LMU

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. PETER MÜLLER

Skript zur Vorlesung

Analysis I

Analysis einer Variablen

Wintersemester 2019/20

LaTeX-Aufbereitung durch
Michael Aichmüller

Version vom
7. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1

Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

1.1 Axiom *Eine (mathematische)* ***Aussage*** *A ist eine Schilderung eines Sachverhalts, der* $\underline{\textit{entweder}}$ *wahr ($A \asymp w$)* $\underline{\textit{oder}}$ *falsch ($A \asymp f$) ist. Dies wird als* ***2-wertige Logik*** *oder auch* ***Bivalenzprinzip*** *bezeichnet.*

1.2 Beispiel

$A \;:\Longleftrightarrow$ nach Dienstag kommt Mittwoch („$:\Longleftrightarrow$" definiert linke Seite durch rechte Aussage)

Aussage A ist wahr.

$B \;:\Longleftrightarrow$ alle Autos sind rot

Aussage B ist falsch.

$C \;:\Longleftrightarrow$ wenn ich im Lotto gewinne, dann spende ich die Hälfte des Gewinns

Aussage C kann wahr oder falsch sein.

1.3 Definition (Verneinung) *Sei A eine Aussage. Die* ***Verneinung*** *von A wird mit $\neg A$ („nicht A") abgekürzt. Diese wird durch die Wahrheitstabelle*

A	$\neg A$
w	f
f	w

definiert. „Es ist nicht richtig, dass A gilt".

Eine Verknüpfung bildet aus 2 mathematischen Aussagen eine neue.

1.4 Definition *Seien A, B Aussagen.*

- ***Und**-Verknüpfung $A \wedge B$*

$A \wedge B$	$B \asymp w$	$B \asymp f$
$A \asymp w$	w	f
$A \asymp f$	f	f

- ***Oder**-Verknüpfung $A \vee B$*

$A \vee B$	$B \asymp w$	$B \asymp f$
$A \asymp w$	w	w
$A \asymp f$	w	f

- ***Logische Implikation** $A \implies B$*

  (auch: $B \impliedby A$)

  „A ist hinreichend für B“,
  „B ist notwendig für A“,
  „wenn A wahr, dann auch B wahr“

$A \implies B$	$B \asymp w$	$B \asymp f$
$A \asymp w$	w	f
$A \asymp f$	w	w

↑

„ex falso quodlibet“

- ***Äquivalenz** $A \iff B$*

  „A ist hinreichend und notwendig für B“
  „A ist genau dann wahr, wenn B wahr“

$A \iff B$	$B \asymp w$	$B \asymp f$
$A \asymp w$	w	f
$A \asymp f$	f	w

1.5 Beispiel (a) In Beispiel 1.2 gilt

$$\neg A \iff \text{nach Dienstag kommt nicht Mittwoch} \qquad (\asymp f)$$
$$\neg B \iff \text{es gibt (mindestens) ein Auto, das nicht rot ist} \qquad (\asymp w)$$

(b) Motivation der Definition von „$\implies$“: für alle Aussagen A, B gilt $(A \wedge B \implies A) \asymp w$

1.6 Lemma *Seien A, B Aussagen. Dann gilt*

(a) *Ausgeschlossener Widerspruch* $A \wedge \neg A \asymp f$

(b) *Tertium non datur* $A \vee \neg A \asymp w$

(c) *Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$*

$$A \wedge B \iff B \wedge A, \qquad A \vee B \iff B \vee A$$

(d) $$(A \iff B) \iff \big((A \implies B) \wedge (B \implies A)\big)$$

(e) *Kontraposition* $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

(f) $$\neg(\neg A) \iff A$$

Beweis. Vergleiche Wahrheitstafeln; alle klar bis auf (e):

		$A \asymp f$	$A \asymp w$
	$\neg B \implies \neg A$	$\neg A \asymp w$	$\neg A \asymp f$
$B \asymp f$	$\neg B \asymp w$	w	f
$B \asymp w$	$\neg B \asymp f$	w	w

Der restliche Beweis verläuft analog ⇒ Übung! ■

1.7 Bemerkung (a) $A :\iff \neg A$ definiert keine mathematische Aussage, da A zugleich wahr und falsch wäre (Lügner-Antinomie von EUBULIDES; 4. Jhd. v. Chr.).

(b) **Beweismethoden:** Sei $A \asymp w$. Das Ziel ist zu zeigen, dass dann auch $B \asymp w$.

(1) Erkenne $(A \implies B) \asymp w$ (direkter Beweis)

(2) Erkenne $(\neg B \implies \neg A) \asymp w$ (Kontraposition)

(3) Erkenne $(\neg B \wedge A) \asymp f$ (Widerspruchsbeweis)

1.2 Mengen, Relationen, Funktionen

1.8 Axiom („Naives“ Axiom von CANTOR[1]) *Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Reihenfolge der Zusammenfassung ist dabei irrelevant!*

1.9 Definition *Seien M, M' Mengen.*

(a) ***Element sein***

$$x \in M \;:\iff\; \text{Objekt } x \text{ liegt in Menge } M \qquad (\text{oder } M \ni x)$$
$$x \notin M \;:\iff\; \neg(x \in M)$$

(b) ***Teilmenge***

$$M' \subseteq M \;:\iff\; \forall x \in M' \colon x \in M$$

„$\forall$“ lies „für alle“; „:“ lies „gilt“ oder „so dass“

(alternativ auch: $M \supseteq M'$)

echte Teilmenge

$$M' \subset M \;:\iff\; \big(M' \subseteq M \wedge (\exists x \in M \colon x \notin M')\big)$$

„$\exists$“ lies „es existiert (mindestens ein)“

Auch gebräuchlich ist die Schreibweise: $\subset$ (Teilmenge), $\subsetneq$ (echte Teilmenge).

---

[1] GEORG CANTOR (1845 – 1918)

(c) ***Gleichheit von Mengen***

$$M = M' :\Longleftrightarrow (M \subseteq M') \wedge (M' \subseteq M)$$

d.h. jedes Element von M liegt auch in M' und umgekehrt – die Mengen bestehen also aus denselben Elementen

$$M \neq M' :\Longleftrightarrow \neg(M = M')$$

Im Folgenden Beispiel soll die Schreibweise für Mengen veranschaulicht werden.

1.10 Beispiel

- Sei $\mathscr{L}$ die Menge der lateinischen Buchstaben,

$$\underset{\uparrow\text{ definierende Gleichheit}}{\mathscr{L} :=} \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\} \qquad \textbf{aufzählend}$$

- Sei $\mathscr{M}$ die Menge der lateinischen Buchstaben im Wort Mathematik,

$$\mathscr{M} := \{a, M, t, h, e, m, i, k\} = \{\, \xi \in \mathscr{L} : \Psi(\xi)\,\},$$
$$\big[\text{auch gebräuchlich:} \quad \{\xi \in \mathscr{L} |\ \Psi(\xi)\}\big]$$

wobei $\Psi(\xi) :\Longleftrightarrow$ Buchstabe ξ kommt in „Mathematik“ vor.

<u>*Konvention:*</u> tritt ein Element in der aufzählenden Schreibweise mehrfach auf, so bezeichne dies dieselbe Menge, wie wenn das Element nur einmal gelistet wird, also $\{M, a, t, h, e, m, a, t, i, k\} = \{a, M, t, h, e, m, i, k\}$.

1.11 Definition *Seien M, M' Mengen.*

- ***Leere Menge*** $\varnothing :=$ *Menge ohne Element*
- ***Schnitt*** $M \cap M' := \{\, x : x \in M \wedge x \in M' \,\}$
- ***Vereinigung*** $M \cup M' := \{\, x : x \in M \vee x \in M' \,\}$
- ***Differenz*** $M \setminus M' := \{\, x \in M : x \notin M' \,\} =: \underset{\text{Komplement von } M' \text{ in } M}{M'^{\complement}}$
- ***Kartesisches Produkt*** $M \times M' := \{\, (m, m') : m \in M, m' \in M' \,\}$
  Jedes $(m, m') \in M \times M'$ ist ein geordnetes Paar, das heißt die Reihenfolge ist wichtig! Für $M \neq M'$ gilt deswegen auch $M \times M' \neq M' \times M$.
- ***Potenzmenge*** *von M* $\mathscr{P}(M) := \{\, L \text{ ist Menge} : L \subseteq M \,\}$ *(auch: 2^M).*

1.12 Beispiel (a) $\forall$ Mengen M gilt: $\varnothing \subseteq M$, da

$$\begin{aligned} \varnothing \subseteq M \iff \forall x \in \varnothing\colon\ x \in M \iff \forall x\colon\ & \underbrace{\bigl(x \in \varnothing \implies x \in M\bigr)} \asymp w \\ \overset{\text{Kontrapos.}}{\iff}\ & \bigl(x \notin M \implies \underbrace{x \notin \varnothing}_{\asymp w}\bigr) \end{aligned}$$

(b) $\forall$ Mengen M gilt: $\varnothing \neq \mathscr{P}(M) \supseteq \{\varnothing, M\}$.

(c) $\{a, b, c\} \times \{a, d\} = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)\}$.

1.13 Lemma (Rechenregeln für $\cup$ und $\cap$) *Seien L, M, N Mengen*

(a) ***Kommutativität:***

$$M \cap N = N \cap M, \qquad M \cup N = N \cup M$$

(b) ***Assoziativität:***

$$\begin{aligned} L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N &=: L \cap M \cap N \\ L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N &=: L \cup M \cup N \end{aligned}$$

(c) ***Idempotenz:***

$$M \cap M = M = M \cup M$$

(d) ***Distributivität:***

$$\begin{aligned} L \cap (M \cup N) &= (L \cap M) \cup (L \cap N) \\ L \cup (M \cap N) &= (L \cup M) \cap (L \cup N) \end{aligned}$$

(e) ***de Morgan-Regeln:*** *Seien $L, N \subseteq M$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} (L \cap N)^{\complement} &= L^{\complement} \cup N^{\complement} \\ (L \cup N)^{\complement} &= L^{\complement} \cap N^{\complement} \end{aligned}$$

Beweis. Aus den entsprechenden Regeln für $\wedge, \vee, \neg$ folgen sofort die Aussagen. Als Beispiel die 1. de Morgansche Regel:

$$\begin{aligned} (L \cap N)^{\complement} &= \{x \in M : \neg(x \in L \cap N)\} \\ &= \{x \in M : \neg(x \in L \wedge x \in N)\} \\ &= \{x \in M : (x \notin L) \vee (x \notin N)\} \\ &= \bigl\{x \in M : \bigl(x \in L^{\complement}\bigr) \vee \bigl(x \in N^{\complement}\bigr)\bigr\} \\ &= L^{\complement} \cup N^{\complement} \end{aligned}$$

Rest: Übung! ■

1.14 Bemerkung Die naive Definition einer Menge ist problematisch!
Beispiel: RUSSEL'sche Antinomie (ca. 1900).
Axiom 1.8 schließt nicht aus, dass es eine Menge M gibt mit $M \in M$. Definiere dafür zunächst

$$\text{Menge } M \text{ ist } \textbf{erlaubt} \;:\Longleftrightarrow\; M \notin M.$$

Sei nun $\mathscr{M} := \{\, M \text{ ist Menge} : M \text{ erlaubt}\}$. Frage: ist $\mathscr{M}$ erlaubt, d.h. gilt $\mathscr{M} \notin \mathscr{M}$?

- Falls ja, also $\mathscr{M} \notin \mathscr{M}$, folgt per Definition von $\mathscr{M}$, dass $\mathscr{M} \in \mathscr{M}$.
- Falls nein, also $\mathscr{M} \in \mathscr{M}$, folgt per Definition von $\mathscr{M}$, dass $\mathscr{M} \notin \mathscr{M}$.

Somit erhält man die Aussage $\mathscr{M} \in \mathscr{M} \iff \mathscr{M} \notin \mathscr{M}$. Dies steht aber im Widerspruch ($\lightning$) zu Axiom 1.1: Aussage entweder w oder f.
Der Ausweg aus diesem Problem lautet: Man darf die Menge $\mathscr{M}$ nicht bilden, ändere also Axiom 1.8!

- *Axiomatische Mengenlehre* schränkt erlaubte Aussageformen in Mengendefinition ein ⟶ Vorlesung Logik.
- Wir verwenden nur dort erlaubte Aussageformen.

1.15 Definition *Seien L, M Mengen, $l \in L, m \in M$.*

- *Eine **Relation** $\mathscr{R}$ auf $L \times M$ ist eine Teilmenge $\mathscr{R} \subseteq L \times M$.*
  Falls $L = M$ abkürzend auch: Relation auf M (statt $M \times M$).
- *l und m **erfüllen** $\mathscr{R}$ (in Zeichen: $l\mathscr{R}m$) $:\Longleftrightarrow (l, m) \in \mathscr{R}$.*
- *Die **inverse Relation** $\mathscr{R}^{-1}$ ist definiert als $\mathscr{R}^{-1} := \{\,(m, l) \in M \times L : (l, m) \in \mathscr{R}\}$.*

1.16 Beispiel Sei $L := M := \{a, b, c\}$ und $\mathscr{R}$ die Relation „kommt früher im Alphabet als", dann lautet

$$\mathscr{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$$

$\mathscr{R}^{-1}$ = „kommt später im Alphabet als"

1.17 Definition *Sei M Menge und $\sim$ eine Relation auf M.*

- $$\sim \textit{ ist } \textbf{\textit{Äquivalenzrelation}} \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} \textit{reflexiv: } \forall m \in M : m \sim m \\ \textit{transitiv: } \forall m_1, m_2, m_3 \in M : (m_1 \sim m_2) \wedge (m_2 \sim m_3) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow m_1 \sim m_3 \\ \textit{symmetrisch: } \forall m, n \in M : m \sim n \iff n \sim m \end{cases}$$

- ***Äquivalenzklasse*** *von* $m \in M$ *bezüglich* $\sim$
$$[m] := \{\, m' \in M : m' \sim m \,\} \subseteq M.$$
Wegen der Reflexivität von $\sim$ *gilt stets* $[m] \neq \varnothing$.
- $m' \in M$ *heißt* ***Repräsentant*** *von* $[m] \;:\Longleftrightarrow\; m' \in [m]$.
- $M/_{\sim} := \{\, [m] : m \in M \,\}$ *heißt die* ***Quotientenmenge*** *von* M.

1.18 Beispiel Sei M eine Menge.

(a) $\sim :=$ „Gleichheit von Teilmengen“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{P}(M)$.

