Analysis I – Tutorium

Mini-Klausur

Musterlösungen

Hinweis: Diese Musterlösung ist ausführlich kommentiert und soll insbesondere die zugrunde liegenden Ideen und typische Klausurargumente transparent machen.

Hinweis und Rechtlicher Rahmen

Diese Musterlösung ist **ausführlich kommentiert** und wurde **mehrfach überarbeitet** (inkl. Korrekturdurchläufen). Sie dient ausschließlich dem **Selbststudium** und soll insbesondere die **zugrunde liegenden Ideen** und **typische Klausurargumente** transparent machen. Im Vordergrund stehen nicht nur die Endergebnisse, sondern vor allem die **Gedankenführung**:

- Wie erkennt man einen sinnvollen Ansatz und wie strukturiert man eine Lösung prüfungstauglich?
- Welche Standardbegriffe und Standardbegründungen werden in Analysis I typischerweise erwartet?
- Welche Abschätzungen, Umformungen und Grenzwertargumente sind „klassisch“ und warum?
- Welche alternativen Lösungsskizzen sind möglich, und worin unterscheiden sie sich in Aufwand und Klarheit?

Trotz sorgfältiger Erstellung können **Fehler**, **Ungenauigkeiten** oder **Tippfehler** enthalten sein. Insbesondere können sich an einzelnen Stellen Formulierungen befinden, die didaktisch motiviert sind, aber in einer formalen Abgabe präziser gefasst werden müssten. Es wird daher **keine Gewährleistung** für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernommen; jegliche Nutzung erfolgt **auf eigene Verantwortung**. Im Zweifel sind die Inhalte der Vorlesung, des Übungsbetriebs, die offiziellen Skripte sowie die dort eingeführten Definitionen und Konventionen maßgeblich.

Diese Unterlagen sind als **Lernhilfe** gedacht. Sie ersetzen weder das eigenständige Bearbeiten der Aufgaben noch das aktive Nachvollziehen der Beweise und Zwischenschritte. Es wird ausdrücklich empfohlen, vor dem Lesen der Lösung jeweils selbst einen vollständigen Lösungsweg zu entwerfen und erst anschließend die Musterlösung zum Abgleich heranzuziehen.

Urheberrecht und Nutzung:
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. **Vervielfältigung, Weitergabe, Veröffentlichung** (auch auszugsweise), Bereitstellung in Messenger-Gruppen, Upload auf Webseiten, Lernplattformen oder Cloud-Dienste sowie jede sonstige Verbreitung ist **streng untersagt**, sofern keine **ausdrückliche, vorherige schriftliche Zustimmung** des Erstellers vorliegt. Dies gilt insbesondere auch für Screenshots, Teilabschriften und das Weiterleiten einzelner Seiten.

Ersteller: Mirkan Deniz Günkaya.
Weitergabe nur mit Erlaubnis: Ohne Zustimmung des Erstellers darf dieses Dokument nicht weitervergeben oder anderweitig zugänglich gemacht werden.

Stand: 30.01.2026

Musterlösung zu Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend*, d. h.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Wir lösen die Teilaufgaben nacheinander und halten die logischen Abhängigkeiten explizit fest.

a) f ist injektiv

Ziel: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und es gelte $f(x_1) = f(x_2)$. Wir zeigen $x_1 = x_2$ durch Widerspruch.
Angenommen $x_1 \neq x_2$. Dann gilt entweder $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$.

- Falls $x_1 < x_2$, so folgt aus strenger Monotonie $f(x_1) < f(x_2)$, im Widerspruch zu $f(x_1) = f(x_2)$.
- Falls $x_2 < x_1$, so folgt analog $f(x_2) < f(x_1)$, ebenfalls ein Widerspruch.

Also ist die Annahme $x_1 \neq x_2$ falsch und damit $x_1 = x_2$. Damit ist f injektiv.

Alternative Begründung (Kontraposition): Aus strenger Monotonie folgt unmittelbar

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Also gilt die Kontraposition $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, d. h. Injektivität.

b) Grenzwerte entlang Folgen $x_n \to x$ mit $x_n \in (x, y)$

Hier ist besondere Sorgfalt nötig: Strenge Monotonie allein erzwingt keine Stetigkeit. Monotone (auch streng monotone) Funktionen können Sprungstellen haben. Daher ist die Aussage

$$x_n \to x,\; x_n \in (x, y) \implies f(x_n) \to f(x)$$

im Allgemeinen falsch. Korrekt ist jedoch eine präzise Einseitengrenzwert-Aussage, die in Analysis I typischerweise behandelt wird.

Anmerkung. Gegenbeispiel (zeigt, dass $f(x_n) \to f(x)$ nicht immer stimmt): Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t + 1, & t > 0. \end{cases}$$

Dann ist f streng monoton wachsend, aber an 0 hat f einen Sprung. Wähle $x = 0 < y = 1$ und $x_n = \frac{1}{n} \in (0, 1)$. Dann $x_n \to 0$, aber $f(x_n) = \frac{1}{n} + 1 \to 1 \neq f(0) = 0$.

Korrekte (und klausurnahe) Aussage: Für $x < y$ und jede Folge $(x_n) \subset (x, y)$ mit $x_n \to x$ gilt

$$f(x_n) \longrightarrow f(x+),$$

wobei der *rechtsseitige Grenzwert* definiert ist durch

$$f(x+) \;:=\; \inf\{f(t) : t \in (x, y)\}.$$

(Bei Monotonie ist diese Definition unabhängig vom konkreten $y > x$; man kann ebenso $f(x+) = \inf\{f(t) : t > x\}$ schreiben.)

