ANALYSIS III · TUTORIUM · WINTERSEMESTER 2026/27

Blatt 6 erklärt

Ein Null-Eins-Maß · Punktmassen auf den rationalen Zahlen · Zählmaß und Stetigkeit

Begleitmaterial zum Nacharbeiten der Tutoriumsaufgaben 1 bis 3 – mit Werkzeugkasten, gestuften Hinweisen, ausführlichen Lösungswegen, Skizzen, typischen Fehlern und einem Selbsttest.

Mirkan Deniz Günkaya · Tutorium freitags 10–12 Uhr, Mathematisches Institut, B041 · mirkan-analysis.de

Bevor ihr loslegt

Dieses Begleitmaterial habe ich für euch geschrieben, damit ihr die Tutoriumsaufgaben von Blatt 6 in Ruhe nacharbeiten könnt. Es ist ein **freiwilliges Zusatzangebot** und **keine offizielle Datei oder Musterlösung der Vorlesung**. Verbindlich sind die Vorlesung, das Skript und die Ankündigungen von Prof. Rauhut und dem Übungsteam. Die Aufgaben sind hier in eigenen Worten wiedergegeben; die schriftlichen Aufgaben 4 und 5 sind nicht gelöst.
Weitergeben ausdrücklich erwünscht. Wenn euch ein Fehler auffällt oder etwas unklar bleibt, sprecht mich im Tutorium an.

So holt ihr am meisten heraus: Versucht jede Aufgabe zuerst selbst. Wenn ihr hängt, lest nur den nächsten Hinweis. Die Lösung ist zum Vergleichen da – nicht zum Abschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1 Werkzeugkasten **2**

2 Aufgabe 1: Ein Maß, das nur „abzählbar oder nicht“ kennt **2**

2.1 Teil (a), Schritt für Schritt . . . 3

2.2 Teil (b) . . . 3

3 Aufgabe 2: Gewichte auf den rationalen Zahlen **4**

3.1 Teil (a), Schritt für Schritt . . . 4

3.2 Teil (b) . . . 5

3.3 Teil (c) . . . 5

4 Aufgabe 3: Wann darf man zum Grenzwert übergehen? **5**

4.1 Teil (a) . . . 6

4.2 Teil (b), Schritt für Schritt . . . 6

4.3 Teil (c) . . . 6

5 Selbsttest **7**

1 Werkzeugkasten

Maß (Definition 18.16) Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ heißt **Maß**, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und für jede Folge *paarweise disjunkter* Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Gilt zusätzlich $\mu(\Omega) = 1$, ist μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**. μ heißt **σ-endlich**, wenn $\Omega = \bigcup_m \Omega_m$ mit $\Omega_m \in \mathcal{F}$ und $\mu(\Omega_m) < \infty$.

Stetigkeit (Satz 18.17) Für ein Maß gilt

- **von unten:** $A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \to \mu(A)$ – immer;
- **von oben:** $B_n \downarrow B$ *und* $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow\; \mu(B_n) \to \mu(B)$.

Die Voraussetzung $\mu(B_1) < \infty$ ist kein Kleingedrucktes – Aufgabe 3 zeigt, was ohne sie schiefgeht.

Dirac-Maß und Summen von Maßen Für $a \in \Omega$ ist $\delta_a(A) = 1$ für $a \in A$ und $\delta_a(A) = 0$ sonst ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Maße und $c_k \geq 0$, dann ist auch $\sum_k c_k \mu_k$ ein Maß. Grund: Doppelreihen mit *nichtnegativen* Gliedern darf man vertauschen.

Abzählbar oder nicht Abzählbare Vereinigungen höchstens abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar. $\mathbb{R}$, jedes Intervall mit mehr als einem Punkt und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbar; $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

2 Aufgabe 1: Ein Maß, das nur „abzählbar oder nicht“ kennt

Aufgabe 1 (in eigenen Worten)

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ sei $\varphi(M) = 0$, falls M höchstens abzählbar ist, und $\varphi(M) = 1$, falls M überabzählbar ist.