(b) Sei $M := \{a, b\}$. $\sim :=$ „hat selbe Anzahl von Elementen wie“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{P}(M)$ mit $[\varnothing] = \{\varnothing\}$, $[\{a\}] = [\{b\}] = \{\{a\}, \{b\}\}$ und $[\{a, b\}] = \{\{a, b\}\}$.

(c) Die Diagonale $\Delta := \{\, (m, m) : m \in M \,\} \subset M \times M$ definiert eine Äquivalenzrelation auf M mit $[m] = \{m\}$ für alle $m \in M$ und $M/_{\Delta} = \{\, \{m\} : m \in M \,\}$.

1.19 Definition (Gleichheit von Elementen) *Sei* M *eine Menge und* $m_1, m_2 \in M$.

$$m_1 = m_2 \;:\Longleftrightarrow\; m_1 \Delta\, m_2 \qquad \textit{und} \qquad m_1 \neq m_2 \;:\Longleftrightarrow\; \neg(m_1 = m_2).$$

1.20 Lemma *Sei* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* M *und* $m_1, m_2 \in M$. *Dann gilt*

$$\begin{array}{lcccl} \textit{entweder} & [m_1] = [m_2] & \textit{oder} & [m_1] \cap [m_2] = \varnothing. & \\ & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ & m_1 \sim m_2 & & m_1 \not\sim m_2 & :\Longleftrightarrow\; \neg(m_1 \sim m_2) \end{array}$$

Beweis. (i) $[m_1] = [m_2] \ni m_2 \implies m_2 \sim m_1$.

(ii) Gelte $m_1 \sim m_2$. Sei $m_1' \in [m_1] \implies m_1' \sim m_1$. Aus der Transitivität von $\sim$ folgt $m_1' \sim m_2 \implies m_1' \in [m_2]$, das heißt $[m_1] \subseteq [m_2]$. Die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ wird analog durch Vertauschen von $1 \leftrightarrow 2$ gezeigt. Also haben wir gezeigt: $m_1 \sim m_2 \implies [m_1] = [m_2]$.

(iii) Sei $m \in [m_1] \cap [m_2] \implies m_1 \sim m \wedge m \sim m_2 \overset{\sim \text{ trans.}}{\implies} m_1 \sim m_2$.
Also gilt: $m_1 \not\sim m_2 \implies [m_1] \cap [m_2] = \varnothing$.

(iv) Da stets $[m] \neq \varnothing$, gilt: $[m_1] \cap [m_2] = \varnothing \implies [m_1] \neq [m_2]$.
Zudem Kontraposition von (ii): $[m_1] \neq [m_2] \implies m_1 \not\sim m_2$. Also mit Transitivität der Implikation
$$[m_1] \cap [m_2] = \varnothing \implies m_1 \not\sim m_2. \qquad \blacksquare$$

1.21 Korollar *Sei M eine Menge und $m_1, m_2 \in M$. Dann gilt*

$$m_1 = m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \{m_1\} = \{m_2\}$$

1.22 Definition (Beliebige Vereinigungen und Schnitte) *Sei $J \neq \varnothing$ eine Menge („Indexmenge“) und für alle $j \in J$ sei M_j eine Menge. Dann heißt*

$$\bigcup_{j\in J} M_j := \{\, m : \exists j \in J \text{ mit } m \in M_j \,\}$$

*die **Vereinigung** aller M_j mit j in J und*

$$\bigcap_{j\in J} M_j := \{\, m : \forall j \in J \text{ gilt } m \in M_j \,\}$$

*der **(Durch-)Schnitt** aller M_j mit j in J.*
Falls für alle $i, j \in J$ mit $i \neq j$ gilt

$$M_i \cap M_j = \varnothing,$$

*so heißen die Mengen **paarweise disjunkt**. Für die **disjunkte Vereinigung** kann auch verdeutlichend $\dot\bigcup_{j\in J} M_j$ geschrieben werden. Der Punkt steht dann für die Disjunktheit.*

1.23 Korollar *Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf Menge M. Dann gilt*

$$M = \dot{\bigcup_{[m]\in M/\sim}} [m].$$

Das heißt, M wird disjunkt in Äquivalenzklassen zerlegt.

1.24 Definition *Sei M Menge und $\prec$ eine Relation auf M.*

$$\prec \text{ ist } \textbf{Ordnungsrelation} \text{ auf } M :\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{reflexiv: } \forall m \in M : m \prec m \\ \text{transitiv: } \forall m_1, m_2, m_3 \in M : (m_1 \prec m_2) \wedge (m_2 \prec m_3) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow m_1 \prec m_3 \\ \text{antisymmetrisch: } \forall m_1, m_2 \in M : (m_1 \prec m_2 \wedge m_2 \prec m_1) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow m_1 = m_2 \end{cases}$$

*In diesem Fall heißt $(M, \prec)$ **teilweise (an-)geordnete** Menge.*

*$(M, \prec)$ heißt **(vollständig oder total) (an-)geordnet**, wenn zudem gilt*

$$\forall m_1, m_2 \in M : (m_1 \prec m_2) \vee (m_2 \prec m_1),$$

d.h. wenn 2 beliebige Elemente stets vergleichbar sind!

Notation für inverse Relation: $m_1 \succ m_2 :\Longleftrightarrow m_2 \prec m_1$.

1.25 Beispiel

- $(\mathscr{P}(M), \subseteq)$ ist teilweise geordnet, aber nicht vollständig, falls M mehr als ein Element hat.
- $\subsetneq$ ist keine Ordnungsrelation auf $\mathscr{P}(M)$.
- später in der Vorlesung sehen wir, dass $(\mathbb{R}, \leqslant)$ geordnet ist.
- Bsp. 1.16 definiert keine Ordnungsrelation, wohl aber

  „steht früher oder an gleicher Stelle im Alphabet als“

1.26 Definition *Sei $\mathscr{R}$ Relation auf Mengen $X \times Y$. Wir sagen*

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{R} \text{ ist } \textbf{Graph einer Funktion} \\ (\text{oder } \textbf{Abbildung}) \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathscr{R} \text{ gilt}: \\ \qquad x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2 \end{array}\right.$$

- ***Definitionsbereich** der Funktion:*

  $$\mathscr{D} := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in \mathscr{R}\} = \{x \in X : \underset{\uparrow}{\exists_1} y =: f(x) \in Y \text{ mit } (x, y) \in \mathscr{R}\}$$

  „es existiert genau 1“; auch $\exists!$

  auch: $\operatorname{dom}(f) := \mathscr{D}$

- ***Wertebereich** der Funktion:* $f(\mathscr{D})$*, wobei*

  $$f(D) := \{y \in Y : \exists x \in D \text{ mit } (x, y) \in \mathscr{R}\} \qquad \textbf{Bild von } D \subseteq \mathscr{D} \text{ unter } f$$

  Schreibweise (anstatt $\mathscr{R} =: \mathscr{R}_f$): $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

- ***Gleichheit** zweier Funktionen f, g mit Definitionsbereichen in X und Wertebereichen in Y:*

  $$\begin{aligned} f = g \;&:\Longleftrightarrow\; \mathscr{R}_f = \mathscr{R}_g \\ &\Longleftrightarrow\; \operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) \text{ und } \forall x \in \operatorname{dom}(f): f(x) = g(x). \end{aligned}$$

- ***Restriktion** (Einschränkung) $f\big|_A$ einer Funktion f auf $A \subseteq \mathscr{D}$:*

  $$\mathscr{R}_{f|_A} := \big\{(x, y) \in \mathscr{R}_f : x \in A\big\}.$$

1.27 Bemerkung

- f ordnet jedem $x \in \mathscr{D} =: \operatorname{dom}(f)$ genau ein $y \in Y$ zu.
- Schreibweise $f: X \to Y$ bedeutet auch $X = \operatorname{dom}(f)$.

1.28 Definition *Sei $f: X \to Y$, so heißt*

- *f **injektiv*** $:\Longleftrightarrow$ $\forall y \in f(X)\ \exists_1 x \in \operatorname{dom}(f)$: $y = f(x)$

- f ***surjektiv*** $:\iff \quad f(X) = Y$
- f ***bijektiv*** $:\iff \quad f$ *injektiv und surjektiv*

1.29 Lemma *Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gilt*

(a) $(\mathscr{R}_f)^{-1}$ *ist Graph einer Funktion, der sogenannten* ***Umkehrfunktion***

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} Y & \to & X \\ f(x) & \mapsto & x \end{array} .$$

Auch f^{-1} ist dann bijektiv.

(b) $(f^{-1})^{-1} = f$

Beweis. (a) $\mathscr{R}_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ und $(\mathscr{R}_f)^{-1} = \{(\underbrace{f(x)}_{=:y}), x) \in Y \times X : x \in X\}$.

Seien $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in (\mathscr{R}_f)^{-1}$ mit $y_1 = y_2 =: y$, also $y = f(x_1) = f(x_2)$, dann folgt aus der Injektivität $x_1 = x_2$. Daraus folgt $(\mathscr{R}_f)^{-1} =: \mathscr{R}_{f^{-1}}$ ist Graph einer Funktion f^{-1}.

$$\operatorname{dom}(f^{-1}) = \left\{ y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } \underbrace{(y,x) \in \mathscr{R}_{f^{-1}}}_{\iff (x,y) \in \mathscr{R}_f} \right\} = f(X) \overset{\text{surj.}}{=} Y$$

Das heißt für alle $y \in Y$ $\exists x \in X$ mit $y = f(x)$. Wegen der Injektivität gilt sogar $\exists_1 x \in X$ mit $y = f(x)$. Somit ist

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} Y & \to & X \\ y = f(x) & \mapsto & x \end{array}$$

auch surjektiv und da $\mathscr{R}_f$ Graph einer Funktion ist, insbesondere also $x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ gilt, folgt, dass f^{-1} injektiv sein muss. Insgesamt ist somit f^{-1} bijektiv.

(b) aus $(\mathscr{R}_{f^{-1}})^{-1} = (\mathscr{R}_f^{-1})^{-1} = \mathscr{R}_f$. ■

1.30 Beispiel Die Relation $\mathscr{R} := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ auf X ist Graph der **Identität**

$$\operatorname{id} := \operatorname{id}_X : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & X \end{array}$$

auf X. Diese ist bijektiv und es gilt $\operatorname{id}_X^{-1} = \operatorname{id}_X$.

1.31 Definition *Seien $f : X \to Y, g : \operatorname{dom}(g) \to Z$ Funktionen, wobei* $\operatorname{dom}(g) \subseteq Y$. *Dann heißt für*

$$\operatorname{dom}(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in \operatorname{dom}(g)\}$$

die Funktion

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathrm{dom}(g \circ f) & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

die ***Komposition*** *(Verkettung) von f und g.*

1.32 Lemma *Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gilt*

(a) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

(b) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$

Beweis. (a) da $f(X) = Y = \mathrm{dom}(f^{-1}) \implies \mathrm{dom}(f^{-1} \circ f) = X$. Sei $x \in X$ beliebig $\implies (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$. Daraus folgt die Behauptung.

(b) analog. ■

1.33 Definition (Urbild) *Seien X, Y, M Mengen, $M \subseteq Y$, und $f : X \to Y$ eine Funktion, dann heißt*

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : \exists y \in M \text{ mit } f(x) = y\}$$

das ***Urbild von M unter*** *f. (Notation identisch zu Bild unter f^{-1}, falls dies existiert!)*

1.34 Bemerkung (a) f injektiv <u>nicht</u> vorausgesetzt!

(b) falls $M \cap f(X) = \emptyset \implies f^{-1}(M) = \emptyset$.

(c) falls f injektiv ($\implies f : X \to f(X)$ bijektiv) gilt

$$\underbrace{f^{-1}(M)}_{\substack{\underline{\text{Urbild}} \text{ von } M \text{ unter } f \\ \text{gemäß Def. 1.33}}} = \underbrace{f^{-1}(M \cap f(X))}_{\substack{\underline{\text{Bild}} \text{ von } M \cap f(X) \text{ unter } f^{-1} \\ \text{gemäß Def. 1.26}}}$$

2

Aufbau des Zahlensystems

Wir postulieren die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und leiten daraus $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ samt aller Rechenregeln ab. LEOPOLD KRONECKER (1823-1891): „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“

2.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Wir postulieren die Existenz einer Menge $\mathbb{N}$, für die gelte

2.1 Axiom (Axiomensystem von PEANO)

(P1) $\mathbb{N} \neq \varnothing$, *also existiert mindestens ein Element in* $\mathbb{N}$, *das mit* 1 *bezeichnet wird.*

Es gibt eine Funktion („Nachfolgerabbildung“) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit*

(P2) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ *(„1 ist kein Nachfolger“)*

(P3) ν *ist injektiv* *(„Eindeutigkeit des Vorgängers“)*

(P4) ***„Prinzip der vollständigen Induktion“*** $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ *gilt*

$$\Big(1 \in M \wedge \underbrace{\nu(M) \subseteq M}_{\iff \forall n \in M : \nu(n) \in M}\Big) \implies M = \mathbb{N}$$

Die Bezeichnungsweisen lauten: $\nu(1) =: 2$, $\nu(2) =: 3, \ldots$
Nach (P4) *werden so alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit einem Zahlensymbol erfasst.*

2.2 Bemerkung Die Axiome (P1) – (P4) sind

- vollständig (im Sinne von: alle bekannten Rechenregeln ableitbar)
- unabhängig (keines der Axiome aus den anderen ableitbar)
- widerspruchsfrei (GENTZEN,1936)

2.3 Definition (Addition und Multiplikation) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ sei*

$$„+“: \quad \begin{array}{rcl} n + 1 &:=& \nu(n) \\ n + \nu(k) &:=& \nu(n+k) \end{array} \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \qquad „\cdot“: \quad \begin{array}{rcl} n \cdot 1 &:=& n \\ n \cdot \nu(k) &:=& n \cdot k + n \end{array}$$

„·“ wird meist weggelassen.

2.4 Bemerkung Obige rekursive Definition erklärt wegen (P4) $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, denn: Sei $M := \{m \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $n + m$ durch (1) und (2) definiert$\}$. Somit

(i) $1 \in M$ wegen (1) („Induktionsanfang“)

(ii) Sei $m \in M$ („Induktionsannahme“). Zeige $\nu(m) \in M$ („Induktionsschritt“)
Dies ist wahr, da $\forall n \in \mathbb{N} : \ n + \nu(m) \overset{(2)}{=} \nu(\underbrace{n+m}_{\text{definiert nach Induktionsannahme}})$ definiert.