Beweis der korrekten Aussage $f(x_n) \to f(x+)$: Setze

$$L := \inf\{f(t) : t \in (x, y)\}.$$

Dann gilt für alle n: da $x_n \in (x, y)$, ist $f(x_n)$ Element der Menge und damit

$$L \leq f(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Infimums existiert ein $t_\varepsilon \in (x, y)$ mit

$$L \leq f(t_\varepsilon) < L + \varepsilon.$$

Weil $x_n \to x$ und $t_\varepsilon > x$ fest ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \implies x < x_n < t_\varepsilon.$$

Aus strenger Monotonie folgt dann für $n \geq N$:

$$f(x_n) < f(t_\varepsilon) < L + \varepsilon.$$

Zusammen mit $L \leq f(x_n)$ erhalten wir für $n \geq N$ die Abschätzung

$$L \leq f(x_n) < L + \varepsilon \quad \implies \quad |f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

Damit ist $f(x_n) \to L = f(x+)$ gezeigt.

Wann folgt daraus $f(x_n) \to f(x)$? Genau dann, wenn f in x *rechtsstetig* ist, also $f(x+) = f(x)$. Diese Zusatzannahme ist in Aufgabe 1(b) nicht gegeben; daher ist die ursprüngliche Formulierung ohne Zusatzannahme nicht korrekt.

c) $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend

Ziel: Für $y_1 < y_2$ in $f(\mathbb{R})$ soll $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ gelten.

Seien $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R})$ mit $y_1 < y_2$. Setze

$$x_1 := f^{-1}(y_1), \qquad x_2 := f^{-1}(y_2).$$

Dann gilt per Definition der Umkehrfunktion

$$f(x_1) = y_1, \qquad f(x_2) = y_2.$$

Wir zeigen $x_1 < x_2$ durch Ausschluss der anderen Fälle:

- Falls $x_1 = x_2$, dann wäre $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, Widerspruch zu $y_1 < y_2$.
- Falls $x_1 > x_2$, dann folgt aus strenger Monotonie von f: $f(x_1) > f(x_2)$, also $y_1 > y_2$, Widerspruch.

Somit bleibt nur $x_1 < x_2$. Also ist f^{-1} streng monoton wachsend.

Alternative Begründung (Äquivalenzprinzip): Für streng wachsende f gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Setzt man $x_i = f^{-1}(y_i)$, erhält man unmittelbar $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$, also Monotonie von f^{-1}.

Musterlösung zu Aufgabe 2

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (d. h. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) und nach oben beschränkt. Wir setzen

$$L \;:=\; \sup f(\mathbb{R}) \;=\; \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Warum ist L wohldefiniert?

Zunächst ist $f(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, weil $\mathbb{R} \neq \emptyset$ und somit mindestens ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, also auch $f(x) \in f(\mathbb{R})$. Weiter ist $f(\mathbb{R})$ nach oben beschränkt, da f nach Voraussetzung nach oben beschränkt ist, d. h. es existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $f(\mathbb{R})$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Nach dem **Vollständigkeitsaxiom** (Supremumsaxiom) der reellen Zahlen gilt: *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$. Also existiert $L = \sup f(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}$ und ist damit wohldefiniert.

b) Approximation des Supremums

Behauptung: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L.$$

Beweis: Da $L = \sup f(\mathbb{R})$ eine obere Schranke ist, gilt stets $f(x) \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wäre nun $L - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke von $f(\mathbb{R})$, so würde $L \leq L - \varepsilon$ folgen, ein Widerspruch. Also ist $L - \varepsilon$ *keine* obere Schranke, und es existiert ein $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon.$$

Zusammen mit $f(x_\varepsilon) \leq L$ folgt die Behauptung.

c) Die Mengen A_n und die Folge $x_n = \inf A_n$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > L - \tfrac{1}{n}\}, \qquad x_n := \inf A_n.$$

Vorbereitung (Struktur von A_n): Aus der Monotonie von f folgt: Ist $x \in A_n$ und $y > x$, dann $f(y) \geq f(x) > L - \frac{1}{n}$, also $y \in A_n$. Damit ist A_n eine *obere Menge* (ein „Strahl nach rechts“): sobald ein Punkt in A_n liegt, liegen alle größeren Punkte ebenfalls in A_n.

(c-a) $A_n \neq \emptyset$

Wähle in Teil (b) $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Dann existiert $x_{1/n} \in \mathbb{R}$ mit $f(x_{1/n}) > L - \frac{1}{n}$, also $x_{1/n} \in A_n$. Damit ist $A_n \neq \emptyset$.

Anmerkung zur Wohldefiniertheit von $\inf A_n$*:* Ist $A_n \neq \mathbb{R}$, so existiert ein $z \notin A_n$ mit $f(z) \leq L - \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $x \leq z$ wegen Monotonie $f(x) \leq f(z) \leq L - \frac{1}{n}$, also $x \notin A_n$. Folglich ist z eine untere Schranke von A_n, also ist A_n nach unten beschränkt und $\inf A_n \in \mathbb{R}$ existiert. (Im degenerierten Fall $A_n = \mathbb{R}$ wäre $\inf A_n = -\infty$ in der erweiterten reellen Zahlengeraden; in typischen Klausurkontexten arbeitet man hier jedoch mit dem nicht-degenerierten Fall $A_n \neq \mathbb{R}$.)

(c-b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

Da

$$L - \frac{1}{n+1} \;>\; L - \frac{1}{n},$$

gilt

$$A_{n+1} = \{x : f(x) > L - \tfrac{1}{n+1}\} \subseteq \{x : f(x) > L - \tfrac{1}{n}\} = A_n.$$

Für nichtleere Mengen gilt: Aus $A_{n+1} \subseteq A_n$ folgt $\inf A_{n+1} \geq \inf A_n$. Damit

$$x_{n+1} \;=\; \inf A_{n+1} \;\geq\; \inf A_n \;=\; x_n,$$

also ist (x_n) monoton wachsend.

(c-c) $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ (unter der üblichen Nicht-Maximum-Annahme)

In vielen Klausurargumenten wird hier (implizit) der **nicht-degenerierte Fall** betrachtet, dass L *nicht* als Funktionswert angenommen wird, also

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) < L.$$

Unter dieser Zusatzannahme zeigen wir $x_n \to \infty$.

