steht die Laufrichtung senkrecht auf ∇h.

Dazu passt die „geometrische Bedeutung des Gradienten“ aus Abschnitt 14.3: ∇h zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von h. Der kürzeste Weg, die Fläche $h = 0$ zu verlassen, führt senkrecht von ihr weg. Senkrecht zu ∇h ändert sich h in erster Ordnung nicht, und das sind die Richtungen, die in der Fläche bleiben.

4 Jede Richtung senkrecht zu ∇h kommt als Geschwindigkeit vor

Satz 1 sagt: Alle Geschwindigkeiten liegen in der Ebene $\{v : \langle \nabla h(x_0), v \rangle = 0\}$. Füllen sie diese Ebene auch aus? Ja, wenn $\nabla h(x_0) \neq 0$ ist. Dafür braucht man den Satz über implizite Funktionen (Satz 17.13), genau wie im Beweis von Satz 17.15 im Skript.

Sei etwa $\partial_n h(x_0) \neq 0$. Dann ist M nahe x_0 ein Graph: Es gibt eine C^1-Funktion g auf einer Umgebung $U_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $\tilde{x} = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_{n-1})$ mit

$$h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Jetzt baut man Kurven auf M, indem man Geraden aus U_1 auf die Fläche hochhebt. Zu $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ setze

$$\gamma(t) = \big(\tilde{x} + tw,\ g(\tilde{x} + tw)\big), \qquad \gamma'(0) = \big(w,\ \langle \nabla g(\tilde{x}), w \rangle\big).$$

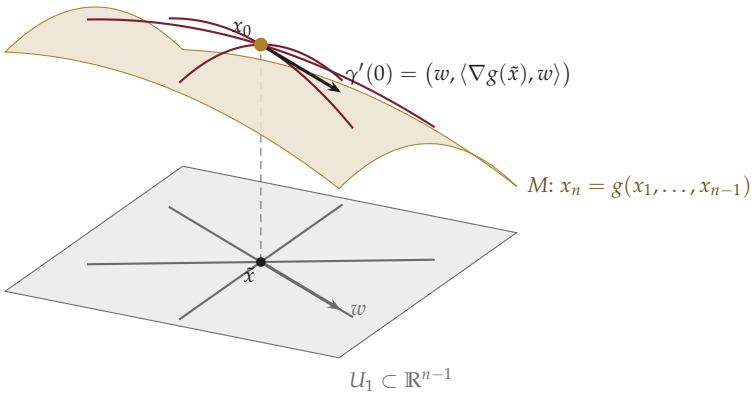

Abbildung 3: Geraden durch $\tilde{x}$ in der Parameterebene werden zu Kurven auf M durch x_0 hochgehoben. Jede Richtung w unten liefert eine Geschwindigkeit oben.

Zu jeder Richtung $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ gibt es also eine Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeiten bilden einen Unterraum der Dimension $n - 1$. Er liegt nach Satz 1 in $\{v : \langle \nabla h(x_0), v \rangle = 0\}$, und dieser Raum hat ebenfalls Dimension $n - 1$. Also sind beide gleich.

Satz 2 (Tangentialraum)

Ist $\nabla h(x_0) \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} T_{x_0}M &:= \{\gamma'(0) : \gamma \text{ Kurve auf } M,\ \gamma(0) = x_0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla h(x_0), v\rangle = 0\} = \ker J_h(x_0). \end{aligned}$$

Die Tangentialebene aus Abschnitt 1 ist $x_0 + T_{x_0}M$. Sie besteht aus allen Punkten, die man erreicht, wenn man von x_0 aus mit der Geschwindigkeit irgendeiner Kurve auf M geradeaus weiterläuft.