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{(P4)}{\Longrightarrow}$ $M = \mathbb{N}$. Analoges gilt für die Definition von $n \cdot m$.

2.5 Lemma (Rechenregeln) *Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

	„+“	„·“
kommutativ	$n + k = k + n$	$nk = kn$
assoziativ	$(k+m)+n = k+(m+n)$ $=: k+m+n$	$(km)n = k(mn)$ $=: kmn$
distributiv	$(k+m)n = kn + mn$	

(*Insbesondere sind* $(\mathbb{N}, +)$ *und* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *abelsche Halbgruppen* ⇝ *Lineare Algebra*)

Beweis. „+“ ist assoziativ ⇝ Übung!
Wir beweisen hier nur die Kommutativität von + (dabei wird die Assoziativität verwendet).
1. Schritt. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $n + 1 = 1 + n$
Beweis per vollständiger Induktion: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n + 1 = 1 + n\}$.

(i) $1 \in M$, klar! („Induktionsanfang“)

(ii) Sei $n \in M$. Zu zeigen: $\underbrace{n+1}_{\nu(n)} \in M$ („Induktionsschritt“)

$$\nu(n) + 1 \overset{(1)}{=} \nu(\nu(n)) \overset{n \in M}{=} \nu(n+1) \overset{(i)}{=} \nu(1+n) \overset{(2)}{=} 1 + \nu(n) \qquad \checkmark$$

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{(P4)}{\Longrightarrow}$ $M = \mathbb{N}$.
2. Schritt. Zeige für alle $n, k \in \mathbb{N}$: $n + k = k + n$ per Induktion nach k:
Sei $K := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\ n + k = k + n\}$

(i) $1 \in K$ wegen Schritt 1.

(ii) Sei $k \in K$. Zu zeigen: $\nu(k) = k + 1 \in K$. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$n + \nu(k) \overset{(2)}{=} \nu(\underbrace{n + k}_{=k+n,\text{ da } k \in K}) \overset{(2)}{=} k + \underbrace{\nu(n)}_{\underbrace{n+1}_{=1+n,\text{ wegen Schritt 1}}} = k + (1 + n) \overset{\text{„+" assoz.}}{=} (k + 1) + n = \nu(k) + n. \quad \checkmark$$

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{\text{(P4)}}{\implies}$ $K = \mathbb{N}$. Für „·" verläuft der Beweis völlig analog, ebenso die Distributivität. ■

Die Rechenregeln dürfen (sollen) ab jetzt hemmungslos verwendet werden!

2.6 Definition *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ werden durch*

- $n < m \;:\Longleftrightarrow\; (\exists k \in \mathbb{N}\colon\ m = n + k)$,
- $n \leqslant m \;:\Longleftrightarrow\; (n < m \vee n = m)$

Relationen auf $\mathbb{N}$ erklärt. Die entsprechenden, inversen Relationen lauten

- $n > m \;:\Longleftrightarrow\; m < n$,
- $n \geqslant m \;:\Longleftrightarrow\; m \leqslant n$.

2.7 Satz *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ trifft jeweils genau eine der folgenden drei Aussagen zu*

- $m < n$
- $m = n$
- $m > n$.

Der Beweis beruht auf den drei folgenden Lemmata.

2.8 Lemma *Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat einen Vorgänger, das heißt*

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists m \in \mathbb{N}\colon\ \nu(m) = n$$

Beweis. Mittels vollständiger Induktion. Sei $M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N}\colon \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } \nu(m) = n\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\quad 1 \in M \text{ klar} \\ \bullet\quad \text{Sei } n \in M \implies \nu(n) \in M, \text{ da Nachfolger von } n \end{array}\right\} \overset{\text{(P4)}}{\implies} M = \mathbb{N}.$$ ■

2.9 Lemma *Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt* $1 < n$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \overset{\text{Lemma 2.8}}{\implies} \exists k \in \mathbb{N}\colon\ n = \nu(k) = k + 1 = 1 + k$. Daraus folgt $1 < n$. ■

2.10 Lemma *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt* $n + k \neq n$.

Beweis. Induktion nach n:

(i) $\forall k \in \mathbb{N}:\ 1 + k = \nu(k) \neq 1$, da $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ gemäß (P2).

(ii) Es gelte: $\forall k \in \mathbb{N}:\ n + k \neq n$. Wir zeigen per Widerspruch

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon\ \nu(n) + k \neq \nu(n). \qquad (\star)$$

<u>Annahme</u>: $\exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ \nu(n) + k = \nu(n)$ $\qquad \neg(\star)$

$\Longrightarrow\ \nu(n) = k + \nu(n) \overset{(2)}{=} \nu(k + n) \overset{\text{(P3)}}{\Longrightarrow}\ n = n + k$ ↯ zu Induktionsannahme, also ist $\neg(\star)$ falsch $\Longrightarrow$ $(\star)$ wahr.

Aus (i) $\wedge$ (ii) folgt die Behauptung. ■

Beweis von Satz 2.7. Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, setze $\mathbb{N}_< := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}, \mathbb{N}_> := \{m \in \mathbb{N} : n < m\}$ und $M := \mathbb{N}_< \cup \{n\} \cup \mathbb{N}_>$.

<u>1. Schritt.</u> Zeige: $M = \mathbb{N}$ ($\Longrightarrow$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ist $m < n \ \vee\ m = n \ \vee\ n < m$ wahr)

Induktionsanfang: $1 \in M$, denn, falls $n = 1$ ist die Aussage klar, und falls $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist, gilt $1 \in \mathbb{N}_<$ wegen Lemma 2.9.

Induktionsschritt: Sei $m \in M$. Zu zeigen: $\nu(m) \in M$.

1. Fall: $m = n \Longrightarrow \nu(m) = n + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def von} <}}{\in} \mathbb{N}_> \subseteq M \quad \checkmark$

2. Fall: $m \in \mathbb{N}_> \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ m = n + k$

$$\Longrightarrow\ \nu(m) = \nu(n + k) \overset{(2)}{=} n + \nu(k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von} <}}{\Longrightarrow} n < \nu(m) \Longrightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_> \subseteq M \quad \checkmark$$

3. Fall: $m \in \mathbb{N}_< \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ n = m + k$

- Falls $k = 1 \Longrightarrow \nu(m) = n \in M \quad \checkmark$
- Falls $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Longrightarrow k = \tilde{k} + 1$ für $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ (Lemma 2.8)

$$\Longrightarrow\ n = m + \tilde{k} + 1 = \underbrace{m + 1}_{\nu(m)} + \tilde{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von} <}}{\Longrightarrow} \nu(m) < n \Longrightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_< \subseteq M \quad \checkmark$$

Damit ist der 1. Schritt bewiesen.

<u>2. Schritt.</u> $M = \mathbb{N}_< \,\dot{\cup}\, \{n\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{N}_>$ $\qquad$ (paarweise disjunkte Mengen)

1. Teil: zu zeigen ist $n \notin \mathbb{N}_<$. Sei $m \in \mathbb{N}_< \Longrightarrow m < n \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ n = m + k$ $\Longrightarrow\ m \neq n$ wegen Lemma 2.10.
2. Teil: zu zeigen ist $n \notin \mathbb{N}_>$. (Analog zu 1. Teil).
3. Teil: zu zeigen ist $\mathbb{N}_> \cap \mathbb{N}_< = \varnothing$. Sei $m_< \in \mathbb{N}_<, m_> \in \mathbb{N}_> \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} n &= m_< + k && \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ m_> &= n + k' && \text{für ein } k' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ m_> = (m_< + k) + k' = m_< + \underbrace{k + k'}_{\in \mathbb{N}}$$

$\Longrightarrow\ m_> \neq m_<$ nach Lemma 2.10. ■

2.11 Lemma („Kürzen“) *Für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$ gilt*

- $n = m \iff n + k = m + k \iff nk = mk$
- $n < m \iff n + k < m + k \iff nk < mk$

Beweis. Übung! (Vollständige Induktion nach k) ■

2.2 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Ziel: Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Durchführung: nur Ideen, Resultate; keine Beweise ($\rightsquigarrow$ Übung!).

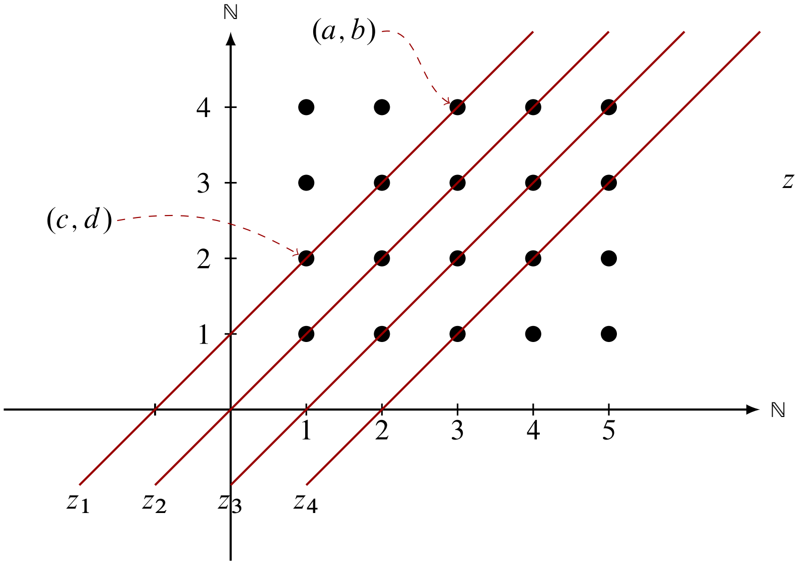
grundlegende Idee: Jede ganze Zahl ist die Differenz zweier natürlicher Zahlen:

$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & - & b \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{N} & & \mathbb{N} \end{array}$$

Probleme:

- Subtraktion “–” (noch) nicht defininiert
- Die Darstellung einer ganzen Zahl ist nicht eindeutig: $-1 = 1 - 2 = 4 - 5$

Lösung: Einführung von Äquivalenzklassen in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



$$z = a - b, \quad z = c - d$$
$$\implies a + d = b + c.$$

Abbildung 2.1: Idee der Konstruktion von ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. Die Linien verbinden genau die einzelnen Punkte der jeweiligen Äquivalenzklassen.

2.12 Definition *Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definieren wir durch*

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a+d = b+c$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit den Äquivalenzklassen

$$[(a,b)] := \big\{(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \; a+d = b+c\big\}.$$

*Die Menge der **ganzen Zahlen** ist dann definiert als*

$$\mathbb{Z} := \big\{[(a,b)] : \; a,b \in \mathbb{N}\big\}$$

2.13 Satz (a) *Für $[(a_j,b_j)] \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2$ sind die Rechenoperationen $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*

Addition: $[(a_1,b_1)] \oplus [(a_2,b_2)] := [(a_1+a_2, b_1+b_2)] \in \mathbb{Z}$

Mutliplikation: $[(a_1,b_1)] \odot [(a_2,b_2)] := [(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)] \in \mathbb{Z}$

wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

(b) *$\oplus$ und $\odot$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv.*

(c) *Zudem gilt:*
*$[(a,a)] \in \mathbb{Z}$ für $(a \in \mathbb{N})$ ist **neutrales Element** von $\oplus$, das heißt*

$$[(a_1,b_1)] \oplus [(a,a)] = [(a_1,b_1)] \text{ für alle } [(a_1,b_1)] \in \mathbb{Z}$$

*Für alle $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt: $[(b,a)]$ ist **inverses Element** bezüglich $\oplus$, das heißt*

$$[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(1,1)]$$

Beweis. (a) Wohldefiniertheit von $\odot$ (die von $\oplus$ analog und einfacher): seien $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ zwei verschiedene Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse $\Longrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{N}$, so dass entweder $(a,b) = (a_1+k, b_1+k)$ oder $(a_1,b_1) = (a+k, b+k)$. Wir betrachten nur den 1. Fall, der 2. Fall geht analog. Da

$$\begin{aligned}(aa_2+bb_2, ab_2+ba_2) &= \big(a_1a_2+b_1b_2+k(a_2+b_2), a_1b_2+a_2b_1+k(a_2+b_2)\big)\\ &\sim (a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)\end{aligned}$$

führt dies auf dieselbe Äquivalenzklasse. Analoges Argument für Änderung des Repräsentanten im 2. Faktor.

(b) Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$.

(c) klar. ■

Die gewählte Konstruktion legt nun nahe die folgende Definition einzuführen.

2.14 Definition *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} &\textcircled{n} := [(1+n,1)] \in \mathbb{Z}, && \mathbb{Z}_+ := \{\textcircled{n} : n \in \mathbb{N}\} = \big\{[(a,b)] :\ a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } a > b\big\} \\ &\textcircled{0} := [(1,1)] \in \mathbb{Z} && \\ &\textcircled{-n} := [(1,1+n)] \in \mathbb{Z}, && \mathbb{Z}_- := \{\textcircled{-n} : n \in \mathbb{N}\} = \big\{[(a,b)] :\ a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } a < b\big\} \end{aligned}$$

2.15 Satz (a) *Die Abbildung* $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}_+ \\ n & \mapsto & \textcircled{n} \end{array}$ *ist eine Bijektion und* $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \,\dot{\cup}\, \{\textcircled{0}\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{Z}_+$.

Dies rechtfertigt die Notation $\textcircled{z} = [(a,b)]$ *mit* $z \in \{n, 0, -n\}$ *wie in Def.* 2.14. *Mit den Konventionen* $-0 := 0$ *und* $-(-n) := n\ \forall n \in \mathbb{N}$ *gilt* $[(b,a)] = \textcircled{-z}$ *und* $\textcircled{-(-z)} = \textcircled{z}\ \forall \textcircled{z} \in \mathbb{Z}$.

(b) ***Verträglichkeit*** *von* $\bigcirc$ *mit* $+$ *und* $\cdot$ *: für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt*

- $\textcircled{n+m} = \textcircled{n} \oplus \textcircled{m}$
- $\textcircled{n \cdot m} = \textcircled{n} \odot \textcircled{m}$

(c) *Mit der* ***Subtraktion*** $\ominus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *definiert durch* $\textcircled{z_1} \ominus \textcircled{z_2} := \textcircled{z_1} \oplus \textcircled{-z_2}$ *für* $\textcircled{z_1}, \textcircled{z_2} \in \mathbb{Z}$, *gelten alle aus der Schule bekannten Rechenregeln für* $\oplus, \ominus, \odot$.