Schritt 1: Aus der Definition $x_n = \inf A_n$ und der „oberen Mengen"-Eigenschaft folgt:

$$\forall y > x_n : \quad y \in A_n.$$

Begründung: Sei $y > x_n$. Wegen $x_n = \inf A_n$ existiert ein $a \in A_n$ mit $x_n \leq a < y$. Dann $f(y) \geq f(a) > L - \frac{1}{n}$, also $y \in A_n$.

Schritt 2 (Widerspruchsbeweis): Angenommen, (x_n) sei nach oben beschränkt. Dann gibt es $M \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq M$ für alle n. Dann ist für alle n: $M + 1 > x_n$, also nach Schritt 1 gilt $M + 1 \in A_n$. Somit

$$f(M+1) \;>\; L - \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lässt man $n \to \infty$ gehen, erhält man $f(M+1) \geq L$. Da stets $f(M+1) \leq L$ gilt (weil L obere Schranke ist), folgt $f(M+1) = L$, also nimmt f den Wert L an. Das widerspricht der Zusatzannahme $\forall x :\ f(x) < L$. Also ist (x_n) nicht nach oben beschränkt.

Da (x_n) monoton wachsend und nicht nach oben beschränkt ist, folgt

$$x_n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty).$$

Hinweis (Vollständigkeit des Arguments): Der obige Widerspruchsbeweis zeigt zugleich: Falls (x_n) doch nach oben beschränkt wäre, dann würde f tatsächlich ein Maximum L annehmen (und wäre ab einem gewissen Punkt sogar konstant gleich L). Für die im Aufgabenpunkt (c-c) geforderte Divergenz $x_n \to \infty$ betrachtet man daher den üblichen Fall „kein Maximum".

(c-d) $f(x_n) \to L$ für $n \to \infty$

Wir verwenden nun $x_n \to \infty$ aus (c-c) sowie Teil (b).

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Teil (b) existiert ein $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L.$$

Da $x_n \to \infty$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq x_\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen Monotonie von f folgt dann für $n \geq N$:

$$f(x_n) \geq f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon, \qquad \text{und zugleich} \qquad f(x_n) \leq L.$$

Also gilt für $n \geq N$:

$$L - \varepsilon < f(x_n) \leq L \quad \Longrightarrow \quad |f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

Damit ist $f(x_n) \to L$ gezeigt.

Alternative Begründungsskizze: Aus „monoton wachsend und nach oben beschränkt“ folgt, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert und gleich $\sup f(\mathbb{R}) = L$ ist. Kombiniert mit $x_n \to \infty$ ergibt dies unmittelbar $f(x_n) \to L$.

Musterlösung zu Aufgabe 3

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, sowie ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$. Ein Student versucht, die Stetigkeit in x_0 per ε–δ-Beweis zu zeigen und wählt $\delta := \varepsilon$.

a) Unzulässiger Schritt im Beweisentwurf

Der kritische Schritt ist die Schlussfolgerung

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon(\varepsilon + 2|x_0|) < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung $\varepsilon(\varepsilon + 2|x_0|) < \varepsilon$ ist im Allgemeinen *nicht* gerechtfertigt. Denn aus $\varepsilon > 0$ folgt

$$\varepsilon(\varepsilon + 2|x_0|) < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon + 2|x_0| < 1,$$

und diese Bedingung gilt keineswegs für beliebige $\varepsilon > 0$ und beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten: Der Student hat zwar eine Abschätzung der Form

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \cdot (\text{etwas}),$$

aber er kontrolliert den Faktor (etwas) $= |x + x_0|$ (bzw. seine Schranke) nicht so, dass er ≤ 1 wäre.

b) Warum reicht die Wahl $\delta = \varepsilon$ nicht aus?

Das Problem ist, dass die Größe

$$|x + x_0|$$

nicht allein durch $|x - x_0| < \delta$ (mit $\delta = \varepsilon$) hinreichend klein gemacht wird: Auch wenn x sehr nahe bei x_0 liegt, kann $x + x_0$ (insbesondere bei großem $|x_0|$) sehr groß sein. Die Rechnung des Studenten liefert lediglich

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon \cdot (\varepsilon + 2|x_0|),$$

und der rechte Ausdruck ist im Allgemeinen *nicht* kleiner als ε. Beispielhaft: Wähle $x_0 = 10$ und $\varepsilon = 0{,}1$. Dann ist

$$\varepsilon(\varepsilon + 2|x_0|) = 0{,}1(0{,}1 + 20) = 2{,}01 > \varepsilon.$$

Damit sieht man konkret: $\delta = \varepsilon$ kontrolliert zwar $|x - x_0|$, aber nicht den zweiten Faktor $|x + x_0|$ so, dass das Produkt $\leq \varepsilon$ erzwungen wird.

c) Vollständiger klausurnaher ε–δ-Beweis (mit explizitem $\delta(\varepsilon)$)

Behauptung: $f(x) = x^2$ ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen

$$\delta(\varepsilon) := \min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\Big\}.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|.$$

Wir schätzen den zweiten Faktor ab mittels Dreiecksungleichung:

$$|x + x_0| = |(x - x_0) + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta(\varepsilon) + 2|x_0| \leq 1 + 2|x_0|.$$

Damit folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta(\varepsilon)\,(2|x_0| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\,(2|x_0| + 1) = \varepsilon.$$

Also gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt. Damit ist f in x_0 stetig.

Alternative Lösungsskizze (gleiche Idee, anderer Blickwinkel): Man kann auch zuerst $|x|$ in der δ-Umgebung kontrollieren: Aus $|x - x_0| < 1$ folgt $|x| \leq |x_0| + 1$. Dann

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0|\,(|x| + |x_0|) \leq |x - x_0|\,(2|x_0| + 1),$$

und man wählt wieder $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$.

Musterlösung zu Aufgabe 4

a) Zwei voneinander unabhängige Fehler / unzulässige Schlussfolgerungen

Der Beweisentwurf lautet sinngemäß: Aus $x_n \to x_0$ folge, dass $\big(f(x_n)\big)$ eine (Teil-)Grenzwertstruktur besitzt, man wähle eine konvergente Teilfolge $f(x_{n_k}) \to L$, und aus $x_{n_k} \to x_0$ folge dann $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, also $L = f(x_0)$. Daraus schließe man $f(x_n) \to f(x_0)$ und damit Stetigkeit.