(a) Auf der σ-Algebra $\mathcal{A} = \{M \subseteq \mathbb{R} :\ M \text{ oder } \mathbb{R} \setminus M \text{ ist höchstens abzählbar}\}$ ist φ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(b) Auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist φ nicht einmal endlich additiv.

Worum es geht

Dieselbe Formel ist einmal ein Maß und einmal nicht – es liegt nur am **Definitionsbereich**. In $\mathcal{A}$ gibt es nur zwei Sorten Mengen: „klein“ (abzählbar) und „fast alles“ (Komplement abzählbar). Zwei Mengen der zweiten Sorte können nie disjunkt sein. In $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dagegen kann man $\mathbb{R}$ in zwei überabzählbare Hälften zerschneiden.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Seien $M, N \in \mathcal{A}$ disjunkt und beide überabzählbar. Was weißt du dann über $\mathbb{R} \setminus N$, und wo liegt M?

Hinweis 2. Unterscheide zwei Fälle: Alle M_n sind abzählbar – oder (genau) eine ist es nicht.

Hinweis 3. Für (b): Schneide $\mathbb{R}$ bei 0 durch.

2.1 Teil (a), Schritt für Schritt

Schritt 0: Werte. $\varphi(\emptyset) = 0$, weil $\emptyset$ abzählbar ist, und $\varphi(\mathbb{R}) = 1$, weil $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Schritt 1: Höchstens eine große Menge. Sind $M, N \in \mathcal{A}$ disjunkt und beide überabzählbar, dann ist wegen $N \in \mathcal{A}$ das Komplement $\mathbb{R} \setminus N$ abzählbar. Aus $M \cap N = \emptyset$ folgt $M \subseteq \mathbb{R} \setminus N$, also ist M abzählbar – Widerspruch. In einer disjunkten Folge aus $\mathcal{A}$ ist also *höchstens eine* Menge überabzählbar.

Warum: Das ist die ganze Aufgabe. Überabzählbare Mengen in $\mathcal{A}$ sind „fast ganz $\mathbb{R}$“, und zwei davon überlappen sich immer.

Schritt 2: Fallunterscheidung. Seien $M_1, M_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $M = \bigcup_n M_n$.

- Sind alle M_n abzählbar, so auch M. Links steht $\varphi(M) = 0$, rechts $\sum_n 0 = 0$.
- Ist genau ein M_{n_0} überabzählbar, so ist auch $M \supseteq M_{n_0}$ überabzählbar. Links steht 1, rechts $1 + 0 + 0 + \cdots = 1$.

Beide Seiten stimmen überein, $\varphi|_{\mathcal{A}}$ ist σ-additiv, mit $\varphi(\mathbb{R}) = 1$ also ein Wahrscheinlichkeitsmaß. □

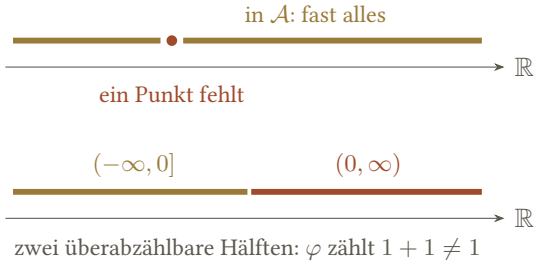
2.2 Teil (b)

$M = (-\infty, 0]$ und $N = (0, \infty)$ sind Borel-Mengen, disjunkt und beide überabzählbar. Dann

$$\varphi(M \cup N) = \varphi(\mathbb{R}) = 1 \neq 2 = \varphi(M) + \varphi(N).$$

Schon die Additivität für *zwei* Mengen scheitert. □

Warum: M und N liegen nicht in $\mathcal{A}$: Beide und ihre Komplemente sind überabzählbar. Deshalb widerspricht (b) nicht (a). Insbesondere ist $\mathcal{A}$ echt kleiner als $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – $\mathcal{A}$ „sieht“ keine Intervalle.