(d) $\textcircled{z_1} \leqslant \textcircled{z_2} \ :\Longleftrightarrow\ \exists \textcircled{n} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\textcircled{0}\}\colon\ \textcircled{z_2} = \textcircled{z_1} + \textcircled{n}$ *erklärt eine Ordnungsrelation auf* $\mathbb{Z}$ *und* $(\mathbb{Z}, \textcircled{\leqslant})$ *ist total geordnet.*
Verträglichkeit: für alle $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\textcircled{n}\ \textcircled{\leqslant}\ \textcircled{m} \iff n \leqslant m$

Beweis. Einfaches Nachrechnen (Übung). ■

2.16 Bemerkung

- Wie üblich sei $\textcircled{n}\ \textcircled{<}\ \textcircled{m} \ :\Longleftrightarrow\ \big(\textcircled{n}\ \textcircled{\leqslant}\ \textcircled{m} \wedge \textcircled{n} \neq \textcircled{m}\big)$,
  $\textcircled{n}\ \textcircled{\geqslant}\ \textcircled{m} \ :\Longleftrightarrow\ \textcircled{m}\ \textcircled{\leqslant}\ \textcircled{n}, \quad \textcircled{n}\ \textcircled{>}\ \textcircled{m} \ :\Longleftrightarrow\ \textcircled{m}\ \textcircled{<}\ \textcircled{n}.$
- Von nun an werden alle $\bigcirc$ weggelassen!
- Auch identifizieren wir $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{Z}_+$, womit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Rechtfertigung: Satz 2.15(a), (b) und (d).
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ eine abelsche Halbgruppe.

2.3 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Auch in diesem Abschnitt wird nur die Strategie der Konstruktion vorgestellt – wie in Kapitel 2.2!

Idee: Jede rationale Zahl ist ein Bruch „$\frac{a}{b}$“ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

Probleme: Die Division ist (noch) nicht definiert und die Darstellung erneut nicht eindeutig:

$$\tfrac{3}{2} = \tfrac{6}{4} \iff 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6.$$

2.17 Definition *Für* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ *mit* $\mathbb{Z}^\star := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *definiert*

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ *mit Äquivalenzklassen*

$$[(a,b)] := \Big\{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star : \; (c,d) \sim (a,b)\Big\}.$$

Die Menge der ***rationalen Zahlen*** *ist dann definiert als* $\mathbb{Q} := \{\, [(a,b)] : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^\star \,\}$.

2.18 Satz (a) *Folgende Rechenoperationen* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *sind wohldefiniert*

Addition $[(a_1,b_1)] \boxplus [(a_2,b_2)] := [(a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)] \in \mathbb{Q}$
Mutliplikation $[(a_1,b_1)] \boxdot [(a_2,b_2)] := [(a_1 a_2, b_1 b_2)] \in \mathbb{Q}$

(b) $\boxplus$ *und* $\boxdot$ *sind kommutativ, assoziativ und distributiv.*

(c) $[(0,1)] \in \mathbb{Q}$ *ist neutrales Element von* $\boxplus$,
$[(-a,b)] \in \mathbb{Q}$ *ist inverses Element von* $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ *bezüglich* $\boxplus$.

(d) $[(1,1)]$ *ist neutrales Element von* $\mathbb{Q}$ *bezüglich* $\boxdot$ *und für alle* $[(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$ *ist* $[(b,a)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$ *inverses Element bezüglich* $\boxdot$.

Zusammenfassend besagen (b) – (d), *dass* $\mathbb{Q}$ *ein* ***Körper*** *ist (vgl. Lineare Algebra).*

(e) $(\mathbb{Q}, \boxed{\leq})$ *ist ein angeordneter Körper, wobei*

$$[(a_1,b_1)] \boxed{\leq} [(a_2,b_2)] \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \;\exists\, n \in \mathbb{N}: \\ [(a_2,b_2)] = [(a_1,b_1)] \boxplus [(m,n)].$$

Beweis. (a) Übung, (b) Rückführung auf entsprechende Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{Z}$, (c) und (d) klar, (e) einfaches Nachprüfen. ■

2.19 Definition

- ***Subtraktion*** $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *erklärt durch* $[(a_1,b_1)] \boxminus [(a_2,b_2)] := [(a_1,b_1)] \boxplus [(-a_2,b_2)]$ *für* $[(a_j,b_j)] \in \mathbb{Q}$, $j = 1,2$,
- ***Division*** $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\} \to \mathbb{Q}$ *erklärt durch* $\overset{[(a_1,b_1)]}{\underset{[(a_2,b_2)]}{\boxed{=}}} := [(a_1,b_1)] \boxdot [(b_2,a_2)]$
für $[(a_1,b_1)] \in \mathbb{Q}$, $[(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$
- *für* $z \in \mathbb{Z}$ *sei* $\boxed{z} := [(z,1)]$, *somit* $[(a,b)] = [(a,1)] \boxdot [(1,b)] = \overset{[(a,1)]}{\underset{[(b,1)]}{\boxed{=}}} = \overset{\boxed{a}}{\underset{\boxed{b}}{\boxed{=}}}$

$\mathbb{Q}_{ganz} := \left\{ \boxed{z} : z \in \mathbb{Z} \right\}$

2.20 Satz (a) *Es gelten die aus der Schule bekannten Rechenregeln für* $\boxplus, \boxminus, \boxdot, \boxed{-}, \boxed{\leqslant}$ *und „Brüche“* $\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{\;\overline{\quad\;}\;}\\ \boxed{b}\end{array}$.

(b) *Die Abbildung* $\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q}_{ganz}\\ z & \mapsto & \boxed{z}\end{array}$ *ist eine Bijektion. Sie ist verträglich mit den Operationen* $+, \cdot$ *und* $\leqslant$ *(und damit auch mit* $-, <, \geqslant, >$*), das heißt,* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *gilt*

- $\boxed{z_1} \boxplus \boxed{z_2} = \boxed{z_1 + z_2}$,
- $\boxed{z_1} \boxdot \boxed{z_2} = \boxed{z_1 z_2}$,
- $\boxed{z_1} \boxed{\leqslant} \boxed{z_2} \iff z_1 \leqslant z_2$.

Beweis. (a) Stures Nachrechnen mit Hilfe der Definitionen.

(b) Klar für $\boxplus$ und $\boxdot$; für $\boxed{\leqslant}$ siehe Übung. ■

2.21 Bemerkung • Sei $[(a,b)] \boxed{<} [(c,d)] :\iff \big([(a,b)] \boxed{\leqslant} [(c,d)] \wedge [(a,b)] \neq [(c,d)]\big)$, $[(a,b)] \boxed{\geqslant} [(c,d)] :\iff [(c,d)] \boxed{\leqslant} [(a,b)]$, $[(a,b)] \boxed{>} [(c,d)] :\iff [(c,d)] \boxed{<} [(a,b)]$.

- Unter Weglassung aller ☐ (ab sofort!) können wir mit Brüchen $[(a,b)] = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^\star$, wie gewohnt rechnen.
- Satz 2.20(b) rechtfertigt die Identifizierung von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Q}_{\text{ganz}}$, womit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.22 Lemma (a) *Die Ordnung auf* $\mathbb{Q}$ *ist* ***archimedisch****, das heißt,*

$$\forall q, \varepsilon \in \mathbb{Q} \textit{ mit } q, \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N}\colon\ q < n\varepsilon.$$

(b) ***Dichte*** *von* $\mathbb{Q}$*:* $\forall q, r \in \mathbb{Q} \textit{ mit } q < r \, \exists s \in \mathbb{Q}:\ q < s < r.$

Beweis. (a) Schreibe $q = \frac{a}{g}, \varepsilon = \frac{b}{g}$ mit $a, b, g \in \mathbb{N}$ (gemeinsamer Nenner). Dann gilt:

$$\text{Behauptung} \iff \Big(\underbrace{\forall a, b \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\colon\ a < nb}_{\text{Aussage ist wahr. Wähle } n=a+1}\Big).$$

(b) Wähle $s := \frac{q+r}{2} \in \mathbb{Q} \implies$

- $s = q + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \implies s > q$,
- $r = s + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \implies r > s$. ■

2.23 Definition

- *Sei $q \in \mathbb{Q}$. Der **(Absolut-)betrag** von q ist definiert als*

$$|q| := \begin{cases} q & , q \geqslant 0 \\ -q & , q < 0 \end{cases}$$

- *Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Das **Maximum** bzw. **Minimum** von q_1, q_2 ist definiert als*

$$\max(q_1, q_2) := \begin{cases} q_1 & , q_1 \geqslant q_2 \\ q_2 & , q_2 \geqslant q_1 \end{cases}$$

$$\min(q_1, q_2) := \begin{cases} q_1 & , q_1 \leqslant q_2 \\ q_2 & , q_2 \leqslant q_1 \end{cases}$$

Somit ist $|q| = \max(q, -q) \geqslant 0$.

2.24 Satz *Für $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ gilt*

(B0) *Der Wertebereich der Betragsfunktion ist eine total geordnete Teilmenge von $\mathbb{K}$.*

(B1) $\forall q \in \mathbb{K}$ *ist* $|q| \geqslant 0$ *und* $|q| = 0 \iff q = 0$.

(B2) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}\colon |q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$.

(B3) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}\colon |q_1 + q_2| \leqslant |q_1| + |q_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

(B0) – (B3) *besagen, dass $\mathbb{Q}$ ein **bewerteter Körper** ist.*

Beweis. (B0): Ganz $\mathbb{Q}$ ist total geordnet. (B1): Aus Definition des Betrages ersichtlich.

(B2): Für $j = 1, 2$ sei $q_j = s_j r_j$ mit $r_j \geqslant 0$ und $s_j \in \{1, -1\}$, dann folgt

$$|q_1 q_2| = |s_1 s_2 r_1 r_2| = \underbrace{|\underbrace{s_1 s_2}_{=\pm 1}|}_{1} \underbrace{r_1}_{|s_1 r_1|} \underbrace{r_2}_{|s_2 r_2|} = |q_1| \cdot |q_2|$$

(B3):

$$q_1 \leqslant |q_1| \wedge q_2 \leqslant |q_2| \implies q_1 + q_2 \leqslant |q_1| + |q_2| \qquad (1)$$

$$-q_1 \leqslant |q_1| \wedge -q_2 \leqslant |q_2| \implies -(q_1 + q_2) \leqslant |q_1| + |q_2| \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$|q_1 + q_2| = \max\big(q_1 + q_2, -(q_1 + q_2)\big) \leqslant |q_1| + |q_2|. \qquad \blacksquare$$

$\mathbb{Q}$ ist aber leider nicht groß genug!

2.25 Satz $\nexists\, c \in \mathbb{Q}$ *mit* $c^2 = 2$.

Beweis. Wir benötigen folgende Hilfsaussage:

$$n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}^1 \implies n^2 = \underbrace{(\underbrace{n-1}_{\text{gerade}}) \cdot n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n}_{\text{ungerade}} \text{ ungerade.} \qquad (\star)$$

Nun zum eigentlichen Beweis. Annahme: $\exists\, c \in \mathbb{Q}$: $c^2 = 2$. O.B.d.A.[2] sei $c > 0$ [denn $c = 0$ nicht möglich. Falls $c < 0 \implies \tilde{c} := -c > 0$ und $\tilde{c}^{\,2} = 2$.]

$$\begin{aligned}
&\implies \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd}^3\text{: } c = \frac{p}{q}\\
&\implies 2 = c^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2 \text{ gerade}\\
&\overset{(\star)}{\implies} p \text{ gerade, also } p = 2\tilde{p} \text{ mit } \tilde{p} \in \mathbb{N}\\
&\implies q^2 = 2\tilde{p}^{\,2} \text{ gerade} \overset{(\star)}{\implies} q \text{ gerade}\\
&\implies p, q \text{ nicht teilerfremd } \lightning \implies \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

■

2.4 Endliche Summen

In diesem Abschnitt sei $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ ein Körper.

2.26 Definition *Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k \in \mathbb{K}$. Dann erklärt für alle $n \in \mathbb{N}$ die rekursive Definition*

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die (endliche) ***Summe****. In informeller Schreibweise,* $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Analog für alle $\varnothing \neq M$, M endlich[4], sowie $a_m \in \mathbb{K}$ für alle $m \in M$: $\sum_{m \in M} a_m := \sum_{k=1}^{n} a_{\Phi(k)}$

(unabhängig von Wahl der Bijektion). Falls $M = \varnothing$, setze $\sum_{m \in M} a_m := 0$*, ebenso* $\sum_{k=1}^{0} a_k := 0$.

2.27 Beispiel

- Der Name des Summationsindex ist belanglos:

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = \sum_{j=1}^{3} j = \sum_{j=0}^{2} (j+1) = \sum_{k=2}^{4} (k-1).$$

---

[1] $z \in \mathbb{Z}$ gerade $:\Longleftrightarrow z/2 \in \mathbb{Z}$; z ungerade $:\Longleftrightarrow z$ nicht gerade.

[2] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Dazu synonym: ohne Einschränkung (o.E.).

[3] $p = np'$ und $q = nq'$ für $n, p', q' \in \mathbb{N} \implies n = 1$.

[4] M endlich $:\Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ und Bijektion $\Phi : \{1, \ldots, n\} \to M$ (siehe auch später).

- **GAUSS'sche Summenformel**
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
Beweis: siehe Tutorium.

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$
Beweis per Induktion: $n = 0$: $0 = 0$ ✓
$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2n+1+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{n^2} = (n+1)^2$ ✓

- **Geometrische Summe:** $\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$:
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{mit } q^k := \underbrace{q \dots q}_{k \text{ Faktoren}} \qquad \textbf{\textit{k}-te Potenz}$$
Beweis: siehe Übung.

2.28 Definition (a) *Für $j \in \mathbb{N}$ sei $a_j \in \mathbb{K}$. Wir definieren rekursiv das (endliche)* ***Produkt***

$$\prod_{j=1}^{1} a_j := a_j, \quad \prod_{j=1}^{n+1} a_j := a_{n+1} \prod_{j=1}^{n} a_j, \qquad n \in \mathbb{N},$$

in informeller Schreibweise $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$.

Analog für $\emptyset \neq M$, M *endlich und* $a_m \in \mathbb{K}$ *für alle* $m \in M$: $\prod_{m \in M} a_m := \prod_{j=1}^{n} a_{\Phi(j)}$, *unabhängig von Wahl der Bijektion* $\Phi : \{1, \dots, n\} \to M$.