Wozu $\nabla h(x_0) \neq 0$

Für $h(x, y) = x^2 - y^2$ ist M das Geradenkreuz $y = \pm x$. Im Ursprung ist $\nabla h = 0$, die Menge $\{v : \langle \nabla h, v\rangle = 0\}$ ist der ganze $\mathbb{R}^2$, aber Kurven auf M haben dort nur Geschwindigkeiten entlang der beiden Geraden. M hat im Ursprung einen Knick, und es gibt keine Tangente. Deshalb verlangt Satz 17.15 den vollen Rang von $J_h(x_0)$.

5 Lagrange mit Kurven statt Niveaulinien

Jetzt kommt f dazu. Angenommen, $f|_M$ hat in x_0 ein lokales Maximum. Nimm irgendeine Kurve γ auf M durch x_0 und betrachte die Funktion einer Variablen

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)).$$

Das ist das Höhenprofil von f entlang der Kurve. Weil x_0 auf ganz M ein lokales Maximum ist, hat φ in $t = 0$ ein lokales Maximum. Also ist $\varphi'(0) = 0$, und wieder mit der Kettenregel für Kurven:

$$0 = \varphi'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle.$$

Das gilt für jede Kurve auf M durch x_0, also für jede Geschwindigkeit $v \in T_{x_0}M$.

Der Beweis in drei Zeilen

(1) $\nabla h(x_0) \perp T_{x_0}M$ (Satz 1: Kurven auf M ändern h nicht).

(2) $\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}M$ (im Extremum ändert sich f entlang keiner Kurve in erster Ordnung).

(3) $T_{x_0}M$ hat Dimension $n-1$, senkrecht darauf steht nur eine Gerade. Beide Gradienten liegen auf ihr: $\nabla f(x_0) = -\lambda_0 \nabla h(x_0)$.

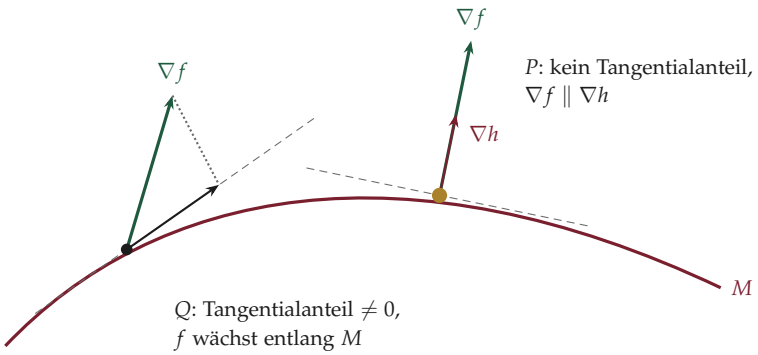

Abbildung 4: In Q hat ∇f einen Anteil in Tangentialrichtung. Läuft man auf M in diese Richtung, steigt f. In P ist kein solcher Anteil mehr da.

Aufgabe 1 mit Kurven

Für $h = x + y + z - 60$ und $x_0 = (20, 20, 20)$ ist M eine Ebene, und Kurven auf M dürfen Geraden sein: $\gamma_v(t) = x_0 + tv$ mit $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