> **Typische Fehler**
>
> - In (a) nur *zwei* Mengen betrachten. Verlangt ist σ-Additivität für Folgen.
> - Den Fall „eine Menge überabzählbar“ ohne Schritt 1 behandeln – dann bleibt offen, ob nicht zwei Summanden 1 sind.
> - In (b) Mengen nehmen, die gar nicht in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegen, oder Mengen aus $\mathcal{A}$. Das Gegenbeispiel muss Borel-messbar sein.

3 Aufgabe 2: Gewichte auf den rationalen Zahlen

Aufgabe 2 (in eigenen Worten)

Sei $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$ ohne Wiederholungen. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\, \delta_{q_k}(A).$$

(a) Zeige direkt, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Bestimme $\mu(\mathbb{Q})$, $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ und $\mu(\{x\})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

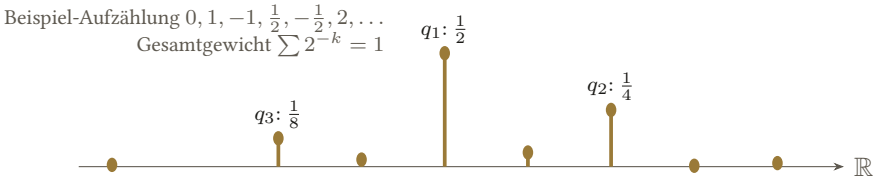
(c) Zeige: Jede nichtleere offene Menge hat positives Maß. Kann eine Menge vom Maß null dicht sein?

Worum es geht

Stellt euch vor, auf jeder rationalen Zahl q_k liegt ein Sandkorn vom Gewicht 2^{-k}. Insgesamt ist das Gewicht $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$. Das Maß einer Menge ist einfach das Gewicht der Körner, die in ihr liegen:

$$\mu(A) = \sum_{k \in K(A)} 2^{-k}, \qquad K(A) = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \in A\}.$$

Mit dieser Formel wird die ganze Aufgabe zur Buchhaltung.



Das Maß sitzt komplett auf abzählbar vielen Punkten – dazwischen ist es „leer“.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Für disjunkte A_j liegt jedes q_k in *höchstens einer* der Mengen. Was ist dann $\delta_{q_k}\big(\bigcup_j A_j\big)$?

Hinweis 2. Darf man $\sum_k \sum_j$ zu $\sum_j \sum_k$ vertauschen? Worauf kommt es an?

Hinweis 3. Für (c): Was weißt du über rationale Zahlen in einem offenen Intervall?

3.1 Teil (a), Schritt für Schritt

Schritt 0: Werte. $\mu(\emptyset) = 0$, weil kein q_k in $\emptyset$ liegt. $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} = 1$ (geometrische Reihe).

Schritt 1: Ein Punkt zählt einmal. Seien $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt und $A = \bigcup_j A_j$. Für jedes feste k liegt q_k in höchstens einem A_j. Also

$$\delta_{q_k}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{q_k}(A_j)$$

– links steht 1 genau dann, wenn rechts genau ein Summand 1 ist.

Schritt 2: Summen vertauschen.

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{q_k}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{q_k}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Warum: Alle Glieder sind ≥ 0. Für nichtnegative Doppelreihen ist jede Summationsreihenfolge gleich dem Supremum über endliche Teilsummen – das Vertauschen ist erlaubt (Umordnungssatz). Bei Gliedern mit wechselndem Vorzeichen wäre das nicht selbstverständlich.

Damit ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. □

3.2 Teil (b)

- $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_k 2^{-k} = 1$: Alle Körner liegen auf $\mathbb{Q}$.
- $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{Q}) = 0$: Keine rationale Zahl ist irrational.
- $\mu(\{x\}) = 2^{-k}$, falls $x = q_k$, und $\mu(\{x\}) = 0$, falls $x \notin \mathbb{Q}$.

