ANALYSIS III · TUTORIUM · WINTERSEMESTER 2026/27

Blatt 5 erklärt

Monotone Klassen · Produkte von Mengenringen · ein Dreieck aus Quadraten

Begleitmaterial zum Nacharbeiten der Tutoriumsaufgaben 1 bis 3 – mit Werkzeugkasten, gestuften Hinweisen, ausführlichen Lösungswegen, Skizzen, typischen Fehlern und einem Selbsttest.

Mirkan Deniz Günkaya · Tutorium freitags 10–12 Uhr, Mathematisches Institut, B041 · mirkan-analysis.de

Bevor ihr loslegt

Dieses Begleitmaterial habe ich für euch geschrieben, damit ihr die Tutoriumsaufgaben von Blatt 5 in Ruhe nacharbeiten könnt. Es ist ein **freiwilliges Zusatzangebot** und **keine offizielle Datei oder Musterlösung der Vorlesung**. Verbindlich sind die Vorlesung, das Skript und die Ankündigungen von Prof. Rauhut und dem Übungsteam. Die Aufgaben sind hier in eigenen Worten wiedergegeben; die schriftlichen Aufgaben 4 und 5 sind nicht gelöst.
Weitergeben ausdrücklich erwünscht. Wenn euch ein Fehler auffällt oder etwas unklar bleibt, sprecht mich im Tutorium an.

So holt ihr am meisten heraus: Versucht jede Aufgabe zuerst selbst. Wenn ihr hängt, lest nur den nächsten Hinweis. Die Lösung ist zum Vergleichen da – nicht zum Abschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1 Werkzeugkasten **2**

2 Aufgabe 1: Konvexe Mengen bilden eine monotone Klasse **2**

2.1 Teil (a), Schritt für Schritt . . . 3

2.2 Teil (b), Schritt für Schritt . . . 3

3 Aufgabe 2: Produkte von Mengenringen **4**

3.1 Teil (a), Schritt für Schritt . . . 4

3.2 Teil (b) . . . 5

4 Aufgabe 3: Ein Dreieck aus Quadraten **5**

4.1 Teil (a), Schritt für Schritt . . . 6

4.2 Teil (b), Schritt für Schritt . . . 6

4.3 Teil (c): Flächeninhalt . . . 6

5 Selbsttest **7**

1 Werkzeugkasten

Mengenring, Mengenalgebra, σ-Algebra $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein **Mengenring**, wenn $\emptyset \in \mathcal{R}$ und mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \setminus B$ und $A \cup B$ in $\mathcal{R}$ liegen. Daraus folgt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Ein Ring ist genau dann eine **Mengenalgebra**, wenn $\Omega \in \mathcal{R}$. Eine **σ-Algebra** ist zusätzlich unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen.

Monotone Klasse (Definition 18.12) Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt monotone Klasse, wenn sie mit jeder aufsteigenden Folge $X_k \uparrow X$ auch $X = \bigcup_k X_k$ enthält und mit jeder absteigenden Folge $Y_k \downarrow Y$ auch $Y = \bigcap_k Y_k$.

Monotone Klassen verlangen *nichts* über Komplemente, Differenzen oder Vereinigungen zweier beliebiger Mengen – nur Grenzwerte *monotoner* Folgen. Deshalb sind sie viel „billiger“ zu haben als σ-Algebren, und genau das zeigt Aufgabe 1.

Produkt von Mengensystemen Für Mengensysteme $\mathcal{R}_1$ auf Ω_1 und $\mathcal{R}_2$ auf Ω_2 ist