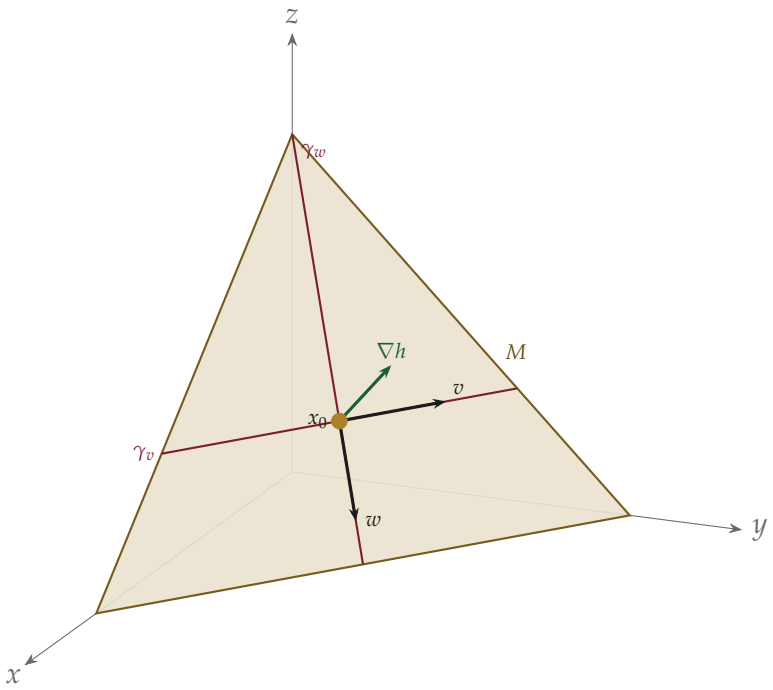

Abbildung 5: Zwei Kurven auf M durch $x_0 = (20, 20, 20)$: γ_v mit $v = (-1, 1, 0)$ und γ_w mit $w = (1, 1, -2)$.

Die Höhenprofile von $f = xyz$ entlang dieser Kurven:

$$f(\gamma_v(t)) = (20 - t)(20 + t) \cdot 20 = 8000 - 20\,t^2,$$
$$f(\gamma_w(t)) = (20 + t)^2(20 - 2t) = 8000 - 60\,t^2 - 2\,t^3.$$

Beide haben in $t = 0$ die Ableitung null und ein lokales Maximum. Allgemein ist für $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

$$f(x_0 + tv) = 8000 - 10\,\|v\|^2\,t^2 + v_1v_2v_3\,t^3,$$

jedes Profil hat also in $t = 0$ ein Maximum. In $Q = (10, 20, 30)$ dagegen, entlang $v = (-1, 1, 0)$:

$$f(Q + tv) = (10 - t)(20 + t) \cdot 30 = 6000 - 300\,t - 30\,t^2, \qquad \varphi'(0) = -300 \neq 0.$$

Dort kann man auf M in Richtung $-v$ laufen und f wächst. Q ist kein Extremum.

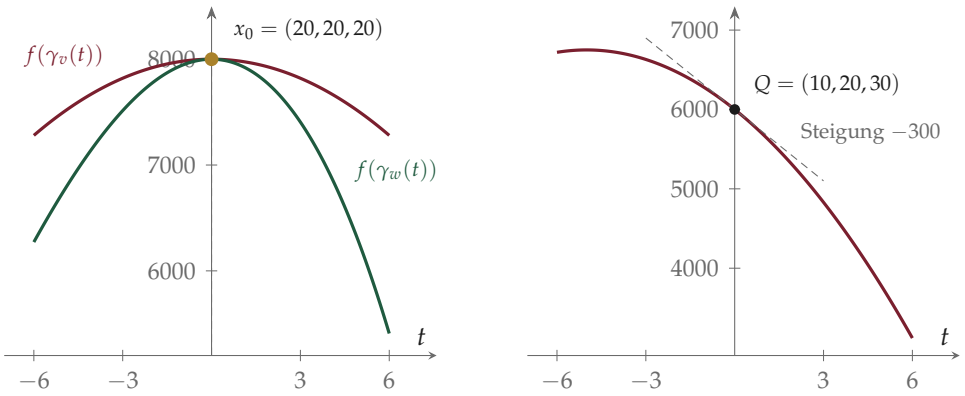

Abbildung 6: Höhenprofile $t \mapsto f(\gamma(t))$. Links in x_0: Jedes Profil hat bei $t = 0$ eine waagerechte Tangente. Rechts in Q: Das Profil ist bei $t = 0$ geneigt.