Falls $M = \emptyset$, *setze* $\prod_{m \in M} a_m := 1$, *ebenso* $\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$.

Speziell gilt für die Potenz $a^n = \prod_{j=1}^{n} a$, $a \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0$, *insbesondere* $a^0 = 1\ \forall a \in \mathbb{K}$.

Negative Exponenten: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}\ \forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (\Longrightarrow\ (a^{-n})^{-1} = a^n)$

(b) *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei die* ***Fakultät*** *definiert als*

$$n! := \prod_{j=1}^{n} j = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

(c) *Für $q \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{Z}$ sei der **Binomialkoeffizient** definiert als*

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} \frac{q+1-j}{j} & , k \geqslant 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases}$$

und speziell für $q = n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} & , k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

2.29 Satz (Binomischer Satz) *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned} (x+y)^0 &= 1 \\ (x+y)^1 &= x+y \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

Beweis. Per Induktion:
$n = 0$: klar, s.o.
$n \to n+1$: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y$

$$\begin{aligned} (x+y)^n x &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} && \text{aus Ind.voraus.} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} && \text{da } \binom{n}{-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^n y &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && \text{da } \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k = n+1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{= \binom{n+1}{k} \rightsquigarrow \text{ Übung!}} x^k y^{n+1-k}.$$ ■

2.30 Korollar *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

Beweis. Wähle $x = y = 1$ bzw. $-x = y = 1$. ■

2.5 Folgen, Grenzwerte und Reihen

Im Folgenden ist $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$. (Gebraucht wird ein archimedisch geordneter, bewerteter Körper $\mathbb{K} \supset \mathbb{Z}$.)

2.31 Definition *Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist eine Abbildung* $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{K} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$.
Alternative Notation: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.
Analog mit „verschobener“ Indexmenge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\geq 10}$.
Falls keine Verwechslung möglich, auch abkürzend $(a_n)_n$.

2.32 Beispiel

(a) konstante Folge $(a, a, a, \dots)$ mit $a \in \mathbb{K}$.

(b) alternierende Folge $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$.

(c) geometrische Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{K}$.

(d) Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, rekursiv definiert durch $a_0 := 0, a_1 := 1, a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.33 Definition *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge und $a \in \mathbb{K}$.*

(a) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **konvergent** (gegen a)* $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0^5\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \colon |a_n - a| < \varepsilon$
Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. *Sprechweise: a ist **Limes** oder **Grenzwert***
<u>Beachte:</u> Reihenfolge der Quantoren impliziert $N = N(\varepsilon)$ hängt von ε ab.

(b) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **Nullfolge*** $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergent** (oder: nicht konvergent) in $\mathbb{K}$* $:\Longleftrightarrow \nexists\, a \in \mathbb{K} \colon \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(d) *Spezialfälle von* (c)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \textbf{\textit{(bestimmt) divergent nach}}\ \boldsymbol{\infty} \ :\Longleftrightarrow\ \forall s\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\colon a_n>s$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \textbf{\textit{(bestimmt) divergent nach}}\ \boldsymbol{-\infty} \ :\Longleftrightarrow\ \forall s\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\colon a_n<-s$$

Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty,\ a_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ *bzw.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty,\ a_n\xrightarrow{n\to\infty}-\infty.$

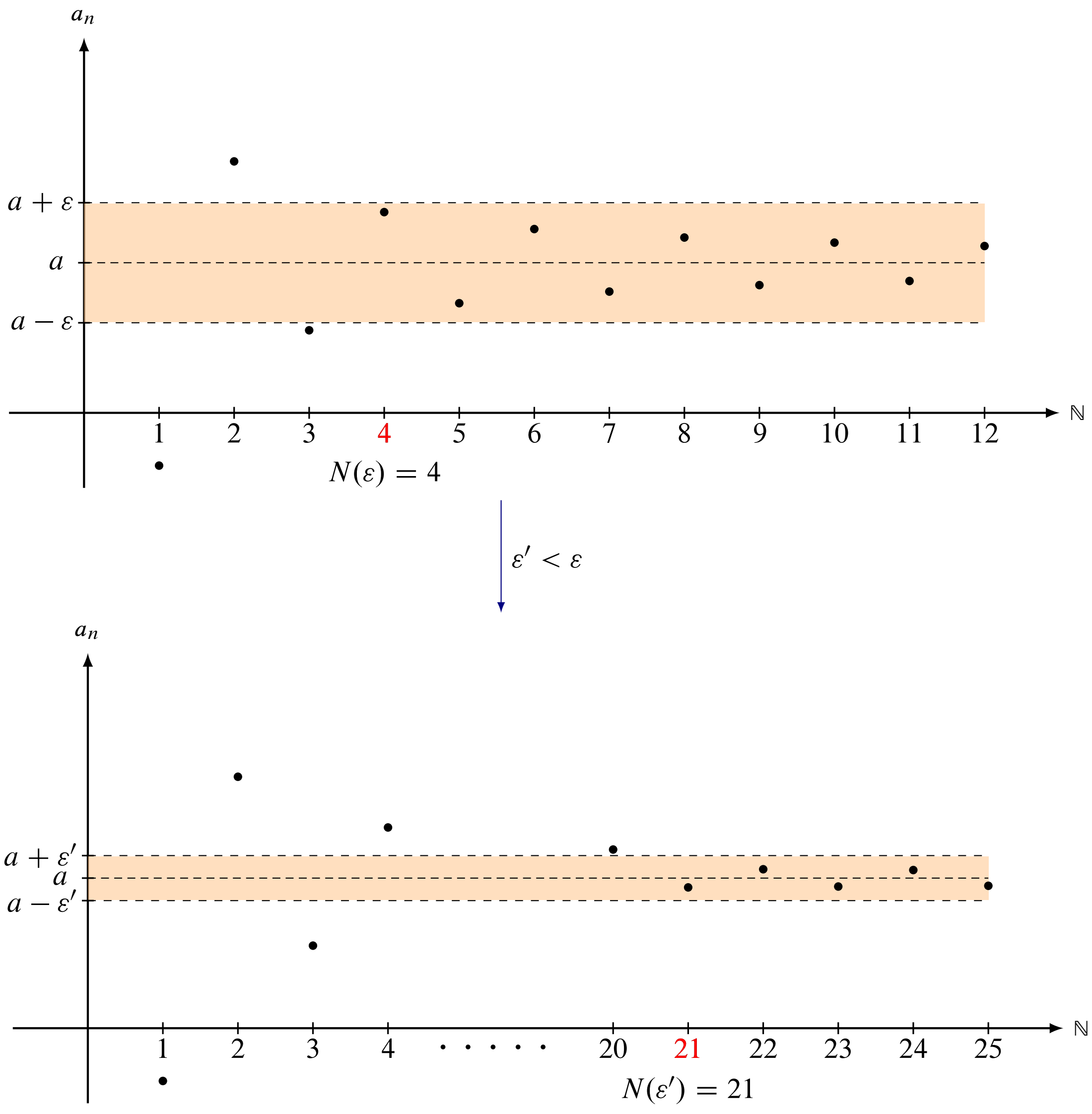


Abbildung 2.2: Zur Definition des Begriffs der Folgenkonvergenz

---

[5] Kurzform für: $\forall\varepsilon\in\mathbb{K},\varepsilon>0$.

2.34 Beispiel In Beispiel 2.32 gilt:

(a) konvergiert gegen a: $N = 1$ mögliche Wahl für alle $\varepsilon > 0$.

(b) divergent: $\varepsilon \leqslant 1$ erlaubt keine Wahl von N (was auch immer a ist). Beweis per Widerspruch: Annahme: $((-1)^n)_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad \Longrightarrow \quad$ für $\varepsilon = 1\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \leqslant N\colon |a_n - a| < \varepsilon = 1$. Sei nun $n \geqslant N$. Andererseits gilt (sogar $\forall n \in \mathbb{N}$)

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leqslant} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2 \quad \lightning.$$

(c) und (d) Übung!

Desweiteren (nicht in Beispiel 2.32):

(e) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, da $\forall \varepsilon > 0$ (beliebig, aber fest!) gilt $\exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ 1 < N\varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geqslant N\colon\ 0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

2.35 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts) *Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{K}$ eine Folge, seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sowie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Dann gilt $a = b$.*

Beweis. Annahme: $a \neq b$. Dann folgt für $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - b| > 0$

$$\begin{aligned} &\exists N_a \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_a\colon |a_n - a| < \varepsilon \text{ und} \\ &\exists N_b \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_b\colon |a_n - b| < \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad &\forall n \geqslant \max\{N_a, N_b\}\colon |a - b| \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leqslant} |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = |a - b| \ \lightning. \end{aligned}$$

■

2.36 Definition *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge.*

$$(a_n)_n \ \textbf{\textit{beschränkt}} \ :\Longleftrightarrow \ \exists S \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leqslant S.$$

*Analog definiert ist die **Beschränktheit***

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{von oben}} \ &:\Longleftrightarrow \ \exists S \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leqslant S, \\ \textbf{\textit{von unten}} \ &:\Longleftrightarrow \ \exists S \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geqslant S. \end{aligned}$$

2.37 Satz *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge. Dann gilt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}.$$

Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$.

$$\implies \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon |a_n - a| < 1 \implies \forall n \geqslant N\colon |\underbrace{a_n}_{a_n - a + a}| < |a| + 1$$

Wähle $S \in \mathbb{N}$ so, dass $S \geqslant |a| + 1$ und $S \geqslant |a_n|$ $\forall n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ (ist stets möglich) $\implies \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leqslant S$. ■

2.38 Bemerkung Die Umkehrung des Satzes ist im Allgemeinen falsch! Dafür wähle zum Beispiel $a_n := (-1)^n$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber divergent gemäß Beispiel 2.34(b).

Hilfreich beim Berechnen von Limiten ist der folgende Satz.

2.39 Satz (Summe und Produkt konvergenter Folgen) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit Limiten a und b, dann gilt*

(a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$,

(b) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

Beweis. (a) Übung.

(b) Aus Satz 2.37 folgt, dass $(a_n)_n$ beschränkt ist, das heißt, $\exists\, S \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leqslant S \wedge |b| \leqslant S$.
Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig $\overset{(a_n)_n, (b_n)_n \text{ kgt.}}{\implies} \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ |a_n - a| < \tilde{\varepsilon} \wedge |b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$.

$$\overset{\forall n \geqslant N}{\implies} |a_n b_n - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant \underbrace{|a_n|}_{\leqslant S}\ \underbrace{|b_n - b|}_{<\tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|b|}_{\leqslant S}\ \underbrace{|a_n - a|}_{<\tilde{\varepsilon}} < 2S\tilde{\varepsilon}.\ (\star)$$

<u>Beweiskosmetik:</u> O.E. sei $S \neq 0$ oben. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2S}$

$$\overset{(\star)}{\implies} \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ |a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

Dies hätte man auch von Anfang an machen können! ■

2.40 Satz (Quotient konvergenter Folgen) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit Limiten a und $b \neq 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass*

(a) $\forall n \geqslant N\ :\ b_n \neq 0$,

(b) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n \geqslant N}$ *ist konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Beweis. (a) $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \neq 0 \implies$ für $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\implies \forall n \geqslant N\colon\ \underbrace{|b| \leqslant \underbrace{|b - b_n|}_{<\frac{|b|}{2}} + |b_n|}_{\implies |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \qquad (\star)}$$

Aus Satz 2.24 folgt, dass $b_n \neq 0$.

(b) Es genügt zu zeigen: $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geqslant N}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, denn dann folgt die Behauptung mittels Satz 2.39.
Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig $\implies \exists N' \geqslant N\ \forall n \geqslant N'\colon |b_n - b| < \varepsilon$

$$\overset{\forall n \geqslant N'}{\implies} \Bigg|\underbrace{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}}_{\frac{b_n - b}{b_n b}}\Bigg| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\overset{(\star)}{<} \frac{2}{|b|}} \frac{1}{|b|}\, |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\, \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\implies$ Behauptung. (Für Beweiskosmetik ersetze ε durch $\varepsilon |b|^2/2$.) ■

2.41 Beispiel (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overset{\text{Bsp. 2.34(e)}}{=} 0$.

$\implies$ (1) $\frac{13}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wegen Satz 2.39(b)

(2) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wegen Satz 2.39(b) $\implies \frac{2}{n^2} \to 0$ wegen Satz 2.39(b)

(3) $3 + \frac{13}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 3$ wegen (1) $\wedge$ Satz 2.39(a)

(4) $1 - \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ wegen (2) $\wedge$ Satz 2.39(a)

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ wegen (3), (4) und Satz 2.40(b).

(b) $a_n := n, b_n := 1, c_n := a_n + b_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.
$\implies$ “$\pm\infty$“ ist nur ein formales Symbol, insbesondere $\notin \mathbb{K}$, und es liegt keine Konvergenz vor! (Sonst $\infty + 1 = \infty \overset{\text{kürzen in } \mathbb{K}}{\implies} 1 = 0$ ↯)

Analogon von Satz 2.40 für $b = 0$.

2.42 Satz *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Nullfolge und $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \qquad (\textit{bzw.} \ -\infty).$$

Beweis. Fall $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Fall $a_n < 0$ analog):
Sei $S \in \mathbb{N}$ beliebig, dann folgt aus der Tatsache, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist,

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N\colon \ \underbrace{0 < a_n < \frac{1}{S}}_{\iff \frac{1}{a_n} > S} .$$

■

2.43 Satz (Verträglichkeit von lim und Ordnung) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis. Wir zeigen nur: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folge mit $c_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n \geqslant 0.$$

(Behauptung folgt dann mit Satz 2.39(a) und $c_n := b_n - a_n$)
Angenommen: $c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n < 0$

$$\begin{aligned} &\implies \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N\colon \ |\underbrace{c_n}_{\geqslant 0} - \underbrace{c}_{<0}| < \frac{|c|}{2} \\ &\implies c_n - c < \frac{-c}{2} \\ &\implies c_n < \frac{c}{2} < 0 \ \lightning \end{aligned}$$

■

2.44 Warnung! Auch wenn sogar $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt doch nur

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

im Allgemeinen. Beispiel: $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $b_n > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.45 Korollar *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine konvergente Folge und sei $A, B \in \mathbb{K}$, so dass $A \leqslant a_n \leqslant B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant B.$$

2.46 Definition *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{K}$.*

- ***Partialsumme*** $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad N \in \mathbb{N}$
- ***Reihe*** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: *Folge* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$
- ***Summe der Reihe***: *falls* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *konvergent ist, setze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N$$

Jargon: ***Reihe konvergent***

Vorsicht: selbes Symbol für Reihe und deren Summe!