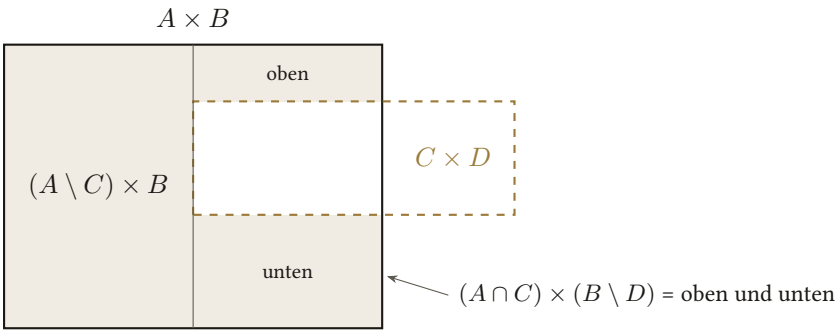
$$\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2 = \Big\{ \bigcup_{k=1}^{m} A_k \times B_k : \; m \in \mathbb{N}_0,\; A_k \in \mathcal{R}_1,\; B_k \in \mathcal{R}_2 \Big\},$$

also alle *endlichen* Vereinigungen von „Rechtecken“ $A \times B$. Für $m = 0$ ist das die leere Menge.

Zwei Mengenidentitäten für Rechtecke

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D), \qquad (A\times B)\setminus(C\times D) = \big((A\setminus C)\times B\big) \cup \big((A\cap C)\times(B\setminus D)\big).$$

Die zweite Formel ist das Herz von Aufgabe 2. Man liest sie so: Ein Punkt $(x, y) \in A \times B$ liegt *nicht* in $C \times D$, wenn entweder schon $x \notin C$ ist, oder $x \in C$, aber $y \notin D$. Die beiden Fälle schließen sich aus, die Vereinigung ist also sogar disjunkt.



Gold schattiert: $(A \times B) \setminus (C \times D)$ – zerlegt in einen „linken“ Teil und einen Teil über $A \cap C$.

2 Aufgabe 1: Konvexe Mengen bilden eine monotone Klasse

Aufgabe 1 (in eigenen Worten)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : A \text{ konvex}\}$, wobei A konvex heißt, wenn mit $x, y \in A$ auch $tx + (1-t)y \in A$ für alle $t \in [0,1]$ gilt – mit zwei Punkten liegt die ganze Verbindungsstrecke in A.

(a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{M}$ keine Mengenalgebra und insbesondere keine σ-Algebra ist.

Worum es geht

Konvexität ist eine Eigenschaft über *zwei* Punkte und die Strecke dazwischen. Bei einer aufsteigenden Folge liegen zwei Punkte irgendwann gemeinsam in einer Menge der Folge; bei einer absteigenden Folge liegen sie in allen. Für (b) reicht ein einziges Gegenbeispiel: eine konvexe Menge, deren Komplement nicht konvex ist.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Nichtleer ist $\mathcal{M}$ schnell: Welche ganz einfachen Mengen sind konvex?
Hinweis 2. Seien $x \in X_i$ und $y \in X_j$ mit $X_k \uparrow X$. In welcher der Mengen liegen beide Punkte gleichzeitig?
Hinweis 3. Für (b): Nimm einen einzelnen Punkt. Was ist sein Komplement?

2.1 Teil (a), Schritt für Schritt

Schritt 0: $\mathcal{M} \neq \emptyset$. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^2$ sind konvex (bei $\emptyset$ ist nichts zu prüfen).

Schritt 1: aufsteigende Folgen. Seien $X_k \in \mathcal{M}$ mit $X_k \uparrow X$, also $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ und $X = \bigcup_k X_k$. Seien $x, y \in X$ und $t \in [0,1]$. Dann gibt es i, j mit $x \in X_i$, $y \in X_j$. Für $k = \max(i,j)$ gilt wegen der Monotonie $x, y \in X_k$. Da X_k konvex ist, liegt $tx + (1-t)y \in X_k \subseteq X$.

Warum: Der Index $\max(i,j)$ ist der ganze Trick. Ohne „aufsteigend“ ginge das schief: Die Vereinigung zweier getrennter Kreisscheiben ist nicht konvex.

