Freitag, 11. Februar 2022 15:44

Folgen

Aufgabe

Untersuche die unten stehende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

$$a_n := [(-1)^n + 2]^5 \cdot \frac{n^3+9}{(n^2+n)(n^2-2n)}$$

(1) Gefühl für Folge bekommen:
z.B. $n=10^6$ einsetzen $\rightsquigarrow$ Vermutung: $a_n = NF$

(2) Grenzwert bilden, (*) Grenzwertsätze anwenden (***)
und „größter Wachstumsfaktor" ausklammern (**)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} [(-1)^n+2]^5 \cdot \frac{n^3+9}{n^4-2n^3+n^3-2n^2}$$

$$\overset{(**)}{=} \lim_{n\to\infty} [(-1)^n+2]^5 \cdot \frac{n^3\left(1+\frac{9}{n^3}\right)}{n^4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} \qquad (n^4)$$

Grenzwert-arithmetik (***)

$$= \lim_{n\to\infty} [(-1)^n+2]^5 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{n^3}\right)$$

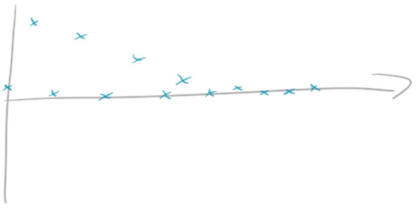
$$\in\{1,3^5\} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(-1)^n+2]^5 \cdot \frac{1}{\infty\cdot 1}$$

$$\in\{1,3^5\} \qquad \rightarrow 0$$

$$= 0$$

also konvergent



Aufgabe

Untersuche die unten stehende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

$$a_n := \frac{5\cdot 8^n - n^7\cdot 3^n}{(n-2^n)(4^n+n^2-1)}$$

1 Gefühl bekommen: $\frac{+\infty}{-\infty} = ?$

2 lim + größter Wachstumsfaktor + umformen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 8^n - n^7\cdot 3^n}{(n-2^n)(4^n+n^2-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{8^n}\left(5 - n^7\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{-\cancel{2^n}\left(-\frac{n}{2^n}+1\right)\cdot\cancel{4^n}\left(1+\frac{n^2}{4^n}-\frac{1}{4^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 - n^7\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n}{(-1)\left(1-\frac{n}{2^n}\right)\left(1+\frac{n^2}{4^n}-\frac{1}{4^n}\right)}$$

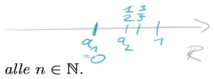
$$\overset{\text{GW-Sätze}}{=} \frac{5 - \lim_{n\to\infty} \overset{\to+\infty}{n^7}\cdot\overset{\to 0}{\left(\frac{3}{8}\right)^n}}{(-1)\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{2^n}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{4^n}-\frac{1}{4^n}\right)}_{\to 1}}$$

$\lim_{n\to\infty} n^7\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$, weil $0<\frac{3}{8}<1$ und $\left(\frac{3}{8}\right)^n \to 0$ exponentiell

$$= \frac{5-0}{(-1)\cdot 1\cdot 1} = \underline{\underline{-5}}$$ also konvergent

Aufgabe (3 + 4 Punkte). *Die reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei rekursiv definiert durch*

$$a_1 := 0 \text{ und } a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}.$$



✓ *a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass* $0 \le a_n \le a_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ *besitzt und berechnen Sie* a.

① Konvergenz zeigen mit Satz

Satz: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolge, (a_n) monoton wachsend (oder fallend) und beschränkt, dann ist (a_n) konvergent

② Zeige also Monotonie:

Folgt aus Aufgabe a)

③ Zeige, Folge ist beschränkt:

Aus a) folgt: $0 \le a_n \quad \forall n$

Wir zeigen: $a_n \le 1 \quad \forall n$

Sei $a_n \in [0,1] \Rightarrow a_{n+1} = 1 - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2+a_n}}_{\in(0,1)}}_{\in(0,1)} \in [2,3]$

Also sind alle $a_n \in [0,1]$.