Analog gelten diese Definitionen auch für $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.

2.47 Bemerkung Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ Folge. Darstellung als **Teleskopsumme** $\forall N \in \mathbb{N}$

$$a_{N+1} = a_1 + \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n).$$

2.48 Beispiel Zeige die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ ← **Partialbruchzerlegung**

$$\overset{\text{Teleskopsumme}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{N+1} + 1 \quad \Longrightarrow$$

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} = 1.$$

2.49 Satz (Geometrische Reihe) *Sei $q \in \mathbb{Q}$. Die* ***geometrische Reihe*** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist*

- *konvergent* $\Longleftrightarrow |q| < 1.$ *In diesem Fall gilt* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n = \frac{1}{1-q}.$
- *divergent* $\Longleftrightarrow |q| \geqslant 1.$

Beweis. Sei $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} q^n$ für $N \in \mathbb{N}$.

1. Fall $q = 1 \implies S_N = N + 1 \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$ d.h. bestimmt divergent nach $+\infty$.

2. Fall $q = -1 \implies S_N = \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 0 & N \text{ ungerade} \end{cases} \implies$ divergent.

3. Fall $|q| > 1$ oder $|q| < 1 \implies S_N = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (gültig für $q \neq 1$ gemäß Übung).
Übung $\implies q^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ für $|q| < 1$ und divergent für $|q| \geqslant 1$. Im konvergenten Fall erhält man mittels Satz 2.39 den Grenzwert $\dfrac{1}{1-q}$. ■

2.50 Definition *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge.*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{\textit{ Cauchy-Folge}} :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geqslant N\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Anschaulich bedeutet die Definition, dass die Glieder einer Cauchy-Folge schließlich immer näher zusammenrücken. Die Eigenschaft der Cauchy-Folge ist eine notwendige Bedingung für Konvergenz:

2.51 Satz *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine konvergente Folge, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\overset{\text{Kvgz.}}{\implies} \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\colon |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \implies$
$\forall n, m \geqslant N\colon |a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$. ■

Die Umkehrung von Satz 2.51 gilt nur in den allerbesten Welten...

2.52 Definition *Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch geordneter, bewerteter Körper.*

$\mathbb{K}$ ***vollständig*** $:\Longleftrightarrow$ *jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert.*

2.53 Satz *$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.*

Beweis. Heron-Verfahren (= babylonisches Wurzelziehen). Sei $0 < c \in \mathbb{Q}$, definiere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ durch

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Folge ist wohldefiniert, da mittels vollständiger Induktion gezeigt werden kann, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 < a_n \in \mathbb{Q}$. Um den Satz zu beweisen, zeigen wird die folgenden vier Behauptungen.

1. Beh. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\colon a_n^2 \geqslant c$.
Die Aussage folgt aus „arithmetisches Mittel“ $\geqslant$ „geometrisches Mittel“:

$\forall q,r \in \mathbb{Q}:\ (q-r)^2 \geqslant 0 \implies (q^2+r^2)/2 \geqslant qr$ und damit auch
$[(q+r)/2]^2 = (q^2+r^2)/4 + qr/2 \geqslant qr$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 \geqslant a_n \cdot \frac{c}{a_n} = c. \qquad \checkmark$$

2. Beh. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = c$ und $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\colon a_{n+1} \leqslant a_n$.

Der Fehler (oder Abweichung) sei für alle $n \geqslant 2$ definiert als $f_n := a_n^2 - c \overset{\text{1.Beh.}}{\geqslant} 0.$

$$\begin{aligned}
\implies\quad f_{n+1} + c = a_{n+1}^2 &= \left[\frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})\right]^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(f_n + 3c + \frac{c^2}{\underbrace{f_n + c}_{\underbrace{\frac{c^2+f_nc}{f_n+c}}_{c} - \underbrace{\frac{f_nc}{f_n+c}}_{\geqslant 0}}}\right)\\
&\leqslant c + \frac{1}{4} f_n
\end{aligned}$$

$$\implies\quad 0 \leqslant f_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} f_n \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Daraus folgt $\forall n \geqslant 2$

(1) $0 \leqslant f_n - f_{n+1} \leqslant a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})\underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{>0\ \text{(1.Beh.)}}$

$\implies\ a_n - a_{n+1} \geqslant 0.$

(2) mittels Induktion: $0 \leqslant f_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} f_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Nullfolge gemäß Übung)

$\implies\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge nach Sandwich-Satz (Übung!). $\checkmark$

3. Beh. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.
2. Behauptung und Satz 2.51 $\implies$ $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy.

$$\begin{aligned}
&\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geqslant N\colon\ |a_n^2 - a_m^2| < \varepsilon\\
&\implies |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{(a_n + a_m)} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Wähle $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $c \geqslant \frac{1}{l^2} \overset{\text{1.Beh.}}{\implies} a_n \geqslant \frac{1}{l} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{(\star)}{\implies} |a_n - a_m| < \frac{l}{2}\,\varepsilon \qquad \checkmark$$

4. Beh. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert in $\mathbb{Q}$ für $c = 2$.
Annahme: $\exists\, a \in \mathbb{Q}\colon a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Dann folgt aus Satz 2.39(b)

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \overset{\text{2.Beh}}{=} c \qquad \implies \qquad \lightning \text{ zu Satz 2.25.}$$

Aus der 3. und 4. Behauptung folgt, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist. ■

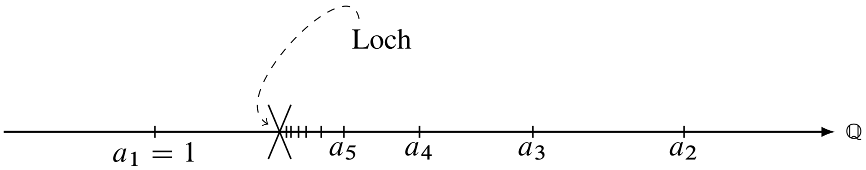


Abbildung 2.3: Moral für $c = 2$: Fehlender Grenzwert a in $\mathbb{Q}$, so dass $a^2 = 2$.

2.6 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Ziel: Menge $\mathbb{Q}$ hat „Löcher“. Vervollständige $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme der Löcher zu einer „kontinuierlichen Zahlengerade ohne Löcher“.

Frage: Mit welchem mathematischen Objekt kann das Loch eindeutig beschrieben werden?

Antwort: Cauchy-Folge (denn das Loch ist dort, wo sich die Folgenglieder verdichten).

Problem: Es gibt verschiedene Cauchy-Folgen, die sich zu dem selben Loch verdichten. Ausweg...

2.54 Definition *Sei* $\mathrm{CF}(\mathbb{Q}) := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \colon (a_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge} \}$.

Äquivalenzrelation auf $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$:

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \ :\Longleftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

Menge der ***reellen Zahlen***: $\mathbb{R} := \mathrm{CF}(\mathbb{Q})/_\sim$ *„$\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$.“*

Vervollständigung ist ein sehr wichtiges Konzept in der modernen Analysis.

2.55 Definition *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit Repräsentanten $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$.*

(a) *Addition und Multiplikation reeller Zahlen*

$$x + y := [(a_n + b_n)_n] \quad \in \mathbb{R}$$
$$xy := [(a_n b_n)_n] \quad \in \mathbb{R}$$

(b) *Ordnungsrelation*

$$x \leqslant y \ :\Longleftrightarrow\ \exists \text{Nullfolge } (\eta_n)_n \subset \mathbb{Q}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \colon a_n \leqslant b_n + \eta_n$$

(c) *Wie üblich sei*

$$x < y :\Longleftrightarrow (x \leqslant y \wedge x \neq y)$$
$$\overset{\text{Überprüfen!}}{\Longleftrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ \forall n \geqslant N \colon a_n < q_1 < q_2 < b_n$$
$$x \geqslant y :\Longleftrightarrow y \leqslant x$$
$$x > y :\Longleftrightarrow y < x$$

2.56 Lemma *Die obigen Definitionen sind wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, und* $(a_n + b_n)_n, (a_n b_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$.

Beweis. (a) „+“ • Sei $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m, n \geqslant N \colon |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Longrightarrow |c_n - c_m| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leqslant} \underbrace{|a_n - a_m|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|b_n - b_m|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon \Longrightarrow \text{Cauchy} \checkmark$$

• Seien $(\tilde{a}_n)_n \in x, (\tilde{b}_n)_n \in y$ andere Repräsentanten, d.h. $(\tilde{a}_n - a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $(\tilde{b}_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Setze $\tilde{c}_n := \tilde{a}_n + \tilde{b}_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\tilde{c}_n - c_n) \overset{\text{Satz } 2.39(a)}{=} (\tilde{a}_n - a_n) + (\tilde{b}_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0.$ ✓

„$\cdot$“ analog. (b) Übung. ■

2.57 Bemerkung Da für alle $(a_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ und für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \overset{\text{Def. von } \sim}{\Longleftrightarrow} (a_n)_n \in [(q, q, \ldots)],$$

ist es üblich via

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ q & \mapsto & [(q, q, \ldots)] \end{array} \qquad (\textbf{Einbettungsabbildung})$$

$\mathbb{Q}$ mit $i(\mathbb{Q})$ zu identifizieren und somit als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anzusehen, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Notation: schreibe q statt $[(q, q, \ldots)]$. Mehr Rechtfertigung dazu in Teil (e) von

2.58 Satz (a) $\mathbb{R}$ *ist ein Körper.*

	neutrales Element	*inverses Element zu* $x = [(a_n)_n] \in \mathbb{R}$
Addition	$0 = [(0, 0, \ldots)]$	$[(-a_n)_n] =: -x$
Multiplikation	$1 = [(1, 1, \ldots)]$	$[(1/a_n)_n] =: 1/x$ *(nur für* $x \neq 0$*)*[6]

(b) $(\mathbb{R}, \leqslant)$ *ist total geordnet und für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt genau eine der drei Aussagen*

- $x < 0$
- $x = 0$
- $x > 0$.

(c) *Die Ordnung* $\leqslant$ *auf* $\mathbb{R}$ *ist archimedisch, siehe Lemma* 2.22(a).

(d) $\mathbb{R}$ *ist ein bewerteter Körper mit Absolutbetrag*

$$|\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| := \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \end{array}$$

das heißt, es gilt (B0) – (B3) *aus Satz* 2.24.

(e) *Alle Operationen auf* $\mathbb{R}$ *sind verträglich mit denen auf* $\mathbb{Q}$.

---

[6] Präziser: gemäß Satz 2.40 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N : a_n \neq 0$. Ein Repräsentant für das inverse Element ist $[(1/\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ mit

Beweis. (a) Strategie: Führe auf entsprechende Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ zurück. Hier nur exemplarisch für „+“ kommutativ:

$$\underbrace{x}_{[(a_n)_n]} + \underbrace{y}_{[(b_n)_n]} = [\underbrace{(a_n + b_n)}_{\substack{b_n+a_n,\text{ denn}\\ \text{in } \mathbb{Q} \text{ kommutativ}}}] = [(b_n)_n] + [(a_n)_n] = y + x.$$

(b) Übung!

(c) Zu zeigen: $\forall \varepsilon, R \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon, R > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$: $R < \varepsilon n$.
Sei $\varepsilon = [(\delta_k)_k]$, $R = [(q_k)_k]$.

- $\varepsilon > 0 \implies \exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0, \exists K \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant K$: $\delta_k > \delta$ $(> \delta/2 > 0)$
- $(q_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q}) \implies (q_n)_n$ beschränkt, also $\exists q \in \mathbb{Q}, q > 0, \forall k \in \mathbb{N}$: $|q_k| < q$

$$\overset{\mathbb{Q}\text{ archimedisch}}{\implies} \exists n \in \mathbb{N}\colon\ q < n\delta$$

$$\implies \forall k \geqslant K\colon\ q_k < q < n\delta < n\delta_k \iff R < n\varepsilon \quad \checkmark$$

(d) Hilfsbehauptung: $\forall (a_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ ist $(|a_n|)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ und $\underbrace{|[(a_n)_n]|}_{\text{Betrag in } \mathbb{R}} = [(\underbrace{|a_n|}_{\text{Betrag in } \mathbb{Q}})_n]$ $(\star)$

denn: sei $x := [(a_n)_n] \implies$

- Untere Dreiecksungl.: $\big||a_n| - |a_m|\big| \leqslant |a_n - a_m|\ \forall n, m \in \mathbb{N} \implies (|a_n|)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$
- 1. Fall: $x \geqslant 0$. Zu zeigen: $(a_n)_n \sim (|a_n|)_n$.
  Da $x \geqslant 0\ \exists$ Nullfolge $(\eta_n)_n \subset \mathbb{Q}$: $0 \leqslant a_n + \eta_n$ o.E. sei $\eta_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies 0 \leqslant |a_n| - a_n = \left.\begin{cases} 0, & a_n \geqslant 0 \\ -2a_n, & a_n < 0 \end{cases}\right\} \leqslant 2\eta_n$$

$$\overset{\text{Satz 2.43}}{\implies} (|a_n| - a_n)_n \subset \mathbb{Q} \text{ ist Nullfolge } \checkmark$$

2. Fall: $x < 0$: analog, da $x < 0 \implies x \leqslant 0$.

Nun zu (B0) – (B3): (B0) klar, da $\mathbb{R}$ total geordnet.

(B1)
- $|x| \geqslant 0$ klar per Definition.
- $|x| = 0 \iff x = 0$: „$\Leftarrow$“ klar per Definition.
  „$\Rightarrow$“ $0 = |x| \overset{(\star)}{=} [(|a_n|)_n] \implies (|a_n|)_n \sim (0, 0, \ldots) \iff (|a_n|)_n$ ist Nullfolge $\implies (a_n)_n \sim (0, 0, \ldots)$, d.h. $x = 0$ ✓

(B2)

$$|xy| = |\underbrace{[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n]}_{[(a_nb_n)_n]}| \overset{(\star)}{=} [(\underbrace{|a_nb_n|}_{\substack{=|a_n|\cdot|b_n|\\ \text{wegen } (B2) \text{ in } \mathbb{Q}}})_n] = [(|a_n|)_n][(|b_n|)_n]$$

$$\overset{(\star)}{=} |[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] = |x| \cdot |y|$$

$\widetilde{a}_n := a_n$ für $n \geqslant N$ und $\widetilde{a}_n := 1$ für $1 \leqslant n < N$. Die Wahl endlich vieler Glieder – oder deren Weglassen – hat keinen Einfluss auf die Äquivalenzklasse.