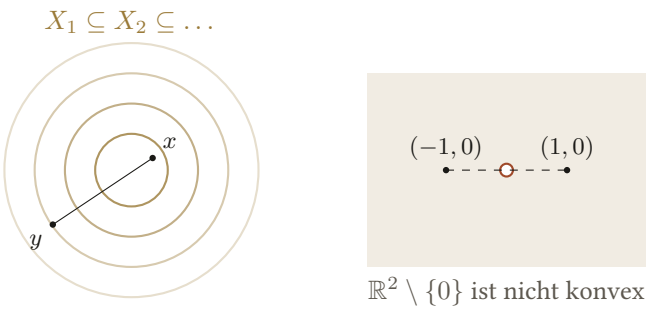
Schritt 2: absteigende Folgen. Seien $Y_k \in \mathcal{M}$ mit $Y_k \downarrow Y$, also $Y = \bigcap_k Y_k$. Für $x, y \in Y$ gilt $x, y \in Y_k$ für *jedes* k, also $tx + (1-t)y \in Y_k$ für jedes k, und damit $tx + (1-t)y \in Y$.

Warum: Hier braucht man die Monotonie gar nicht: Ein beliebiger Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex.

Also ist $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse. □

2.2 Teil (b), Schritt für Schritt

Eine Mengenalgebra enthält mit A auch das Komplement A^c. Nimm $A = \{(0,0)\}$: Ein Punkt ist konvex. Sein Komplement $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist es nicht: $(1,0)$ und $(-1,0)$ liegen in A^c, aber der Mittelpunkt $\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(-1,0) = (0,0)$ nicht. Also ist $\mathcal{M}$ keine Mengenalgebra und erst recht keine σ-Algebra. □



Links: In einer aufsteigenden Folge liegen x und y irgendwann in derselben Menge – und mit ihnen die Strecke.
Rechts: Das Komplement eines Punktes hat ein „Loch“ auf der Strecke.

Typische Fehler

- Vergessen zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ nichtleer ist – das gehört zur Definition.
- In (a) mit $x \in X_k$ und $y \in X_k$ „für dasselbe k“ beginnen, ohne zu begründen, warum es so ein k gibt.
- In (b) nur sagen „Vereinigungen konvexer Mengen sind nicht konvex“. Für „keine Algebra“ braucht man ein *konkretes* Gegenbeispiel mit Rechnung.

3 Aufgabe 2: Produkte von Mengenringen

Aufgabe 2 (in eigenen Worten)

Seien $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ Mengenringe.
(a) Zeige, dass $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$ ein Mengenring auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.
(b) Zeige, dass $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$ eine Mengenalgebra ist, wenn $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Mengenalgebren sind.

Worum es geht

Leere Menge und Vereinigung sind geschenkt. Die eigentliche Arbeit steckt in der Differenz $X \setminus Y$ zweier endlicher Rechteckvereinigungen. Man baut sie in vier Stufen auf, so wie an der Tafel: Rechteck minus Rechteck, Summe minus Rechteck, Summe minus Summe.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Zeichne $(A \times B) \setminus (C \times D)$. Aus welchen zwei Rechtecken besteht das Ergebnis?
Hinweis 2. Für $X = \bigcup_k A_k \times B_k$ ist $X \setminus (C \times D) = \bigcup_k \big((A_k \times B_k) \setminus (C \times D)\big)$.
Hinweis 3. Für $Y = \bigcup_{l=1}^{s} C_l \times D_l$ zieht man die Rechtecke nacheinander ab: $X \setminus Y = \big(\cdots((X \setminus (C_1 \times D_1)) \setminus (C_2 \times D_2))\cdots\big) \setminus (C_s \times D_s)$.

3.1 Teil (a), Schritt für Schritt

Schritt 1: leere Menge. Mit $m = 0$ ist $\emptyset \in \mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$.

Schritt 2: Vereinigung. Sind $X = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \times B_k$ und $Y = \bigcup_{l=1}^{s} C_l \times D_l$, so ist $X \cup Y$ wieder eine endliche Vereinigung von Rechtecken mit Seiten in $\mathcal{R}_1$ bzw. $\mathcal{R}_2$ – man hängt die beiden Listen einfach hintereinander.