Zwei **unabhängige** Fehler sind:

1) **Bolzano–Weierstraß wird ohne Beschränktheit angewendet.** Der Student benutzt: „Jede *beschränkte* Folge besitzt eine konvergente Teilfolge“ und springt dann direkt zu „wir betrachten eine Teilfolge $\big(f(x_{n_k})\big)$, die konvergiert“. Dazu müsste aber zunächst gezeigt werden, dass die Folge $\big(f(x_n)\big)$ überhaupt *beschränkt* ist. Aus $x_n \to x_0$ folgt nur die Beschränktheit von (x_n), nicht aber die von $\big(f(x_n)\big)$, wenn über f keine Zusatzannahmen (wie Stetigkeit oder lokale Beschränktheit) gemacht wurden.

2) **Der Schritt $x_{n_k} \to x_0 \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ ist zirkulär.** Genau diese Implikation ist der *sequentielle Stetigkeitsbegriff* in x_0. Sie ist im Allgemeinen *nicht* aus $x_{n_k} \to x_0$ ableitbar, sondern entspricht bereits dem zu beweisenden Ziel („f ist stetig in x_0“). Der Beweis benutzt also die gewünschte Aussage als Voraussetzung.

Zusatzbemerkung (optional): Auch der spätere Schluss „weil jede konvergente Teilfolge denselben Grenzwert $f(x_0)$ haben muss, konvergiert die ganze Folge“ wäre ohne eine *gesicherte* Existenz konvergenter Teilfolgen (z. B. via Beschränktheit) nicht tragfähig; ansonsten kann die Aussage „jede konvergente Teilfolge hat Grenzwert $f(x_0)$“ sogar trivial wahr sein, obwohl die Folge divergiert (weil dann gar keine konvergenten Teilfolgen existieren).

b) Beweis der Aussage: Sequentielle Stetigkeit ⇒ Stetigkeit

Zu zeigen: Wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x_0)$, dann ist f stetig in x_0.

Beweis (Kontraposition, klausurnah): Wir zeigen die Kontraposition: Wenn f *nicht* stetig in x_0 ist, dann existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Angenommen, f ist in x_0 nicht stetig. Dann gilt nach Definition der Nicht-Stetigkeit:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x \in \mathbb{R} : \;\; |x - x_0| < \delta \;\;\text{ und }\;\; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ den speziellen Wert $\delta := \frac{1}{n}$. Dann gibt es (abhängig von n) ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Aus $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ folgt unmittelbar $x_n \to x_0$.

Gleichzeitig kann $\big(f(x_n)\big)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren: Denn wäre $f(x_n) \to f(x_0)$, so gäbe es zu $\varepsilon_0 > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ für alle $n \geq N$, im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ für *alle* n.

Damit ist die Kontraposition bewiesen. Folglich ist die ursprüngliche Aussage wahr: Gilt für jede Folge $x_n \to x_0$ stets $f(x_n) \to f(x_0)$, dann ist f stetig in x_0. □

Musterlösung zu Aufgabe 5

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und (a_n) sei nach unten beschränkt. Setze

$$\alpha := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Approximation des Infimums

Zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha \leq a_n < \alpha + \varepsilon.$$

Beweis direkt aus der Infimumsdefinition: Da $\alpha = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt, ist α eine *untere Schranke* der Menge $\{a_n\}$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha \leq a_n.$$

Fixiere nun $\varepsilon > 0$. Wir behaupten, dass $\alpha + \varepsilon$ *keine* untere Schranke der Menge $\{a_n\}$ ist. Denn wäre $\alpha + \varepsilon$ eine untere Schranke, so wäre auch $\alpha + \varepsilon \leq a_n$ für alle n, also wäre $\alpha + \varepsilon$ eine untere Schranke, die *größer* als α ist. Das widerspricht der Charakterisierung des Infimums als *größte* untere Schranke.

Folglich ist $\alpha + \varepsilon$ keine untere Schranke, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n < \alpha + \varepsilon.$$

Zusammen mit $\alpha \leq a_n$ folgt

$$\alpha \leq a_n < \alpha + \varepsilon.$$

□

b) (a_n) ist eine Cauchy-Folge; explizites $N(\varepsilon)$

Zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N(\varepsilon).$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\alpha \leq a_{N(\varepsilon)} < \alpha + \varepsilon$$

(gemäß Teil (a); z. B. kann man $N(\varepsilon)$ als das kleinste n mit $a_n < \alpha + \varepsilon$ definieren).

Seien nun $m, n \geq N(\varepsilon)$. Ohne Einschränkung sei $m \geq n$. Wegen Monotonie gilt

$$a_m \leq a_n \leq a_{N(\varepsilon)}.$$

Insbesondere ist dann

$$|a_m - a_n| = a_n - a_m.$$

Außerdem gilt wegen $\alpha \leq a_m$:

$$a_n - a_m \leq a_{N(\varepsilon)} - \alpha.$$

Damit erhalten wir

$$|a_m - a_n| = a_n - a_m \leq a_{N(\varepsilon)} - \alpha < (\alpha + \varepsilon) - \alpha = \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge. □

c) Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen α

Wir zeigen zunächst $a_n \to \alpha$; daraus folgt die Behauptung sofort, da jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Behauptung: $a_n \to \alpha$.

Beweis: Da α untere Schranke ist, gilt $\alpha \le a_n$ für alle n, also

$$\alpha \le \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N < \alpha + \varepsilon$ (Teil (a)). Da (a_n) monoton fallend ist, gilt für alle $n \ge N$:

$$a_n \le a_N < \alpha + \varepsilon.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \alpha + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \alpha.$$

Somit

$$\alpha \le \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \le \alpha,$$

also existiert der Grenzwert und es gilt $a_n \to \alpha$.