(B3)
$$|x+y| = |\underbrace{[(a_n)_n]+[(b_n)_n]}_{[(a_n+b_n)_n]}| \overset{(\star)}{=} [(\underbrace{|a_n+b_n|}_{\substack{\leqslant |a_n|+|b_n| \\ \text{wegen } (B3) \text{ in } \mathbb{Q}}})_n] \leqslant [(|a_n|)_n]+[(|b_n|)_n]$$
$$\overset{(\star)}{=} |[(a_n)_n]| + |[(b_n)_n]| = |x|+|y|$$

(e) Seien $p, q \in \mathbb{Q}$. Für die Rechenoperationen klar, z.B. für $+$ ($-, \cdot, /$ analog)

$$[(p,p,p,\dots)] + [(q,q,q,\dots)] = [(p+q, p+q, p+q, \dots)].$$

Ordnungsrelation: $[(p,p,p,\dots)] \leqslant [(q,q,q,\dots)] \iff p \leqslant q$

Denn: „$\Rightarrow$“ $\exists\,(\eta_n)_n \subset \mathbb{Q}$ Nullfolge $\exists\, N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N:\ p \leqslant q + \eta_n \overset{\text{Satz 2.43: } n\to\infty}{\Longrightarrow} p \leqslant q$.

„$\Leftarrow$“ klar. ■

2.59 Definition (a) *Eine* ***Folge*** $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *ist eine Abbildung* $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n \end{array}$.

(b) *Seien* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x :\iff \forall \varepsilon > 0$$[7] $$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n - x| < \varepsilon$$

2.60 Bemerkung Kapitel 2.5 über Folgen & Reihen verwendet nicht, dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, sondern nur, dass $\mathbb{K}$ ein bewerteter, archimedisch geordneter Körper mit $\mathbb{K} \supset \mathbb{Z}$ ist. Somit gelten alle Folgerungen aus diesem Kapitel auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.61 Satz *Sei* $(q_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ *und* $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} [(q_n, q_n, q_n, \dots)] = x \qquad \textit{(Konvergenz in } \mathbb{R}\textit{)}.$$

Kürzer mit der Notation aus Bemerkung 2.57*:* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Beweis. Sei $0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ archimedisch}}}{\Longrightarrow} \exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ 1 < \varepsilon k$. Per Definition einer Cauchy-Folge (in $\mathbb{Q}$) gilt

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N\colon\ |q_n - q_m| < \frac{1}{k}. \qquad \text{(hier: } 1/k \in \mathbb{Q} \text{ verwendet)}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n := x - [(q_n, q_n, \dots)] = [(q_m)_m] - [(q_n)_m] = [(q_m - q_n)_m]$, dann folgt aus der Tatsache, dass $|[(a_n)_n]| = [(|a_n|)_n]$ auch $|y_n| = [(|q_m - q_n|)_m]$ und somit für alle $n \geqslant N$

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Folglich haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ gezeigt. ■

<u>**Moral**</u>: Alle Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ konvergieren in $\mathbb{R}$ (Löcher in $\mathbb{Q}$ sind „gestopft“).

---

[7] Kurzform für: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

2.62 Definition *Sei* $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n_0 \in \mathbb{N}_0$ *und für alle* $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant -n_0$ *sei* $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. *Ein* ***b-adischer Bruch*** *ist eine Reihe der Form*

$$\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n b^{-n}$$

Für $b = 10$*: Dezimalbruch.*
Für $b = 2$ *: Dyadischer Bruch (Binärdarstellung).*

2.63 Satz *Mit der Notation von Definition 2.62 bezeichne* $S_N := \pm \sum_{n=-n_0}^{N} a_n b^{-n} \in \mathbb{Q}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant -n_0$, *die Partialsummen eines b-adischen Bruchs. Dann gilt:*

$$(S_N)_{N \geqslant -n_0} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q}),$$

somit $x := [(S_N)_{N \geqslant -n_0}] \in \mathbb{R}$ *und nach Satz 2.61 auch*

$$x = \lim_{n \to \infty} S_N = \pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n b^{-n} \qquad (\textit{Konvergenz in } \mathbb{R}).$$

Beweis. Seien $M, N \in \mathbb{Z}$ mit $-n_0 \leqslant M \leqslant N$

$$\implies |S_N - S_M| = \left| \pm \sum_{n=M+1}^{N} a_n b^{-n} \right| \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} b^{-(n-1)} \leqslant \sum_{n=M+1}^{\infty} b^{-(n-1)}$$
$$= \frac{1}{b^M} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} = \frac{1}{b^M} \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} \leqslant \frac{2}{b^M}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \overset{b>1}{\implies} \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{b^{N_0}} \overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leqslant} \frac{2}{1+N_0(b-1)} < \frac{2}{N_0(b-1)} \overset{\mathbb{R}\text{ archim.}}{<} \varepsilon$
$\overset{\forall M,N \geqslant N_0}{\implies} |S_N - S_M| < \varepsilon.$ ■

2.64 Satz *Sei* $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *und* $x \in \mathbb{R}$. *Dann existiert* $\sigma \in \{-1, 1\}$, *so dass unter Verwendung der Notation von Definition 2.62 gilt*

$$x = \sigma \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \qquad (\textit{Konvergenz in } \mathbb{R}).$$

Moral:
- Jedes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren.
- $\mathbb{R}$ ist z.B. die Menge aller Dezimalbrüche ($b = 10$)

$$\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \pm a_{-n_0} \ldots a_0\,,\, a_1 a_2 a_3 \ldots\,.$$

Achtung, die Darstellung ist nicht eindeutig: so gilt z.B. $1 = 0,\overline{9} := 0,999\ldots$!

Beweis von Satz 2.64. Sei $x \in \mathbb{R}$, o.B.d.A. sei $x > 0$ [$x = 0$ klar; falls $x < 0$, betrachte $-x > 0$]. Da $b > 1 \implies$

$$\exists\, n \in \mathbb{N}_0\colon\ x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.58(c)}}}{\overset{\mathbb{R}\text{ archim.}}{<}} (n+1)(b-1) < 1 + (n+1)(b-1) \overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leqslant} b^{n+1}.$$

Sei n_0 die kleinste Zahl aus $\mathbb{N}_0$, für die diese Aussage wahr ist,[8] das heißt

$$n_0 := \min\big\{n \in \mathbb{N}_0 : x < b^{n+1}\big\}.$$

<u>Behauptung:</u> $\forall N \in \mathbb{Z}, N \geqslant -n_0, \forall n \in \{-n_0, -n_0+1, \ldots, N\}\ \exists\, a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $\exists\, \xi_N \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant \xi_N < b^{-N}$:

$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N.$$

Aus der Behauptung folgt direkt der Satz, da $\lim\limits_{N\to\infty} \xi_N = 0$.
Beweis der Behauptung mit Induktion nach N.
<u>Induktionsanfang</u> $N = -n_0$: nach Definition von n_0 gilt

$$0 \leqslant x b^{-n_0} < b \qquad \implies \qquad \exists_1\, a_{-n_0} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}\ \exists_1\, 0 \leqslant \delta < 1\colon\ x b^{-n_0} = a_{-n_0} + \delta$$

Setze $\xi_{-n_0} := b^{n_0}\delta$, also $0 \leqslant \xi_{n_0} < b^{n_0} \qquad \implies\ x = \dfrac{a_{-n_0}}{b^{-n_0}} + \xi_{-n_0} \qquad \checkmark$

<u>Induktionsschritt</u> $N \to N+1$:

Sei $x = \displaystyle\sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$ mit $0 \leqslant \xi_N < b^{-N} \implies 0 \leqslant \xi_N b^{N+1} < b$.

$$\implies \quad \exists_1\, a_{N+1} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}\ \exists_1\, 0 \leqslant \delta < 1\colon\ \xi_N b^{N+1} = a_{N+1} + \delta.$$

Setze $\xi_{N+1} := \delta b^{-(N+1)} \implies 0 \leqslant \xi_{N+1} < b^{-(N+1)}$ und $x = \displaystyle\sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \underbrace{\xi_N}_{\frac{a_{N+1}}{b^{N+1}} + \xi_{N+1}}.$ ■

2.65 Satz (Cauchy) *$\mathbb{R}$ ist vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine beliebige, aber fixe Cauchy-Folge.

<u>1. Akt</u> Konstruktion von $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ als Kandidat für Grenzwert x.
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \in \mathbb{R} \implies \exists\, \big(\tau_k^{(n)}\big)_k \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ mit $x_n = \big[\big(\tau_k^{(n)}\big)_k\big]$

$$\overset{\text{Satz 2.61}}{\implies} \lim_{k\to\infty} \tau_k^{(n)} = x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{0}$$

---

[8] Die Minimalforderung an $n_0 \in \mathbb{N}_0$ stellt lediglich sicher (siehe Induktionsanfang weiter unten im Beweis), dass für Zahlen $|x| \geqslant 1$ die führende Ziffer a_{-n_0} in der b-adischen Entwicklung $\neq 0$ ist.

Ohne Einschränkung gelte $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$\bigl|\tau_{k_1}^{(n)} - \tau_{k_2}^{(n)}\bigr| < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

[Für gegebenes n stimmt dies immer $\forall k_1, k_2$ groß genug, da $\bigl(\tau_k^{(n)}\bigr)_k$ eine Cauchy-Folge ist; modifiziere Anfangsglieder, so dass es passt (oder wegstreichen) $\Longrightarrow$ gültig $\forall k_1, k_2$.]
Setze $q_n := \tau_n^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Jargon: $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ ist eine **Diagonalfolge**.

2. Akt Wir zeigen $(q_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$, somit ist $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \implies \forall k, m, n \in \mathbb{N}$

$$|q_m - q_n| = \bigl|\tau_m^{(m)} - \tau_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)} + \tau_k^{(n)} - \tau_n^{(n)}\bigr| \overset{(1)}{<} \frac{1}{m} + \bigl|\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}\bigr| + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Da $(x_n)_n$ Cauchy $\implies \exists\, \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant \tilde{N}\colon |\underbrace{x_m - x_n}_{\left[\left(\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}\right)_k\right]}| = \bigl[\bigl(\bigl|\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}\bigr|\bigr)_k\bigr] < \varepsilon$

$$\overset{\text{Def.} < \text{in } \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad \exists K \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant K\colon \bigl|\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}\bigr| < \varepsilon.$$

Wähle $k \geqslant K$ in (2) $\implies \forall m, n \geqslant N := \max\{\tilde{N}, 1/\varepsilon\}\colon |q_m - q_n| < 3\varepsilon$. ✓

3. Akt Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$.
Aus (0) $\wedge$ (1) mit $k_1 = n$ und $k_2 \to \infty$ folgt $|q_n - x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\implies \lim_{n\to\infty} |q_n - x_n| = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}). \tag{3}$$

Andererseits aus der Definition von x und Satz 2.61: $\lim\limits_{n\to\infty} |q_n - x| = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R})$. (4)

Wegen $0 \leqslant |x_n - x| \leqslant |x_n - q_n| + |q_n - x| \overset{(3),(4)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. ■

2.66 Bemerkung

- Satz 2.65 rechtfertigt Bezeichnung von $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$.
- Vollständigkeit ist ein wesentlicher Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.
- Ab jetzt wird nicht mehr benötigt, dass $\mathbb{R} \ni x = [(q_n)_n]$!
- $\varepsilon > 0$ steht ab jetzt abkürzend für $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

2.67 Definition *Seien $\mathcal{D}$, M total geordnete Mengen und $f : \mathcal{D} \to M$ eine Funktion. Dann ist f*

(a) *(monoton)* ***wachsend*** *[auch:* ***isoton****]* $:\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2\colon f(x_1) \leqslant f(x_2)$

(b) *(monoton)* ***fallend*** *[auch:* ***antiton****]* $:\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2\colon f(x_1) \geqslant f(x_2)$

(c) ***streng/strikt*** *(monoton)* ***wachsend*** $:\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2\colon f(x_1) < f(x_2)$ *[auch:* ***strikt isoton****]*

(d) ***streng/strikt*** *(monoton)* ***fallend*** $:\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2\colon f(x_1) > f(x_2)$ *[auch:* ***strikt antiton****]*

2.68 Satz *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ isoton (bzw. antiton). Dann gilt*

$$(x_n)_n \text{ konvergiert} \iff (x_n)_n \text{ von oben (bzw. unten) beschränkt.}$$

Schreibweise für monotone Konvergenz: $x_n \nearrow x$ (bzw. $x_n \searrow x$).

Beweis. „$\Rightarrow$" Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.37.

„$\Leftarrow$" Nur für isoton [antiton analog]. Nach Voraussetzung $\exists\, S \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leqslant S \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Annahme: $(x_n)_n$ divergent $\overset{\text{Satz 2.65}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ keine Cauchy-Folge, das heißt

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall N \in \mathbb{N}\; \exists\, m, n \geqslant N\colon\; |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Ohne Einschränkung sei $m > n \implies x_m - x_n \geqslant \varepsilon$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch geordnet

$$\implies \exists\, K \in \mathbb{N}\colon\; S - x_1 < K\varepsilon. \tag{$\star\star$}$$

$$\begin{array}{rlll}
\text{Nun wähle} & N = 1 \text{ in } (\star) & \implies \exists\, m_1 > n_1 \geqslant 1\colon & x_{m_1} - x_{n_1} \geqslant \varepsilon \\
\text{wähle} & N = m_1 \text{ in } (\star) & \implies \exists\, m_2 > n_2 \geqslant m_1\colon & x_{m_2} - x_{n_2} \geqslant \varepsilon \\
\vdots & \quad\vdots & \qquad\vdots & \qquad\vdots \\
\text{wähle} & N = m_{K-1} \text{ in } (\star) & \implies \exists\, m_K > n_K \geqslant m_{K-1}\colon & x_{m_K} - x_{n_K} \geqslant \varepsilon
\end{array}$$

$$\implies x_{m_K} - x_{n_1} = \sum_{k=1}^{K} \underbrace{(x_{m_k} - x_{n_k})}_{\geqslant \varepsilon} + \sum_{k=2}^{K} \underbrace{(x_{n_k} - x_{m_{k-1}})}_{\geqslant 0 \text{ (Isotonie)}} \geqslant K\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ (\star\star)}}{>} S - x_1$$

$$\implies x_{m_K} > S + \underbrace{x_{n_1} - x_1}_{\geqslant 0 \text{ (Isotonie)}} \geqslant S. \qquad \lightning$$

■

2.69 Definition *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine strikt isotone Folge, somit $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Dann heißt*

(a) $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ***Teilfolge*** *von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(b) $x \in \mathbb{R}$ ***Häufungspunkt*** *von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\iff \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$.*

2.70 Beispiel Seien $x_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $n_k := 2k$ und $m_k := 2k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

$$(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \big(\underbrace{(-1)^{2k}}_{1}\big)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (z_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = \big(\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1}\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

sind Teilfolgen der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir erhalten 1 und -1 als Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.71 Satz (BOLZANO–WEIERSTRASS) *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone, und damit wegen der Beschränktheit nach Satz 2.68 auch konvergente Teilfolge.*

2.72 Korollar *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis von Satz 2.71. Jargon: $m \in \mathbb{N}$ ist eine **Gipfelstelle** von $(x_n)_n \;:\Longleftrightarrow\; \forall n > m\colon\ x_m > x_n$.