Schritt 3: Rechteck minus Rechteck. Für $A, C \in \mathcal{R}_1$ und $B, D \in \mathcal{R}_2$ gilt nach dem Werkzeugkasten

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big((A \setminus C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B \setminus D)\big).$$

Da $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Ringe sind, liegen $A \setminus C,\ A \cap C \in \mathcal{R}_1$ und $B \setminus D \in \mathcal{R}_2$. Also liegt die Differenz in $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$.

Warum: Kontrolle mit einem Punkt $(x, y) \in A \times B$: Ist $x \notin C$, liegt er im ersten Teil. Ist $x \in C$, liegt er genau dann nicht in $C \times D$, wenn $y \notin D$ – zweiter Teil.

Schritt 4: Summe minus Rechteck. Für $X = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \times B_k$ gilt

$$X \setminus (C \times D) = \bigcup_{k=1}^{m} \big((A_k \times B_k) \setminus (C \times D)\big).$$

Jeder Summand liegt nach Schritt 3 in $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$, und nach Schritt 2 auch die endliche Vereinigung.

Schritt 5: Summe minus Summe. Für $Y = \bigcup_{l=1}^{s} C_l \times D_l$ ist

$$X \setminus Y = X \cap \bigcap_{l=1}^{s} (C_l \times D_l)^c = \Big(\cdots \big((X \setminus (C_1 \times D_1)) \setminus (C_2 \times D_2) \big) \cdots \Big) \setminus (C_s \times D_s).$$

Nach Schritt 4 bleibt man bei jedem Abziehen in $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$ (Induktion über s). □

3.2 Teil (b)

Sind $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ Mengenalgebren, so ist $\Omega_1 \in \mathcal{R}_1$ und $\Omega_2 \in \mathcal{R}_2$, also $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$ (ein einziges Rechteck, $m = 1$). Ein Mengenring, der die Grundmenge enthält, ist eine Mengenalgebra – das Komplement ist dann $Z^c = (\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus Z$. □

Typische Fehler

- Glauben, $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$. Das ist falsch: Es fehlen alle Punkte mit $x \notin C$ und $y \in D$ (und mit $x \in C$, $y \notin D$).
- In (a) nur Rechteck minus Rechteck zeigen. Die Elemente von $\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2$ sind *Vereinigungen* von Rechtecken – Schritt 4 und 5 gehören dazu.
- In (b) das Komplement „rechteckweise“ bilden. Der saubere Weg ist: Ring + $\Omega \in \mathcal{R} \Rightarrow$ Algebra.

4 Aufgabe 3: Ein Dreieck aus Quadraten

Aufgabe 3 (in eigenen Worten)

Sei $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{Q} = \big\{ \bigcup_{k=1}^{m} [a_k, b_k) : m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le a_k < b_k \le 1 \big\}$ (eine Mengenalgebra) und $\mathcal{R} = \mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}$ auf Ω^2 (nach Aufgabe 2 eine Mengenalgebra). Sei $T = \{(x,y) \in [0,1)^2 : y < x\}$, $I_{n,k} = \big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\big)$ und

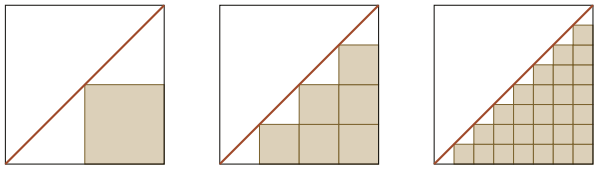
$$T_n = \bigcup_{0 \le j < i < 2^n} I_{n,i} \times I_{n,j} \in \mathcal{R}.$$

(a) Zeige, dass (T_n) aufsteigend ist und $\bigcup_n T_n = T$.

(b) Zeige $T \notin \mathcal{R}$ und folgere, dass $\mathcal{R}$ keine σ-Algebra ist.

(c) Berechne den Flächeninhalt $\mathrm{Fl}(T_n)$ als Summe der Quadrate und zeige $\mathrm{Fl}(T_n) \to \frac{1}{2}$.