Damit folgt für jede Teilfolge (a_{n_k}) unmittelbar $a_{n_k} \to \alpha$. □

Alternative Begründungsskizze: Eine Teilfolge einer monoton fallenden Folge ist ebenfalls monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergiert sie. Ihr Grenzwert muss wegen $\alpha \le a_{n_k}$ und der Approximations-Eigenschaft aus (a) ebenfalls α sein.

d) Beispiel, bei dem α kein Folgenglied ist

Ein Standardbeispiel ist

$$a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = a_n$, also ist (a_n) monoton fallend. Außerdem ist die Folge nach unten beschränkt, etwa durch 0, und es gilt

$$\alpha = \inf\Big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\Big\} = 0.$$

Dabei ist 0 *kein* Folgenglied, denn $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Musterlösung zu Aufgabe 6

Betrachtet wird die Folge

$$x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Fehleranalyse (mindestens vier Punkte)

Im Beweisentwurf finden sich u. a. die folgenden Fehler, Ungenauigkeiten bzw. unzulässigen Schritte:

1) **„Offensichtlich wird der Abstand kleiner“** ist keine Begründung. Aus einer Intuition folgt nicht automatisch Monotonie bzw. Grenzwertverhalten; es fehlt ein mathematisches Argument.

2) **„offensichtlich monoton fallend“** ist unbegründet. Wenn Monotonie verwendet werden soll, muss $x_{n+1} \leq x_n$ (oder ein äquivalentes Argument) gezeigt werden.

3) **Unvollständigkeit:** Aus „$x_n > 0$ und monoton fallend“ folgt zwar (mit dem Hinweis „nach unten durch 0 beschränkt“) die Existenz eines Grenzwerts, aber *nicht*, dass der Grenzwert gleich 0 ist. Der Beweis behauptet $x_n \to 0$, ohne 0 als Grenzwert tatsächlich herzuleiten.

4) **Echter mathematischer Fehler (Algebra / Rationalisieren):** Es gilt

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

nicht aber $\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. Im Entwurf steht im Nenner fälschlich wieder $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ statt $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

5) **Echter mathematischer Fehler (falsche Abschätzung):** Aus der falschen Umformung entsteht $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, was sogar *groß* wäre (da $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$). Damit kann man nicht sinnvoll zeigen, dass der Ausdruck $< \varepsilon$ wird.

6) **Fehler/Unschärfe bei der Wahl von N:** Für das ε-Kriterium muss $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sein; $N := 1/\varepsilon$ ist i. A. keine natürliche Zahl. Außerdem ist (selbst bei korrekter Umformung) eine Wahl der Größenordnung $1/\varepsilon$ zu schwach; korrekt ist eine Wahl der Größenordnung $1/\varepsilon^2$.

b) Korrekter Beweis: $x_n \to 0$ mit explizitem $N(\varepsilon)$

Wir rationalisieren korrekt:

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Damit gilt für alle $n \geq 1$:

$$0 < x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

weil $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$.

Da $\frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt aus dem Sandwich-Lemma bereits $x_n \to 0$.

ε-Beweis mit expliziter Wahl $N(\varepsilon)$: Sei $\varepsilon > 0$. Setze

$$N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon^2} \right\rceil \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$:

$$x_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N(\varepsilon)}}.$$

Aus $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{4\varepsilon^2}$ folgt $\sqrt{N(\varepsilon)} \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, also

$$\frac{1}{2\sqrt{N(\varepsilon)}} \leq \varepsilon.$$

Damit erhalten wir für alle $n \geq N(\varepsilon)$:

$$|x_n - 0| = x_n \leq \varepsilon.$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Alternative Lösungsskizze (optional, über den Mittelwertsatz): Für $g(x) = \sqrt{x}$ existiert zu jedem n ein $c_n \in (n, n+1)$ mit

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = g'(c_n) \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{c_n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Musterlösung zu Aufgabe 7

Wir betrachten die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n := \frac{n}{2^n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

1. **Konvergenzradius.**

   Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum a_n z^n$ gilt

   $$\frac{1}{R} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

   Hier ist

   $$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} \;=\; \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

   da $\sqrt[n]{n} \to 1$. Also

   $$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad R = 2.$$

   Damit konvergiert die Potenzreihe absolut für $|z| < 2$ und divergiert für $|z| > 2$.

2. **Konvergenzverhalten für $z = 2,\ -2,\ 2i$.**

   - Für $z = 2$ gilt

     $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

     Die Glieder n gehen nicht gegen 0, also divergiert die Reihe (insbesondere nicht absolut konvergent).

   - Für $z = -2$ gilt

     $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n.$$

     Auch hier ist $|n(-1)^n| = n \not\to 0$. Daher divergiert die Reihe (weder konvergent noch absolut konvergent).

   - Für $z = 2i$ gilt

     $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (2i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, (2i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, i^n.$$

     Wieder ist $|ni^n| = n \not\to 0$. Also divergiert die Reihe (weder konvergent noch absolut konvergent).

3. **(Trick: Cauchy-Produkt) Identität für $|z| < 2$.**

   Setze

   $$b_n := \left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad (n \geq 1).$$

   Für $|z| < 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, denn

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{2}\right|^n$$

   ist eine geometrische Reihe mit Quotienten $|z|/2 < 1$. Daher ist das Cauchy-Produkt wohldefiniert und liefert (Cauchy-Produktsatz)

   $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, b_{n-k}\right).$$

Für jedes feste $n \geq 2$ gilt

$$b_k \, b_{n-k} = \left(\frac{z}{2}\right)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k \, b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^n = (n-1)\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Damit folgt für $|z| < 2$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} \, z^n.$$

Dies ist genau die geforderte Identität.

(Optionaler Check via geschlossener Form): Für $|z| < 2$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (z/2)^n = \frac{z}{2-z}$, also ist die linke Seite gleich $\left(\frac{z}{2-z}\right)^2$, was mit der rechten Seite konsistent ist.