$\Rightarrow (a_n)$ ist konv. gegen einen GW a

④ Grenzwert der rek. Folge berechnen:

Es gilt: $a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}$, $a_1 = 0$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2+a_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{GW s.}}{=} 1 - \frac{1}{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = 1 - \frac{1}{2+a}$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 - \frac{1}{2+a}$$

Auflösen:

$$\frac{1}{2+a} = 1-a$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (1-a)(2+a) = 2 + a - 2a - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -a^2 - a + 1 = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel, } p = 1,\ q = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+4}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \overset{a\ge 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Nachtrag: Hier Lösung zu Teil a)

a) $a_1 := 0 \quad a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}$

z.z.: $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Induktion)

Beweis:

Ind.anfang: Beh. für $n=1$ zeigen:

$$0 \leq a_1 \leq a_2$$
$$\| \qquad \| \qquad \checkmark$$
$$0 \qquad 1 - \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Ind.voraus.: Beh. gelte für festes $n \in \mathbb{N}$

Ind.schritt: z.z.: Aus „$0 \leq a_n \leq a_{n+1}$" (gegeben) folgt „$0 \underset{(1)}{\leq} a_{n+1} \underset{(2)}{\leq} a_{n+2}$" (gesucht)

(1) klar: $0 \leq a_{n+1}$ laut Ind.vor.

Es bleibt zu zeigen: (2) $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

Umformen:

$$a_{n+1} \leq a_{n+2}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2+a_n} \leq 1 - \frac{1}{2+a_{n+1}} \qquad |-1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2+a_n} \leq -\frac{1}{2+a_{n+1}} \qquad |\cdot(-1)$$

▷ „$\leq$" wechselt zu „$\geq$"

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+a_n} \geq \frac{1}{2+a_{n+1}} \qquad |\cdot(2+a_n)\ |\cdot(2+a_{n+1})$$
$$\Leftrightarrow 2+a_{n+1} \geq 2+a_n$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

ist wahr nach Ind.voraus.,
also ist auch $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ wahr $\square$

Aufgabe

Gib alle Häufungspunkte der reellen Folge

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(2+\frac{n}{n+1}\right)+5(e^{-n}-1)$$

an und bestimme $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Teilfolge

$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$

divergent, aber hat 2 HP: ± 1

$\limsup = -2$ = größter HP

$\liminf = -(3) + (-5) = -8$

= kl. HP

Nachtrag: Hier die Lösung in „sauber":

Fall 1: $n = 2k$ gerade $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$ Teilfolge $a_n = a_{2k} = (-1)^{2k+1} \cdot \left(2+\frac{2k}{2k+1}\right) + 5e^{-2k} - 5$

$\xrightarrow{k\to\infty} (-1)\cdot(2+1) + 5\cdot 0 - 5$

$= -3 - 5 = -8$

d.h. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat HP -8

Fall 2: $n = 2k+1$ ungerade $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$ Teilfolge $a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+2} \cdot \left(2+\frac{2k+1}{2k+2}\right) + 5\cdot e^{-(2k+1)} - 5$

$\xrightarrow{k\to\infty} 1\cdot(2+1) + 5\cdot 0 - 5$

$= 3 - 5 = -2$

d.h. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zweiten HP bei -2

Fazit: a_n hat zwei HP: -2 und -8

Es gilt: $\liminf_{n\to\infty} a_n = -8$ ↑ kleinster HP

und $\limsup_{n\to\infty} a_n = -2$ ↑ größter HP

Reihen

Aufgabe

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+5}$ $\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ (↑ geom. R.) $\Rightarrow$ Maj. Krit. $\Rightarrow$ Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+5}$ konv.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

Konvergenz-Kriterien:

1) Quot. Krit. 2) (Wurzel-Krit.) 3) Leibniz $\sum (-1)^{n+1} \ldots$ 4) Majoranten 5) Minor.

6) (Cauchy-Krit.) 7) Nullfolgen-Krit. + Partialbr. zerl. z.B. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

8) Geometr. Reihe / harmon. Reihe 9) Teleskop-Summe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \ldots = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist div. $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \to +\infty$

andere bekannte Reihen z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

Zu Aufgabe b)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ $= a_n$

Quot. Krit.:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow{(\limsup)\ n\to\infty}$ $< 1 \Rightarrow$ Reihe konv. / $= 1$ keine Aussage / > 1 divergent

(1) Krit. aussuchen $\rightsquigarrow$ Quot. Krit.

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ aufstellen:

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} 2 \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \frac{n+1}{2} \xrightarrow{\limsup\ n\to\infty} +\infty > 1 \Rightarrow \text{Reihe div.}$$

Aufgabe (3 + 4 Punkte). *Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{k+1}(\overbrace{\sqrt[k]{3}-1}^{b_k})}_{a_k}.$$

Satz: Reihe abs. konv. $\Rightarrow$ Reihe konv.