Kurven und Niveaulinien sagen dasselbe

Im Bild des Skripts berührt M eine Niveaulinie von f. Für Niveaumengen gilt Satz 1 genauso: ∇f steht senkrecht auf $\{f = c\}$. „Berühren“ heißt, dass beide Mengen in x_0 denselben Tangentialraum haben, also dieselbe Normale. Die Kurvensicht sagt das direkt: Jede Kurve, die auf M läuft, hat in x_0 eine Geschwindigkeit, entlang der sich auch f nicht ändert.

6 Der Beweis im Skript ist dieses Argument

Der Beweis von Satz 17.15 im Skript löst $h = 0$ nach $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ auf und betrachtet

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = f\big(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})\big), \qquad \nabla F(\tilde{x}) = 0.$$

Die partielle Ableitung $\partial_i F(\tilde{x})$ ist die Ableitung von f entlang der hochgehobenen Koordinatenlinie

$$\gamma_i(t) = \big(\tilde{x} + te_i,\ g(\tilde{x} + te_i)\big), \qquad \gamma_i'(0) = \big(e_i,\ \partial_i g(\tilde{x})\big) =: b_i.$$

Das sind $n - 1$ spezielle Kurven aus Abbildung 3. Die Bedingung $\nabla F(\tilde{x}) = 0$ aus dem Skript lautet damit

$$\langle \nabla f(x_0), b_i \rangle = 0 \qquad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Die Vektoren $b_1, \dots, b_{n-1}$ bilden eine Basis von $T_{x_0}M$. Das Skript rechnet also in dieser Basis nach, dass $\nabla f(x_0)$ senkrecht auf dem Tangentialraum steht, und liest λ_0 aus der n-ten Koordinate ab.

Mit der Formel $\partial_i g = -\partial_i h / \partial_n h$ aus Satz 17.13 sieht man auch direkt, dass die b_i senkrecht auf $\nabla h(x_0)$ stehen:

$$\langle \nabla h(x_0), b_i \rangle = \partial_i h + \partial_n h \cdot \partial_i g = \partial_i h - \partial_i h = 0.$$

7 Mehrere Nebenbedingungen

Bei m Nebenbedingungen muss eine Kurve auf M alle Gleichungen $h_j(\gamma(t)) = 0$ erfüllen. Satz 1 gilt für jede einzeln:

$$\langle \nabla h_j(x_0), \gamma'(0) \rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m, \qquad \text{also} \qquad J_h(x_0)\,\gamma'(0) = 0.$$

Hat $J_h(x_0)$ vollen Rang m, so ist $T_{x_0}M = \ker J_h(x_0)$ mit Dimension $n - m$. Senkrecht darauf steht jetzt ein m-dimensionaler Raum.

> **Lineare Algebra**
>
> Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist $(\ker A)^\perp = \text{Bild } A^T$, der Spann der Zeilen von A.

Beweis. $v \in \ker A \iff \langle w, Av \rangle = 0$ für alle $w \iff \langle A^T w, v \rangle = 0$ für alle $w \iff v \perp \text{Bild } A^T$. Also $\ker A = (\text{Bild } A^T)^\perp$, und das Komplement beider Seiten gibt die Behauptung. □

Die Zeilen von $J_h(x_0)$ sind die Gradienten $\nabla h_j(x_0)$. Das Kurvenargument aus Abschnitt 5 gibt wieder $\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}M$, also

$$\nabla f(x_0) \in (\ker J_h(x_0))^\perp = \text{span}\{\nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_m(x_0)\}.$$

Das ist die Bemerkung nach Satz 17.15 im Skript: „$\nabla f(x_0)$ liegt im Unterraum, der von $\{\nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_m(x_0)\}$ aufgespannt wird.“ Ohne Multiplikatoren geschrieben: $\ker J_h(x_0) \subseteq \ker Df(x_0)$.