□

Musterlösung zu Aufgabe 8

Wahr/Falsch (mit kurzer Begründung in der Musterlösung). In der Klausur war keine Begründung gefordert; hier notieren wir die zentralen Argumente bzw. Gegenbeispiele.

Aussage	**W**	**F**
(1) $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0 \Rightarrow (a_n)$ konvergiert.		✓
(2) $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.		✓
(3) Es gibt eine bedingt konvergente Reihe, deren *jede* Umordnung konvergiert.		✓
(4) Für jede Folge gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$.		✓
(5) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge mit $\liminf a_n \leq L \leq \limsup a_n$.	✓	
(6) Ist $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ monoton und stetig, so besitzt f in jedem Punkt endliche einseitige Grenzwerte.	✓	
(7) Ist $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.	✓	
(8) f ist differenzierbar in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert endlich.	✓	
(9) Punktweise Grenzwert einer gleichmäßig beschränkten, gleichgradig stetigen Folge stetiger Funktionen ist stetig.	✓	
(10) Ist $K\subset\mathbb{R}$ nichtleer und kompakt, so existieren $\min K$ und $\max K$ als Elemente von K.	✓	

Kurze Begründungen / Gegenbeispiele

(1) Falsch. Gegenbeispiel: $a_n = \log n$ (oder $a_n = \sqrt{n}$). Dann gilt

$$a_{n+1} - a_n = \log(n+1) - \log n = \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

aber $a_n \to \infty$, also keine Konvergenz.

(2) Falsch. Gegenbeispiel ("Spikes"): Definiere

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & n = 2^k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $a_n \geq 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad \text{(konvergent)},$$

aber für $n = 2^k$ gilt $n a_n = 2^k \cdot 2^{-k} = 1$, also $\lim_{n\to\infty} n a_n \neq 0$.

(3) Falsch. In $\mathbb{R}$ gilt: *Unbedingte Konvergenz* (Konvergenz unter jeder Permutation) ist äquivalent zu *absoluter* Konvergenz. Insbesondere kann eine nicht absolut konvergente Reihe nicht unter *jeder* Umordnung konvergieren. (Äquivalent kann man auch auf den Umordnungssatz von Riemann verweisen.)

(4) Falsch. Allgemein gilt stets $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ (nicht umgekehrt).

(5) Wahr. Bolzano–Weierstraß: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Für jeden Häufungswert L gilt außerdem $\liminf a_n \leq L \leq \limsup a_n$.

(6) Wahr. Monotone Funktionen besitzen in jedem inneren Punkt $x_0 \in (0,1)$ die einseitigen Grenzwerte

$$f(x_0-) := \sup_{x<x_0} f(x), \qquad f(x_0+) := \inf_{x>x_0} f(x),$$

und diese sind (in $\mathbb{R}$) endlich, da sie zwischen Funktionswerten in einer Umgebung von x_0 liegen. (Stetigkeit ist hierfür nicht einmal nötig.)

(7) Wahr. Eine stetige injektive Funktion auf einem Intervall ist streng monoton. Begründungsskizze: Wäre f nicht monoton, gäbe es $x_1 < x_2 < x_3$ mit z. B. $f(x_1) < f(x_2)$ und $f(x_2) > f(x_3)$. Dann liefert der Zwischenwertsatz zwei verschiedene Stellen mit demselben Funktionswert, im Widerspruch zur Injektivität.

(8) Wahr. Das ist genau die Definition der Differenzierbarkeit in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}.$$

(9) Wahr. Gleichgradige Stetigkeit (Equicontinuity) und gleichmäßige Beschränktheit erlauben via Arzelà–Ascoli, dass jede Teilfolge eine gleichmäßig konvergente Teil-Teilfolge besitzt; deren Grenzwert ist stetig. Da die gesamte Folge punktweise gegen f konvergiert, muss jeder solche gleichmäßige Grenzwert mit f übereinstimmen, also ist f stetig (tatsächlich folgt sogar gleichmäßige Konvergenz der ganzen Folge).

(10) Wahr. In $\mathbb{R}$ ist „kompakt“ äquivalent zu „abgeschlossen und beschränkt“. Nichtleere kompakte Mengen besitzen Minimum und Maximum (Extremwert-Eigenschaft), also existieren $m, M \in K$ mit $m = \min K$ und $M = \max K$.

Musterlösung zu Aufgabe 9 (Bonus)

a) Warum garantieren „viele bestätigende Beispiele“ in der Analysis keine allgemeine Wahrheit?

In der Analysis sind Aussagen häufig *All-Aussagen* der Form

$$\forall x \in D : \ P(x),$$

also Behauptungen, die für *alle* zulässigen Objekte x (z. B. alle reellen Zahlen, alle Folgen, alle Funktionen mit bestimmten Eigenschaften) gelten sollen. „Viele bestätigende Beispiele“ prüfen jedoch immer nur *endlich viele* Fälle, d. h. man verifiziert $P(x)$ nur für eine endliche Teilmenge $x_1, \ldots, x_m$. Daraus folgt logisch keine Aussage über alle übrigen (unendlich vielen) Fälle.

Gerade in der Analysis ist die Gefahr groß, weil:

- Eigenschaften können an *einzelnen* Punkten oder auf *sehr dünnen* Mengen scheitern (z. B. an einem Punkt, auf einer abzählbaren Menge, auf einer Menge vom Maß 0 etc.), obwohl sie „fast überall“ zutreffen.
- Es existieren viele „pathologische“ Objekte (sprunghafte monotone Funktionen, überall unstetige Funktionen mit Zusatzstruktur usw.), die Intuition und Beispieltests leicht täuschen.

Konsequenz: Beispiele sind wertvoll zur *Ideenbildung* und zum *Testen von Vermutungen*, ersetzen aber keinen Beweis.

b) Logischer Kern: Warum reicht ein einziges Gegenbeispiel zur Widerlegung einer All-Aussage?