Bemerkenswert: Die „riesige“ Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hat Maß 0, die „kleine“ Menge $\mathbb{Q}$ hat Maß 1. Das Maß misst hier Gewicht, nicht Länge.

3.3 Teil (c)

Positiv. Sei $U \neq \emptyset$ offen. Dann enthält U ein Intervall (a, b) mit $a < b$, und weil $\mathbb{Q}$ dicht ist, liegt darin ein q_k. Mit Monotonie: $\mu(U) \geq \mu(\{q_k\}) = 2^{-k} > 0$.

Dicht und trotzdem Maß null. Ja: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ (in jedem Intervall liegen Irrationalzahlen), hat aber nach (b) Maß 0. □

Warum: „Dicht“ ist eine topologische Eigenschaft, „Maß null“ eine maßtheoretische. Die beiden haben nichts miteinander zu tun. Auch beim Lebesgue-Maß gilt das: $\mathbb{Q}$ ist dicht und hat Länge 0.

> **Typische Fehler**
>
> - Behaupten, μ sei nur auf Borel-Mengen definiert. Die Formel ergibt für *jede* Teilmenge von $\mathbb{R}$ Sinn.
> - Das Vertauschen der Summen ohne Begründung. Das Stichwort „nichtnegativ“ muss fallen.
> - In (b) $\mu(\{x\}) = 0$ für alle x schreiben. Das gilt nur für irrationale x – die Punkte q_k tragen Gewicht.
> - In (c) eine konkrete Untergrenze für $\mu(U)$ angeben, die nicht von U abhängt. Je kleiner U, desto später kommt das erste q_k, und 2^{-k} kann beliebig klein sein.

4 Aufgabe 3: Wann darf man zum Grenzwert übergehen?

Aufgabe 3 (in eigenen Worten)

(a) Sei ρ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ und seien $A_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Zeige $\rho(A_n) \to 0$.

(b) Das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist $\zeta(A) = \#A$ für endliche und $\zeta(A) = \infty$ für unendliche A. Zeige, dass ζ ein σ-endliches Maß ist, und widerlege damit:
- (a) gilt auch für σ-endliche Maße.
- Aus $B_n \downarrow B$ und $\zeta(B) < \infty$ folgt $\zeta(B_n) \to \zeta(B)$.

(c) Sei μ das Maß aus Aufgabe 2. Bestimme $\lim_{n\to\infty} \mu\big((x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\big)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Worum es geht

Ein endliches Maß ist ein endlicher Vorrat, den man auf disjunkte Mengen verteilt – auf Dauer bleibt

für jede einzelne immer weniger übrig. Beim Zählmaß ist der Vorrat unendlich, und beide Aussagen kippen. Die Endlichkeit muss bei der Stetigkeit von oben am *Anfang* der Folge stehen, nicht am Ende.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Für (a): Was weißt du über die Reihe $\sum_n \rho(A_n)$? Und über die Glieder einer konvergenten Reihe?

Hinweis 2. Für die σ-Additivität von ζ: Ist $\bigcup_j A_j$ endlich, sind nur endlich viele A_j nichtleer. Ist sie unendlich – woher kommt dann ∞ auf der rechten Seite?

Hinweis 3. Für die Gegenbeispiele: einzelne Punkte $\{n\}$ und Endstücke $\{n, n+1, \dots\}$.

4.1 Teil (a)

Mit σ-Additivität und Monotonie gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) = \rho\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \rho(\Omega) < \infty.$$

Die Reihe konvergiert, also bilden ihre Glieder eine Nullfolge: $\rho(A_n) \to 0$. □

4.2 Teil (b), Schritt für Schritt

ζ ist ein Maß. $\zeta(\emptyset) = 0$. Seien $A_j \subseteq \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und $A = \bigcup_j A_j$.