Treppe unter der Diagonalen $y = x$ – sie wächst von T_1 zu T_3 gegen das Dreieck T



T_1 T_2 T_3

Worum es geht

T_n ist eine Treppe aus Quadraten der Kantenlänge 2^{-n}, die ganz unter der Diagonalen liegen. Mit feinerem Gitter rückt die Treppe näher an die Diagonale. Das Dreieck selbst ist aber keine *endliche* Vereinigung von Rechtecken – seine schräge Kante bekommt man nur im Grenzwert. Genau daran

sieht man, dass $\mathcal{R}$ keine σ-Algebra ist.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Für $T_n \subseteq T$: Wo liegen x und y, wenn $(x,y) \in I_{n,i} \times I_{n,j}$ mit $j < i$?
Hinweis 2. Für $T_n \subseteq T_{n+1}$: In welche vier Quadrate der Stufe $n+1$ zerfällt $I_{n,i} \times I_{n,j}$?
Hinweis 3. Für $T \notin \mathcal{R}$: Betrachte die senkrechten Schnitte $X_x = \{y : (x,y) \in X\}$. Wie viele verschiedene Schnitte kann eine endliche Vereinigung von Rechtecken höchstens haben?

4.1 Teil (a), Schritt für Schritt

$T_n \subseteq T$. Ist $(x,y) \in I_{n,i} \times I_{n,j}$ mit $j < i$, so gilt $y < \frac{j+1}{2^n} \leq \frac{i}{2^n} \leq x$, also $y < x$.

Aufsteigend. Es ist $I_{n,i} = I_{n+1,2i} \cup I_{n+1,2i+1}$. Damit zerfällt $I_{n,i} \times I_{n,j}$ in die vier Quadrate $I_{n+1,i'} \times I_{n+1,j'}$ mit $i' \in \{2i, 2i+1\}$, $j' \in \{2j, 2j+1\}$. Aus $j < i$ folgt $j \leq i-1$, also $j' \leq 2j+1 \leq 2i-1 < 2i \leq i'$. Alle vier Quadrate gehören zu T_{n+1}, also $T_n \subseteq T_{n+1}$.

$\bigcup_n T_n = T$. „$\subseteq$“ folgt aus dem ersten Schritt. Für „$\supseteq$“ sei $(x,y) \in T$, also $y < x$. Wähle n so groß, dass $2^{-n} < \frac{x-y}{2}$, und setze $i = \lfloor 2^n x \rfloor$, $j = \lfloor 2^n y \rfloor$. Dann ist $x \in I_{n,i}$, $y \in I_{n,j}$, und wegen $2^n x - 2^n y > 2$ gilt $i \geq \lfloor 2^n y + 2 \rfloor = j + 2 > j$. Also $(x,y) \in T_n$. □

4.2 Teil (b), Schritt für Schritt

Schnitte zählen. Für $X \subseteq [0,1)^2$ und $x \in [0,1)$ sei $X_x = \{y : (x,y) \in X\}$ der senkrechte Schnitt. Ist $X = \bigcup_{k=1}^m A_k \times B_k \in \mathcal{R}$, so ist

$$X_x = \bigcup_{k:\, x \in A_k} B_k.$$

Der Schnitt hängt also nur davon ab, *welche* der Mengen $A_1, \ldots, A_m$ den Punkt x enthalten. Dafür gibt es höchstens 2^m Möglichkeiten – X hat nur endlich viele verschiedene Schnitte.

Das Dreieck hat unendlich viele. Für T ist $T_x = [0,x)$, und für $x \neq x'$ sind das verschiedene Mengen. Also hat T unendlich viele verschiedene Schnitte und kann nicht in $\mathcal{R}$ liegen.

Folgerung. Alle T_n liegen in $\mathcal{R}$, ihre abzählbare Vereinigung T aber nicht. Also ist $\mathcal{R}$ nicht unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen und keine σ-Algebra. □

Warum: Das ist der typische Unterschied zwischen „endlich“ und „abzählbar“: Jede Stufe der Treppe ist eine endliche Rechtecksumme, der Grenzwert nicht mehr. Erst die erzeugte σ-Algebra $\langle \mathcal{R} \rangle^\sigma$ – das ist $\mathcal{B}([0,1)^2)$ – enthält auch das Dreieck.