Konvergenz:

(1) Krit. auswählen: Leibniz

(2) Leibniz-Krit. anw., d.h. zeige: $\sqrt[k]{3}-1$ ist Nullf. und monot. fallend

$\rightsquigarrow \lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{3}-1) = \lim_{k\to\infty} 3^{\frac{1}{k}}-1 = 1-1 = \underline{\underline{0}}$

$1<3 \quad (\sqrt[k]{3} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1)$

$\sqrt[k]{3}$ ist monoton f. (hier klar, ansonsten $a_k \geq a_{k+1}$ zeigen)

$\Rightarrow \sqrt[k]{3}-1$ monot. fallend

Leibn.krit. $\Rightarrow$ Reihe konvergent ✓

Absolute Konv: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{k+1}\cdot(\sqrt[k]{3}-1)}_{a_k}$

(1) Bilde $|a_k|$:

$|a_k| = \sqrt[k]{3}-1$

(2) Untersuche $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ auf Konvergenz:

hier: $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{3}-1)$

(2a) Vermutung anstellen

divergent!

(2b) Divergenz zeigen:

Hier: Idee: Minoranten-Krit. probieren.

Welche Reihe als Vergleich nehmen? Idee: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

Ansatz $\Rightarrow \left(\sqrt[k]{3}-1 \overset{?}{\geq} \frac{1}{k}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt[k]{3} \overset{\checkmark}{\geq} \frac{1}{k}+1 \quad | \wedge k$

$\Leftrightarrow 3 \overset{\checkmark}{\geq} \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\lim_{k\to\infty}\ldots = e \approx 2{,}7\ldots}$ ist richtig

Satz: $\lim_{k\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\substack{k=1:\ 2\\ k=2:\ (1+\frac{1}{2})^2}} = e^1$

$\Rightarrow \sqrt[k]{3}-1 \geq \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{3}-1) \geq \sum \frac{1}{k} = +\infty$

$\Rightarrow$ Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{3}-1$ ist divergent

$\Rightarrow$ Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{3}-1)$ ist nicht absolut konv. $\square$

Aufgabe

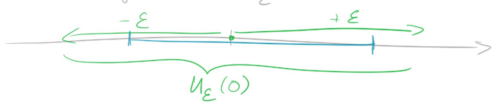
Untersuche, für welche $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge

$$M_n := \left\{ \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \left(-\frac{5}{n}\right)^l \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N} \right\}$$

beschränkt ist und bestimme $\sup M_n$ für diese n.

Exkurs: ↳ Def: Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, wenn es $c, C \in \mathbb{R}$ gibt mit: $c \leq m \leq C \quad \forall m \in M$

Def (alternativ): $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, wenn es $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $U_\varepsilon(0) \supseteq M$



zur Aufgabe: z.z.: M beschränkt

① Prüfen, ob es leicht ist, eine ε-Umgebung um 0 anzugeben, die M enthält. ⇝ Fertig =)

ODER (falls ① nicht klappt)

① Betrag nehmen („mit Lineal messen")

Hier: $\left| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{>0} \cdot \left(-\frac{5}{n}\right)^l \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right| \cdot \left| (-1)^l \right| \left| \left(\frac{5}{n}\right)^l \right|$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\substack{\geq 0 \\ k \to \infty \\ \in [1,2]}} \cdot \left(\frac{5}{n}\right)^l$$

Für $n \geq 5$ ist $\left(\frac{5}{n}\right) \leq 1$ und damit $\left\{ \left(\frac{5}{n}\right)^l \,\middle|\, l \in \mathbb{N} \right\}$ beschränkt.

⇒ M_n ist beschränkt für $n \geq 5$.

Was ist $\sup M_n$ $(n \geq 5)$?