- Ist A endlich, sind alle A_j endlich und nur endlich viele nichtleer. Anzahlen disjunkter endlicher Mengen addieren sich: $\#A = \sum_j \#A_j$.
- Ist A unendlich, ist entweder ein A_j unendlich (dann ist ein Summand ∞), oder unendlich viele A_j sind nichtleer (dann sind unendlich viele Summanden ≥ 1). In beiden Fällen ist $\sum_j \zeta(A_j) = \infty = \zeta(A)$.

σ-endlich. $\mathbb{N} = \bigcup_k \{k\}$ mit $\zeta(\{k\}) = 1 < \infty$.

Erste Aussage widerlegt. $A_n = \{n\}$ sind paarweise disjunkt, aber $\zeta(A_n) = 1 \not\to 0$.

Zweite Aussage widerlegt. $B_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ ist absteigend mit $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Also $B_n \downarrow \emptyset$ und $\zeta(\emptyset) = 0 < \infty$. Aber $\zeta(B_n) = \infty$ für alle n, also $\zeta(B_n) \to \infty \neq 0$. □

Warum: Satz 18.17 verlangt $\mu(B_1) < \infty$ – Endlichkeit der ersten *Menge. Hier ist nur die Grenzmenge endlich, und das reicht nicht. In (a) dagegen ist alles endlich, weil $\rho(\Omega) < \infty$.*



Jedes Endstück ist unendlich – der Durchschnitt aller ist leer.

4.3 Teil (c)

Für $I_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $\bigcap_n I_n = \{x\}$, also $I_n \downarrow \{x\}$. Da $\mu(I_1) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1 < \infty$, liefert die Stetigkeit von oben

$$\lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = \mu(\{x\}) = \begin{cases} 2^{-k}, & x = q_k, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Anschaulich: Je enger das Fenster um x, desto weniger Körner liegen darin – am Ende nur noch das Korn auf x selbst, falls es eines gibt.

> **Typische Fehler**
>
> - In (a) $\rho(A_n) \to 0$ mit „die Mengen werden kleiner“ begründen. Disjunkte Mengen werden nicht kleiner – entscheidend ist die konvergente Reihe.
> - In (b) die σ-Additivität des Zählmaßes nur für endliche Mengen zeigen. Der Fall „unendlich“ gehört dazu.
> - Bei der zweiten Aussage $B_n = \{n\}$ wählen. Das ist nicht absteigend.
> - In (c) die Stetigkeit von oben ohne den Hinweis $\mu(I_1) < \infty$ anwenden – genau diese Bedingung fehlt beim Zählmaß.

5 Selbsttest

1. Liegt $[0,1]$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 1?
2. Zeige für das Maß aus Aufgabe 2: $\mu(A) = 0 \iff A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
3. Die Aufzählung in Aufgabe 2 beginne mit $q_1 = 0$. Wie groß ist $\lim_n \mu\big((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\big)$?
4. Gib eine absteigende Folge $B_n \downarrow B$ in $\mathbb{N}$ an, für die $\zeta(B_n) \to \zeta(B)$ *gilt*, und begründe mit Satz 18.17.

Lösungen zum Selbsttest

1. Nein. $[0,1]$ ist überabzählbar, und $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ ist es auch.
2. $\mu(A) = \sum_{k:\, q_k \in A} 2^{-k}$ ist genau dann 0, wenn die Summe leer ist, also kein q_k in A liegt.
3. $\mu(\{0\}) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
4. Zum Beispiel $B_n = \{n, \dots, 10\}$ für $n \le 10$ und $B_n = \emptyset$ danach. Hier ist $\zeta(B_1) = 10 < \infty$, also greift die Stetigkeit von oben: $\zeta(B_n) \to 0 = \zeta(\emptyset)$.

Fragen, Fehler gefunden oder Wünsche für das nächste Blatt? Sprecht mich gern im Tutorium an.
Weitere Materialien, Skizzen zum Anfassen und Wissens-Checks: mirkan-analysis.de/analysis-3.html

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3