4.3 Teil (c): Flächeninhalt

T_n besteht aus allen Quadraten $I_{n,i} \times I_{n,j}$ mit $0 \leq j < i < 2^n$. Das sind so viele, wie es Paare $j < i$ aus $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ gibt:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} i = \frac{(2^n-1)\,2^n}{2} \quad \text{Quadrate, jedes mit Fläche } 4^{-n}.$$

Also

$$\mathrm{Fl}(T_n) = \frac{(2^n-1)\,2^n}{2} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Das ist die Fläche des Dreiecks. Hier sieht man im Kleinen, was später das Lebesgue-Maß leistet: Die Treppen $T_n \uparrow T$ haben Flächen, die gegen die richtige Fläche von T streben – Stetigkeit von unten (Satz 18.17).

n	Anzahl Quadrate	Fläche eines Quadrats	$\mathrm{Fl}(T_n)$
1	1	$\frac{1}{4}$	0,25
2	6	$\frac{1}{16}$	0,375
3	28	$\frac{1}{64}$	0,4375
10	523 776	4^{-10}	0,4995 …

Typische Fehler

- In (a) nur $T_n \subseteq T$ zeigen und „aufsteigend“ vergessen – oder umgekehrt nur eine Inklusion von $\bigcup T_n = T$.
- In (b) argumentieren „T hat eine schräge Kante, also nicht in $\mathcal{R}$“. Das ist die richtige Idee, aber ein Beweis braucht ein Argument wie die Schnitte.
- In (c) die Diagonalquadrate ($i = j$) mitzählen. Dann kommt $\frac{1}{2}(1 + 2^{-n})$ heraus – die Treppe läge teilweise über der Diagonalen.

5 Selbsttest

1. Ist das System aller *beschränkten* Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ eine monotone Klasse?
2. Berechne $([0,2) \times [0,2)) \setminus ([1,3) \times [1,3))$ als disjunkte Vereinigung von Rechtecken.
3. Wie viele Quadrate hat T_4, und wie groß ist $\mathrm{Fl}(T_4)$?
4. Liegt die Menge $\{(x,y) \in [0,1)^2 : x < \frac{1}{2}\}$ in $\mathcal{R} = \mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{Q}$?

Lösungen zum Selbsttest

1. Nein. Die Bälle B_k vom Radius k sind beschränkt und wachsen gegen $\mathbb{R}^2$, das nicht beschränkt ist. (Absteigende Folgen wären kein Problem.)
2. Nach der Formel: $([0,1) \times [0,2)) \cup ([1,2) \times [0,1))$ – ein „L“ aus zwei Rechtecken.
3. $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ Quadrate mit Fläche $\frac{1}{256}$, also $\mathrm{Fl}(T_4) = \frac{120}{256} = \frac{15}{32} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{16})$.
4. Ja: Es ist das einzelne Rechteck $[0, \frac{1}{2}) \times [0,1)$ mit beiden Seiten in $\mathcal{Q}$.

Fragen, Fehler gefunden oder Wünsche für das nächste Blatt? Sprecht mich gern im Tutorium an.
Weitere Materialien, Skizzen zum Anfassen und Wissens-Checks: mirkan-analysis.de/analysis-3.html

WEITER GEHT'S

Jetzt bist du dran:
Teste dein Wissen.

Zu Analysis III gibt es auf meiner Tutoriumsseite einen eigenen Übungsbereich. Nach jeder Antwort steht eine Erklärung, warum sie stimmt oder nicht.

- **Klausurmodus** – Fragen mit Uhr, Auswertung am Ende
- **Zufallsaufgaben** – jedes Mal neue Zahlen
- **Karteikarten** – Begriffe und Sätze, bis sie sitzen

Kostenlos und ohne Anmeldung – einfach QR-Code scannen oder den Link anklicken.

mirkan-analysis.de /analysis-3