Exkurs: ↳ Def: (sup) „kleinste obere Schranke"

Intuition: „sup = max"

	sup	max	
Bsp: $[0,1]$ ⇝	1	1	
$(0,1)$ ⇝	1	es nicht	

(sup muss nicht in Menge liegen; max muss in Menge liegen)

Satz: M beschr.
⇒ $\sup M < \infty$
$\inf M < \infty$

① Überlege wie größtmögl. Wert in Menge aussehen kann

$\sup \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \left(-\frac{5}{n}\right)^l = (*)$

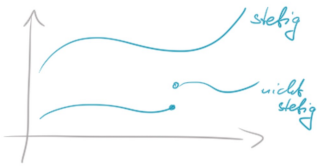
② ggf. Sätze anwenden:

$$(*) = \underbrace{\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\substack{= 2 \\ k=0}} \cdot \sup_{l \in \mathbb{N}} \left(-\frac{5}{n}\right)^l$$

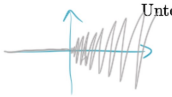
$$= 2 \cdot \sup_{l \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{5}{n}\right)^l}_{\leq 1} = 2 \cdot 1 = 2$$

(für l-gerade ist $-\frac{5}{n} > 0$, sonst < 0) □

Stetigkeit



Aufgabe



Untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Satz:
f glm. stetig
⇒ stetig

Satz:
f Lipschitz-stetig
⇒ f glm. stetig
⇒ f stetig

(1) Vermutung: stetig ja/nein?
hier: stetig ✓

(2) Stetigkeit alles (bis auf krit) Stellen argumentieren
hier: $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist für $x>0$ stetig als Komposition stetiger Fkt.
klar: 0 ist stetig für $x<0$

(3) Kritische Stellen untersuchen:
hier: Prüfe Stelle $x=0$:

(4) Verwende Satz: f stetig in x_0 ⟺ f folgenstetig in x_0

d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

▽ Links- und ○ Rechtss. GW

hier: $f(x)=0$ für $x<0$

(1) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in [-1,1]} = 0$

d.h. $\lim_{x \to 0} f(x) \overset{(1),(2)}{=} 0 = f(0) = f(x_0)$

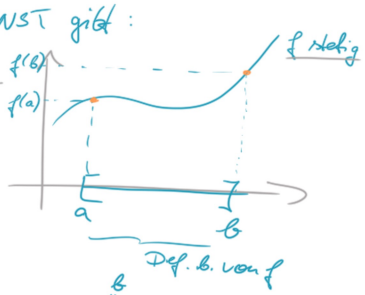
⇒ f folgenstetig in $x_0 = 0$ ⇒ f stetig in x_0
⇒ f stetig (überall) □

Aufgabe (5 Punkte). *Zeigen Sie, dass die Funktion* $f(x) := \sin(x) - e^{-x}$ *im Intervall* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *genau eine Nullstelle besitzt.*

↳ d.h. $f(x_0) = 0$ ← bestimmtes Fkt.wert

① Zeige, dass es (mind.) eine NST gibt:

Verwende Zwischenwertsatz:
bzw. Folgerung daraus:
Folg: f stetig, $a<b$,
$f(a)<0$, $f(b)>0$
$\Rightarrow f$ hat NST in $[a,b]$
(analog: $f(a)>0$, $f(b)<0$)



Berechne also $f(0)$ und $f(\frac{\pi}{2})$:

$f(0) = \sin(0) - e^{0} = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0$

$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \in (0,1)$, $e^{\frac{\pi}{2}} > 1$

ZWS $\Rightarrow f$ hat NST in $[0, \frac{\pi}{2}]$

Zeige, dass es genau eine NST gibt:

① Strategie: Zeige, dass f im Def.bereich streng monoton ist.
hier: z.z: f ist monoton wachsend

② Trick: zeige $f' > 0$
Hier: Klar: f ist diff.bar (als Komp. diff.b. Fkt.en)

$f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{\cos(x)}_{\in[0,1]} + \underbrace{e^{-x}}_{=\frac{1}{e^x}} \overset{!}{>} 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$
≥ 0 $\quad > 0$

$\Rightarrow f$ streng m. wachsend
$\Rightarrow f$ hat genau 1 NST in $[0, \frac{\pi}{2}]$ □

Nachtrag:

Aufgabe Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} a & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin 2x}{\cos x} & \text{falls } x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig auf $[0,\pi]$?

(1) Stetigkeit an unkritischen Stellen argumentieren:
Hier: Für $x \neq \frac{\pi}{2}$ ist $f_a(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}$ stetig als Komposition stetiger Funktionen.