Eine All-Aussage hat die logische Form

$$\forall x \in D : \ P(x).$$

Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn *kein* $x \in D$ existiert, für das $P(x)$ falsch ist. Die Negation einer All-Aussage lautet:

$$\neg\Big(\forall x \in D : \ P(x)\Big) \iff \exists x \in D : \ \neg P(x).$$

Das bedeutet: Um eine All-Aussage zu widerlegen, genügt es, *ein einziges* $x_0 \in D$ zu finden mit

$$\neg P(x_0),$$

also ein Gegenbeispiel. Denn dann ist die Behauptung „für alle x gilt $P(x)$“ bereits falsch.

c) Beispiel: Quantorwechsel macht eine wahre Aussage falsch (mit Erklärung)

Ein klassisches Beispiel aus der Analysis ist die Stetigkeitsdefinition in einem Punkt x_0. Für eine Funktion f lautet Stetigkeit in x_0 korrekt:

$$(\star) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Vertauscht man die Quantoren $\forall \varepsilon$ und $\exists \delta$, erhält man:

$$(\star\star) \qquad \exists \delta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Effekt des Quantorwechsels:

- In $(\star)$ darf δ von ε abhängen: Für kleinere Toleranz ε wählt man typischerweise ein kleineres $\delta(\varepsilon)$.
- In $(\star\star)$ müsste ein *einziges* $\delta > 0$ gleichzeitig für *alle* $\varepsilon > 0$ funktionieren. Das ist extrem stark.

Warum wird $(\star\star)$ (fast immer) falsch? Falls $(\star\star)$ gilt, dann gilt insbesondere für jedes x mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Das ist nur möglich, wenn

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

für alle $|x - x_0| < \delta$. Also würde $(\star\star)$ bedeuten: f ist in einer ganzen Umgebung von x_0 konstant. Damit ist $(\star\star)$ im Allgemeinen falsch, selbst wenn f stetig ist.

Konkretes Gegenbeispiel: Sei $f(x) = x$ und $x_0 = 0$. Dann ist f stetig, also $(\star)$ wahr. Aber $(\star\star)$ wäre: $\exists \delta > 0$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle $|x| < \delta$ gilt $|x| < \varepsilon$. Wähle dann z. B. $x = \delta/2$ und $\varepsilon = \delta/4$. Dann ist $|x| = \delta/2 \not< \delta/4 = \varepsilon$. Widerspruch. Also ist $(\star\star)$ falsch.

Alternative (rein logisches) Beispiel: Wahr ist:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; x < n \quad \text{(Archimedische Eigenschaft).}$$

Nach Quantorwechsel erhält man:

$$\exists n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R} : \; x < n,$$

was falsch ist (kein festes n ist größer als *alle* reellen Zahlen). Hier sieht man besonders klar: Der Quantorwechsel verändert die Aussage drastisch.

d)Je ein Beispiel: (i) wahr, aber nicht trivial; (ii) falsch, aber plausibel.

(i) Wahr, aber nicht trivial: „Jede monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert." *Begründung in einem Satz:* Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Existenz von Supremum/Infimum und daraus Konvergenz.

(ii) Falsch, aber plausibel klingend: „Wenn $a_n \to 0$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$." *Begründung in einem Satz:* Zwar ist $a_n \to 0$ notwendig, aber nicht hinreichend (Gegenbeispiel: harmonische Reihe $a_n = \frac{1}{n}$).

e)Zwei Aussagen, die sich nur in einem Wort/Quantor unterscheiden, aber völlig anders sind.

Beispiel:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(*Stetigkeit in* x_0)

versus

$$\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die zweite Aussage ist extrem stark: Wenn für ein festes δ sogar *für alle* $\varepsilon > 0$ die Ungleichung gilt, dann muss in der δ-Umgebung sogar $|f(x) - f(x_0)| = 0$ gelten, also $f(x) = f(x_0)$ für alle $|x - x_0| < \delta$. Das beschreibt lokale Konstanz, nicht bloß Stetigkeit.

Warum gravierend? Die Reihenfolge der Quantoren entscheidet, *wer von wem abhängen darf* (hier: δ darf von ε abhängen). Das ist der Kern vieler typischer Fehler in ε–δ-Argumenten.

f)Menge $A \subset \mathbb{R}$: oben beschränkt ohne Maximum; Supremum nicht in A.

Nehmen Sie

$$A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}.$$

Dann ist A nach oben beschränkt (z. B. durch 1), aber besitzt kein Maximum, denn $1 \notin A$ und für jedes $a \in A$ gilt $a < 1$ und man findet ein noch größeres Element aus A, z. B. $\frac{a+1}{2} \in A$.

Außerdem gilt

$$\sup A = 1,$$

und dieses Supremum liegt *nicht* in A.

Zusammenhang: „Kein Maximum“ bedeutet: Es gibt kein größtes Element in A. „Supremum nicht in A“ ist ein typischer Grund dafür: Das Supremum ist zwar die kleinste obere Schranke, aber es wird nicht notwendigerweise angenommen.

g)Folgenbeispiele: beschränkt nicht konvergent; zwei Häufungswerte; unbeschränkt mit konvergenter Teilfolge.

(i) Beschränkt, aber nicht konvergent: $a_n := (-1)^n$. (beschränkt durch -1 und 1, oszilliert.)

(ii) Zwei verschiedene Häufungswerte: $a_n := (-1)^n$ hat Häufungswerte 1 und -1. (z. B. Teilfolge $a_{2k} = 1$, Teilfolge $a_{2k-1} = -1$.)

(iii) Unbeschränkt, besitzt aber konvergente Teilfolge:

$$a_n := \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann ist (a_n) unbeschränkt (wegen gerader n), aber die Teilfolge (a_{2k-1}) ist konstant 0 und konvergiert gegen 0.

h)Funktionenbeispiele: (i) stetig nicht diff.; (ii) diff. aber f' nicht stetig; (iii) beschränkt ohne globales Maximum.

(i) Stetig, aber nicht differenzierbar an einer Stelle: $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber in 0 nicht differenzierbar (linksseitige Ableitung -1, rechtsseitige Ableitung $+1$).