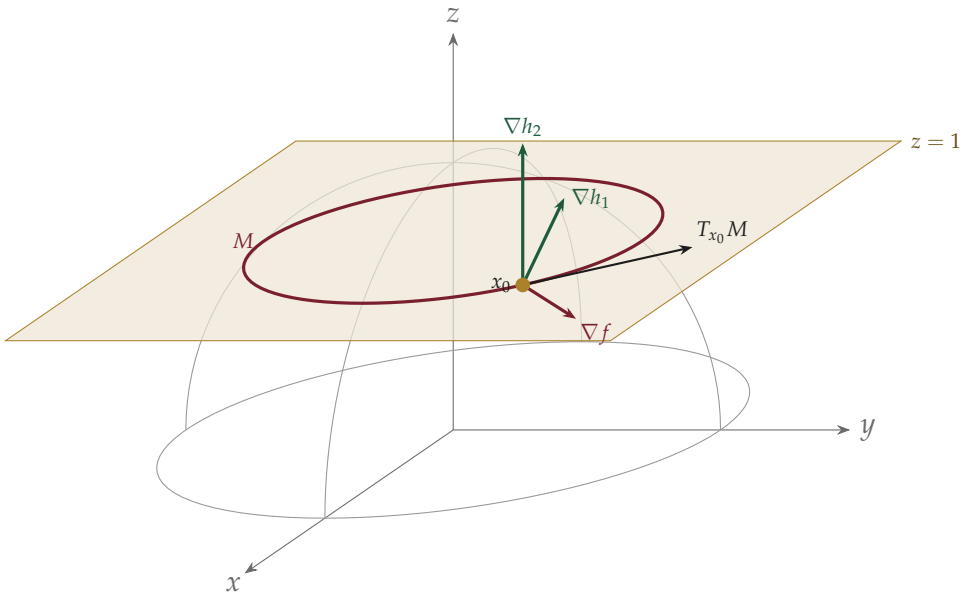

Abbildung 7: $h_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ und $h_2 = z - 1$. M ist ein Kreis, sein Tangentialraum eine Gerade. Senkrecht darauf steht die von ∇h_1 und ∇h_2 aufgespannte Ebene, und im Maximum von $f = x + y$ liegt ∇f in ihr.

Nachgerechnet: Die Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ läuft auf M, ihre Geschwindigkeit ist $(-\sin t, \cos t, 0)$. Das Höhenprofil $f(\gamma(t)) = \cos t + \sin t$ hat sein Maximum bei $t = \frac{\pi}{4}$, also

in $x_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Dort ist

$$\nabla h_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2), \quad \nabla h_2 = (0,0,1), \qquad \nabla f = (1,1,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \nabla h_1 - \sqrt{2}\, \nabla h_2.$$

8 Für die Tafel

Drei Zeilen und ein Bild

Bild: Fläche M, Punkt x_0, zwei oder drei Kurven durch x_0 mit Geschwindigkeitspfeilen, die Tangentialebene, ∇h senkrecht darauf.

(1) γ auf $M \Rightarrow h(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \langle \nabla h(x_0), \gamma'(0) \rangle = 0$.

(2) x_0 Extremum von $f|_M \Rightarrow f(\gamma(t))$ hat Extremum in $t = 0 \Rightarrow \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle = 0$.

(3) Beide Gradienten stehen senkrecht auf allen Geschwindigkeiten $\Rightarrow \nabla f(x_0) = -\lambda_0 \nabla h(x_0)$.

	eine Nebenbedingung	m **Nebenbedingungen**
Kurve auf M	$h(\gamma(t)) = 0$	$h_j(\gamma(t)) = 0$ für alle j
Tangentialraum $T_{x_0}M$	$\{v : \langle \nabla h(x_0), v \rangle = 0\}$	$\ker J_h(x_0)$
Dimension	$n-1$	$n-m$
senkrecht darauf	Gerade $\mathbb{R} \cdot \nabla h(x_0)$	$\operatorname{span}\{\nabla h_j(x_0)\}$
Lagrange	$\nabla f(x_0) = -\lambda_0 \nabla h(x_0)$	$\nabla f(x_0) = -\sum_j (\lambda_0)_j \nabla h_j(x_0)$

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3