(2) Stetigkeit an kritischen Stellen:
Hier: Es bleibt zu prüfen, für welche $a \in \mathbb{R}$ $f_a(x)$ stetig in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist. (Bem: es kann nur ein $a \in \mathbb{R}$ sein – das „zu erwartende", das wir als nächstes berechnen)

(3) Ansatz: Probieren, folgenstetig in x_0 zu zeigen

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) \underset{x \neq \frac{\pi}{2}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} \leftarrow \text{Situation „}\frac{0}{0}\text{", daher:}$$

entscheidende Idee hier, um Grenzw. ausrechnen zu können → L'Hospital:

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\cos(2x)}{-\sin(x)} \quad \begin{matrix} = \text{Abl. von } \sin(2x) \\ = \text{Abl. von } \cos(x) \end{matrix}$$

$$= \frac{2\cdot\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{2\cdot(-1)}{(-1)} = 2 \overset{!}{=} f(\tfrac{\pi}{2}) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ nur für $a = 2$ ist $f_a(x)$ folgenstetig und damit stetig (in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und damit überall im Def.-B.). □

Differentialrechnung

Aufgabe

Bestimme die erste Ableitung von $f(x) = x^x$.

(1) Trick: $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} \overset{\text{log-Gesetz}}{=} e^{x\cdot\ln(x)}$

(2) Ableiten: $f'(x) = \underbrace{(x\cdot\ln(x))'}_{\text{Kettenr.}} \cdot e^{x\cdot\ln(x)} \overset{\text{log-Gesetz}}{=} (\ln(x)+1)\cdot x^x$

$= (x)'\cdot\ln(x) + x\cdot(\ln(x))'$
$= 1\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}$
$= \ln(x) + 1$

Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$



Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$



i) Zeigen Sie, dass f eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist und berechnen Sie die Ableitung.

ii) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ stetig differenzierbar ist.

iii) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ nicht stetig differenzierbar ist.

Satz: f diff bar $\Rightarrow f$ stetig

i) zuerst: zeige, f ist diff. bar

(1) Argumentiere, dass f in den unkrit. Stellen diffbar ist

Hier: klar 1) $f|_{(-\infty,0)} = 0$ ist diffbar

2) $f|_{(0,+\infty)} = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ist diff. bar als Komposition diff. barer Fkt.en.

(2) kritische Stelle untersuchen „per Hand"

Hier: $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, & h<0 \Rightarrow \text{GW existiert} \\ \lim_{h\to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}_{\in[-1,1]} = 0, & h>0 \Rightarrow \text{existiert} \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ist in $x_0 = 0$ diff bar mit $f'(0) = 0$

Gib Ableitung von f an:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

NR: $\left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)'$

Kettenr. $= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} \cdot \cos(x^{-2})$ ($\sin(x^{-2})$)

$= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

ii) z.z.: $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ ist stetig diff bar, d.h. $f'(x)$ (siehe oben) ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(Algorithmus Stetigkeit)

(1) Unkritische Stellen argumentieren:

klar: $f'|_{(-\infty,0)} \equiv 0$ ist stetig

$f'|_{(0,\infty)} = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

ist stetig als kompos. stetiger Fkt.

$\Rightarrow$ Beh. ✓

(2) nicht notw. ...

iii) z.z.: f ist nicht stetig diff bar

Wegen ii) reicht es zu zeigen: f' ist nicht stetig bei $x_0 = 0$

Algorithmus für nicht stetig

(1) Ansatz mit Folgenstetigkeits-Krit.

z.z.: $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht oder $\lim_{x\to 0} f'(x) \neq \underbrace{f'(0)}_{=0}$

(2) Vereinfache gesuchten Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \Big(\underbrace{2x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\in[-1,1]} - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{-\frac{2}{x}}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\in[-1,1]} \quad \text{existiert nicht,}$$

(3) Begründe, dass GW nicht identisch ist mit zu erwartendem Wert (hier: $f'(0) = 0$)

denn betrachte z.B. Fdge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{x_n} \cdot \cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = \pm\infty$$

$$= -\frac{2}{\left(\frac{2}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}\right) = -n \cdot \cos\left(\frac{n^2}{4}\right)$$

Alternativ wähle Fdge $x_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\sqrt{2\pi n} \cdot \cos(2\pi n)$$

Alternativ wähle Folge $x_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x_n}\cdot\cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = -2\sqrt{2\pi n}\cdot\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \qquad \square$$

Integralrechnung

Aufgabe

Bestimme

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f}\,\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx.$$

(1) Prüfe, welche Integrationsmethode sinnvoll ist:
- a) naheliegendes Integrieren (Umkehrung von Ableiten) wie in Schule
- b) Partielle Integration
- c) Integration d. Substitution } Studium $\int x^2$

Exkurs: Part. Abl.