(ii) Differenzierbar, aber f' nicht stetig:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann existiert $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(1/h^2) = 0$, also ist f in 0 differenzierbar. Für $x \neq 0$ ist f glatt, aber $f'(x)$ enthält einen Term

$$-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

der für $x \to 0$ nicht gegen 0 geht (sogar unbeschränkt oszilliert). Also ist f' in 0 nicht stetig.

(iii) Auf $\mathbb{R}$ beschränkt, aber kein globales Maximum: $f(x) = \arctan(x)$ ist beschränkt (Wertebereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), aber nimmt $\frac{\pi}{2}$ nicht an, also besitzt f kein Maximum.

i)Stetigkeit in x_0: ε–δ-Definition und Folgencharakterisierung. Warum äquivalent?

ε–δ-Definition: f heißt stetig in x_0, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Folgencharakterisierung: f heißt stetig in x_0, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Warum inhaltlich dasselbe? (1–2 Sätze): Die ε–δ-Definition kontrolliert $f(x)$ für *alle* x hinreichend nahe bei x_0, während die Folgencharakterisierung dieselbe Nähe über beliebige Annäherungsfolgen kodiert. Beide beschreiben also, dass *kleine Änderungen in x nahe x_0* nur *kleine Änderungen in $f(x)$* erzeugen.

j)Reihenbeispiele: (i) $a_n \to 0$, aber Reihe divergiert; (ii) konvergent aber nicht absolut; (iii) absolut konvergent.

(i) $a_n \to 0$**, aber** $\sum a_n$ **divergiert:** $a_n = \frac{1}{n}$. Stichwort: harmonische Reihe divergiert.

(ii) $\sum a_n$ **konvergiert, aber** $\sum |a_n|$ **divergiert:** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Stichwort: Leibniz-Kriterium (alternierende Reihe), aber $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

(iii) Absolut konvergent: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Stichwort: geometrische Reihe (Quotient < 1).

k)Potenzreihen mit Konvergenzradius $R = 1$ und $R = 2$.

Beispiel $R = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n.$$

Stichwort: geometrische Potenzreihe; konvergiert genau für $|x - x_0| < 1$.

Beispiel $R = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x - x_0)^n.$$

Stichwort: geometrische Reihe mit Quotient $\frac{x-x_0}{2}$; konvergiert genau für $|x - x_0| < 2$.

Woran erkennt man den Radius? Bei geometrischen Reihen ist der Radius direkt durch $|q| < 1$ gegeben. Allgemein liefert Wurzel- oder Quotientenkriterium:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

l)Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit; Beispiel.

Stetigkeit auf I: Für jedes $x_0 \in I$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hier darf δ von x_0 abhängen.

Gleichmäßige Stetigkeit auf I:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I : \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Hier muss *ein einziges* δ für *alle* Punkte funktionieren.

Beispiel (stetig, aber nicht gleichmäßig stetig):

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{auf } I = (0, 1).$$

f ist auf $(0, 1)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, weil $f(x)$ nahe 0 extrem schnell wächst: Man kann x und y sehr nahe beieinander wählen (also $|x - y|$ klein), aber $|1/x - 1/y|$ dennoch beliebig groß machen, wenn beide sehr klein sind.

m)Typische Pläne/Strategien (Stichpunkte) in Analysis I.

(i) Grenzwert einer Folge $a_n \to a$ zeigen:

- Definition hinschreiben: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$.
- Umformen/abschätzen, bis eine Bedingung der Form $n \geq N(\varepsilon)$ genügt.
- $N(\varepsilon)$ explizit wählen (typisch: Ungleichung lösen).

(ii) Divergenz einer Reihe $\sum a_n$ zeigen:

- Notwendig: $a_n \to 0$ prüfen (wenn nicht, divergiert sofort).
- Geeignetes Kriterium wählen: Vergleich, Quotient, Wurzel, Integraltest, Majorante/-Minoration.
- Bei Grenzfällen: Partialsummen untersuchen oder mit bekannter divergenter Reihe vergleichen.

(iii) Stetigkeit von f in x_0 nachweisen:

- ε–δ-Definition aufschreiben.
- $|f(x) - f(x_0)|$ algebraisch umformen und durch $|x - x_0|$ kontrollieren.
- Ggf. Nebenbedingung wie $|x - x_0| < 1$ hinzufügen, um Terme zu beschränken.
- $\delta(\varepsilon)$ so wählen, dass am Ende $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt.

(iv) Gleichmäßige Stetigkeit zeigen/widerlegen:

- Zeigen: *ein* $\delta(\varepsilon)$ finden, das für alle $x, y \in I$ funktioniert (kein Bezug auf einen speziellen Punkt).
- Widerlegen: Eine feste $\varepsilon_0 > 0$ wählen und zu jedem $\delta > 0$ passende x, y konstruieren mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.
- Typischer Trick: x, y in einer Problemzone wählen (z. B. nahe Randstelle, nahe Unendlichkeit, nahe Singularität).

(v) Gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ zeigen:

- Ziel: $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.
- Abschätzung suchen, die *nicht* von x abhängt: $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n$ für alle x.
- Dann $M_n \to 0$ zeigen (oder Weierstraß-M-Test bei Reihen von Funktionen).

(vi) Cauchy-Kriterium für Folgen nutzen:

- Definition: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N:\ |a_m - a_n| < \varepsilon$.
- Häufig: $|a_m - a_n|$ durch Teleskopsumme/Abschätzung kontrollieren.
- In $\mathbb{R}$: Cauchy $\Rightarrow$ konvergent (Vollständigkeit).

(vii) Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen und Randpunkte prüfen:

- Potenzreihe $\sum c_n (x - x_0)^n$: Wurzel- oder Quotientenkriterium auf $|c_n (x - x_0)^n|$ anwenden.
- Radius R finden (typisch über $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ oder $\lim |c_{n+1}/c_n|$).
- Danach *immer* Randpunkte $|x - x_0| = R$ separat prüfen (da Kriterien dort oft nicht entscheiden).