Produktregel Ableiten: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad | \int \dots$

$$\Rightarrow \int (f\cdot g)' = \int f'g + \int f g'$$

$$\Rightarrow f\cdot g = \int f'g + \int f g' \quad | -\int f'g$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f g' = fg - \int f'g}$$ Partielle Integrationsformel

(2) Partielle Integration

hier: $\int \underbrace{\sin(x)}_{f}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx$

part. Int. $= \underbrace{\sin(x)}_{f}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'}\cdot\sin(x)\,dx \quad (*)$

(3) Trick:

Sei $A := \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$

$$(*) \Rightarrow A = \sin(x)\cdot\sin(x) - A \quad | +A$$

$$\Rightarrow 2A = \sin(x)\cdot\sin(x) \quad | :2$$

$$\Rightarrow A \overset{\text{Def } A}{=} \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(x) + C$$

$\square$

Aufgabe

Bestimme

$$\int_{-\sqrt{\frac{18}{4}}}^{\sqrt{\frac{18}{4}}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

① Prüfe, welche Int. methode geeignet ist:

Hier: Substition

Extra: Winkelfkt.

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

bzw. $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

② Idee für Substitution

Idee: $x(t)=3\cdot\sin(t)$ (*) $\Rightarrow t(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=3\cos(t) \mid \cdot dt$

③ Substituieren:

$\Rightarrow dx=3\cdot\cos(t)\,dt$

$$\int_{\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2(t)}}\,3\cos(t)\,dt$$

$\sin^{-1}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

(*) $x=3\cdot\sin(t) \mid :3$

$\frac{x}{3}=\sin(t) \mid \sin^{-1}$

$\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)=\sin^{-1}(\sin(t))=t$

④ Vereinfachen/ausrechnen

$$=\int_{\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \frac{1}{\sqrt{9(1-\sin^2(t))}}\cdot 3\cos(t)\,dt$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,3\cdot\cos(t)\,dt$$

$\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{\cos^2(x)}=\cos(x)$

$$=\int \frac{1}{\cos(t)}\cdot\cos(t)\,dt$$

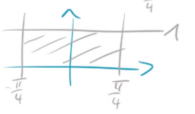
Bem: $\sin^{-1}(x)=\arcsin(x)$

$$=\int_{\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 1\,dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt = 1\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$, denn:

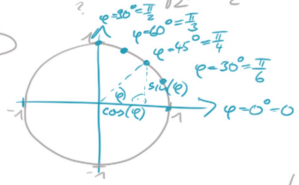
$\sin(\ldots)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

0 $\frac{1}{2}$



$\pi=180°$

Nachtrag:

Aufgabe

Bestimme

$$\int_0^\infty (x-1)e^{-x^2-1+2x}dx.$$

(1) Integrationsmethode wählen:

Hier: Versuchen direkt zu integrieren (welche Fkt F muss ich ableiten, damit $(x-1)\cdot e^{-x^2-1+2x}$ entsteht?)

(2) Umformen

$$(x-1)\cdot e^{-x^2-1+2x} = (x-1)\cdot e^{-(x^2-2x+1)} = (x-1)\cdot e^{-(x-1)^2}$$

(3) Ansatz für Stammfunktion:

erster Versuch:

$$F_1(x) := e^{-(x-1)^2} \rightsquigarrow F'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\left(-(x-1)^2\right)'}_{=(-2)(x-1)} \cdot e^{-(x-1)^2}$$

daher ... muss noch „neutralisiert werden"

Zweiter Versuch:

$$F_2(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-(x-1)^2} \rightsquigarrow F_2'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)(x-1)\cdot e^{-(x-1)^2}$$
$$= (x-1)\cdot e^{-(x-1)^2} \checkmark$$

$\Rightarrow F_2$ ist eine Stammfkt.

(4) Integral mit Hilfe Stammfkt. und Hauptsatz lösen

$$\int_0^\infty (x-1)e^{-(x-1)^2}dx \overset{\text{Trick}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_0^b (x-1)\cdot e^{-(x-1)^2}dx$$

$$\overset{\text{Hauptsatz der Diff.- \& Int.r.}}{=} \lim_{b\to\infty}\left[F_2(x)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-(b-1)^2} - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-(0-1)^2}}_{-\frac{e^{-1}}{2}}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{(b-1)^2}}}_{b\to\infty\ 0} + \frac{e^{-1}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$$