<u>1. Fall</u> $(x_n)_n$ hat ∞-viele Gipfelstellen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$
$\Longrightarrow\ x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} > \dots$, d.h. $(x_{m_k})_k$ ist eine antitone Teilfolge.

<u>2. Fall</u> $(x_n)_n$ hat keine oder nur endlich viele Gipfelstellen.
Sei m die größte Gipfelstelle, bzw. sei $m := 1$ falls diese nicht existent. Sei $n_1 > m$

$$\begin{aligned} n_1 \text{ keine Gipfelstelle} \quad &\Longrightarrow \exists n_2 > n_1\colon\ x_{n_2} \geqslant x_{n_1} \\ n_2 \text{ keine Gipfelstelle} \quad &\Longrightarrow \exists n_3 > n_2\colon\ x_{n_3} \geqslant x_{n_2} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Das heißt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine isotone Teilfolge. ■

2.73 Definition *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$*

(eigentliche) Intervalle

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \\ [a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \\ ]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \\ ]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{aligned}$$

(uneigentliche) Intervalle

$$\begin{aligned} [a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\} \\ ]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ ]-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\} \\ ]-\infty,a[&:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ ]-\infty,\infty[&:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

entartetes Intervall

$$[a,a] := \{a\}$$

Auch üblich: runde Klammern (a,b) für offene Intervallgrenzen $]a,b[$, bzw. $(a,b]$ statt $]a,b]$, usw.

2.74 Satz (Intervallschachtelungsprinzip) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k < b_k$ $J_k := [a_k, b_k]$ und $|J_k| := b_k - a_k$. Falls zudem*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ \forall k \in \mathbb{N}\colon\ J_{k+1} \subseteq J_k \\ \bullet\ \ \lim\limits_{k\to\infty} |J_k| = 0 \end{array}\right\} \quad :\Longleftrightarrow\colon \ \textbf{\textit{Intervallschachtelung}},$$

so $\exists_1 x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Für dieses x gilt zudem: $a_k \nearrow x$ und $b_k \searrow x$.

Beweis. Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_k \leqslant b_l, \tag{$\star$}$$

denn sonst wäre $J_k \cap J_l = \varnothing$. Aus ($\star$) und

- da $(a_k)_k$ isoton, folgt mit Satz 2.68 $\quad \exists\, a \in \mathbb{R}\colon\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a.$
- da $(b_l)_l$ antiton, folgt mit Satz 2.68 $\quad \exists\, b \in \mathbb{R}\colon\ \lim\limits_{l\to\infty} b_l = b.$

$\overset{\text{Satz 2.39}}{\Longrightarrow}$ $b - a = \lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$. Sei also $x := a = b$. Dann folgt

$$\left.\begin{array}{lll} l \to \infty \text{ in } (\star) & \Longrightarrow & \forall k \in \mathbb{N}\colon a_k \leqslant x \\ k \to \infty \text{ in } (\star) & \Longrightarrow & \forall l \in \mathbb{N}\colon x \leqslant b_l \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall k\colon\ x \in J_k.$$

Jetzt bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Es gelte hierfür für alle $k \in \mathbb{N}\colon x, x' \in J_k \implies |x - x'| \leqslant b_k - a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \implies x = x'$. ■

Es folgen weitere Anwendungen der Konvergenzsätze.

2.75 Satz (Wurzel reeller Zahlen) *Sei* $x \in \mathbb{R}_> := \,]0,\infty[$ *und* $k \in \mathbb{N}$. *Dann* $\exists_1 r \in \mathbb{R}_>$, *so dass* $r^k = x$. *Diese Zahl schreiben wir als*

$$r := \sqrt[k]{x} =: x^{1/k},$$

und nennen sie die ***k-te Wurzel aus x***.

Beweis. Verallgemeinerung des babylonischen Wurzelziehens aus Satz 2.53 – Übung! ■

2.76 Definition (Rationale Potenzen reeller Zahlen) *Sei* $x \in \mathbb{R}_>$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *mit* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Setze*

$$x^q := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \in \mathbb{R}_>,$$

insbesondere $x^0 := 1$. *Für negative Exponenten siehe Definition* 2.28(*a*).
Desweiteren sei mit $\mathbb{Q}_> := \mathbb{Q} \cap \,]0,\infty[$

$$0^q := \begin{cases} 0, & q \in \mathbb{Q}_>, \\ 1, & q = 0. \end{cases} \qquad \text{(nicht definiert für negative Exponenten } q\text{)}$$

2.77 Satz (a) *Obiges ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Darstellung* $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}_>$ *und* $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ *gilt*

$$(xy)^q = x^q y^q, \qquad x^q x^r = x^{q+r}, \qquad (x^q)^r = x^{qr}.$$

Beweis. Übung. ■

2.78 Definition *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$.

- ***ε-Umgebung von a ∈ ℝ***: $U_\varepsilon(a) := \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\, \subset \mathbb{R}$
- $a \in \mathbb{R}$ *ist* ***Häufungspunkt*** *von* A $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ *enthält* $U_\varepsilon(a)$ ∞ *viele Elemente von* A
- A ***von oben (bzw. unten) beschränkt*** $:\Longleftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\colon\ x \leqslant S$ *(bzw.* $x \geqslant S$*)*

*S heißt **obere** (bzw. **untere**) **Schranke** von A.*

- *A **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$ A von oben und unten beschränkt.*

2.79 Bemerkung (a) $0 \in \mathbb{R}$ ist einziger Häufungspunkt von $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

(b) Genau jedes $a \in [0, 1]$ ist Häufungspunkt von $]0, 1[$ sowie von $[0, 1]$.

(c) Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ (z.B. b-adische Bruchapproximation).

(d) A beschränkt $\Longleftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\colon |x| \leqslant S$.

(e) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt $\Longleftrightarrow$ $\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

2.80 Definition *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $S, I \in \mathbb{R}$.*

- *S **Supremum** von A* $:\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet & S \text{ obere Schranke von } A \\ \bullet & \text{Für alle oberen Schranken } S' \text{ von } A \text{ gilt} : S \leqslant S' \end{cases}$

  (auch: kleinste obere Schranke) Schreibweise: $S = \sup A$

  $\sup \varnothing := -\infty$ *und* $\sup A := +\infty$, *falls* $A \neq \varnothing$ *nicht von oben beschränkt*

- *I **Infimum** von A* $:\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet & I \text{ untere Schranke von } A \\ \bullet & \text{Für alle unteren Schranken } I' \text{ von } A \text{ gilt} : I \geqslant I' \end{cases}$

  (auch: größte untere Schranke) Schreibweise: $I = \inf A$

  $\inf \varnothing := \infty$ *und* $\inf A := -\infty$, *falls* $A \neq \varnothing$ *nicht von unten beschränkt*

- *S **Maximum** von A* $:\Longleftrightarrow$ $S = \sup A \ \wedge\ S \in A$ *Schreibweise:* $S = \max A$

- *I **Minimum** von A* $:\Longleftrightarrow$ $I = \inf A \ \wedge\ I \in A$ *Schreibweise:* $I = \min A$

2.81 Satz *Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: A besitzt genau ein Supremum und Infimum in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
Für nicht leere und von $\left\{\begin{matrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{matrix}\right\}$ *beschränkte Mengen A gilt zudem:* $\left\{\begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix}\right\} A \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nur für sup [inf analog]. Sei $\varnothing \neq A$ von oben beschränkt [sonst Beh. klar per def].
Sei $S_1 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A und $x_1 \in A$.

1. Akt $\exists$ Intervallschachtelung $[x_1, S_1] \supseteq [x_2, S_2] \supseteq [x_3, S_3] \supseteq \ldots$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$
   (a) $x_n \in A$
   (b) S_n ist obere Schranke von A
   (c) $0 \leqslant S_n - x_n \leqslant 2^{-(n-1)}(S_1 - x_1)$

   Beweis von (a), (b) per Induktion. $n = 1$: klar.

   $n \to n + 1$: Setze $M := \dfrac{1}{2}(x_n + S_n)$

1. Fall: $A \cap\,]M, S_n] = \varnothing \implies M$ ist obere Schranke und $x_{n+1} := x_n, S_{n+1} := M$ erfüllen (a), (b)

2. Fall: $A \cap\,]M, S_n] \neq \varnothing \implies$ wähle $x_{n+1} \in A \cap\,]M, S_n]\,, S_{n+1} := S_n \implies$ (a), (b) erfüllt.

Konstruktion zeigt auch: $0 \leqslant S_{n+1} - x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(S_n - x_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ (c)

$\overset{\text{Satz 2.74}}{\implies} S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ existiert (sogar antitone Konvergenz: $S_n \searrow S$).

2. Akt S ist Supremum (damit notwendigerweise eindeutig!)

- Sei $x \in A$ beliebig $\overset{\forall n \in \mathbb{N}}{\implies} x \leqslant S_n \implies x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \implies S$ ist obere Schranke.
- Sei S' obere Schranke von A. Annahme: $\underbrace{S' < S}_{\iff 0<S-S'}$. Dann $\exists\, n \in \mathbb{N}$ (genügend groß):

$$S_n - x_n \leqslant 2^{-(n-1)}(S_1 - x_1) < S - S' \overset{(S_n)_n \text{ antiton}}{\leqslant} S_n - S'$$

$\implies S' \leqslant x_n$ ↯, da $x_n \in A$ und S' obere Schranke. Also $S \leqslant S'$. ■

2.82 Beispiel Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

- $\sup\,[a,b] = \sup\,[a,b[\, = b, \quad \inf\,[a,b] = \inf\,]a,b] = a$
- $a = \min\,[a,b]\,, b = \max\,[a,b]$, $[a,b[$ hat kein Maximum, $]a,b]$ hat kein Minimum.
- $\sup\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$, hat aber kein Maximum.

2.83 Definition

- *Mittels der Vereinbarungen* $-\infty < r < \infty \quad \forall r \in \mathbb{R}$, $\infty \leqslant \infty$ *und* $-\infty \leqslant -\infty$ *ist* $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$ *total geordnet.*
- *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$y_n^+ := \sup\{\, x_k \in \mathbb{R} : k \geqslant n \,\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad y_n^- := \inf\{\, x_k \in \mathbb{R} : k \geqslant n \,\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

$\implies (y_n^+)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n^-)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ *sind antiton bzw. isoton.*

Limes superior:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} y_n^+, & \textit{falls } \lim \textit{ existiert} \\ -\infty, & \textit{falls } (y_n^+)_n \textit{ bestimmt divergent nach } -\infty \\ \infty, & \textit{falls } (y_n^+)_n = (\infty, \infty, \dots) \end{cases}$$

Limes inferior:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} y_n^-, & \textit{falls } \lim \textit{ existiert} \\ \infty & \textit{falls } (y_n^-)_n \textit{ bestimmt divergent nach } \infty \\ -\infty, & \textit{falls } (y_n^-)_n = (-\infty, -\infty, \dots) \end{cases}$$

NB: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *und* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *existieren stets in* $\overline{\mathbb{R}}$ (lim *nicht notwendigerweise in* $\overline{\mathbb{R}}$).

2.84 Satz *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Setze*

$$H := \big\{h \in \mathbb{R} : \ h \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_n\big\},$$

also $\varnothing \neq H \subset \mathbb{R}$ nach Korollar 2.72. Dann besitzt H ein Maximum und ein Minimum und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max H \ (\textit{größter Häufungspunkt}), \ \liminf_{n\to\infty} x_n = \min H \ (\textit{kleinster Häufungspunkt}).$$

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für lim sup [für lim inf alles analog].

1. Akt H besitzt ein Maximum $M = \max H$.
Sei $M := \sup H < \infty$ (Folge beschränkt!) und $j \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $M - \frac{1}{j}$ keine obere Schranke

$$\implies \quad \exists\, h_j \in H\colon \ M - \tfrac{1}{j} < h_j \leqslant M \tag{$*$}$$

Zeige nun $M \in H$ ($\implies M = \max H$):

$$\overset{(*)}{\implies} \quad \exists\, \delta_j > 0\colon \ U_{\delta_j}(h_j) \subseteq U_{\frac{1}{j}}(M).$$

h_j ist Häufungspunkt von $(x_n)_n \implies \exists$ Teilfolge $(x_{n_k^{(j)}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $\exists\, K_j \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant K_j$: $x_{n_k^{(j)}} \in U_{\delta_j}(h_j) \subseteq U_{\frac{1}{j}}(M)$. Definiere rekursiv Diagonalfolge

$$m_1 := n_{K_1}^{(1)} \qquad \text{und} \qquad m_{j+1} := \max\big\{n_{K_{j+1}}^{(j+1)}, m_j + 1\big\} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$\implies (m_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ ist strikt isoton, also $(x_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge und
$\forall j \in \mathbb{N}: \ |x_{m_j} - M| < \frac{1}{j} \implies \lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j} = M \implies M \in H.$ ✓

2. Akt $M = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n =: S$.

Beh.: $M \leqslant S$. N.V. ist $M \in H \implies \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$: $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} M$

$$\overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\implies} y_n^+ \geqslant \sup\big\{x_{n_j} \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N} \text{ mit } n_j \geqslant n\big\} \geqslant M$$
$$\overset{n\to\infty}{\implies} S \geqslant M. \qquad ✓$$

Beh.: $M \geqslant S$. Annahme: $M < S \implies \exists\, \delta > 0\colon \ S > M + \delta$

$$\implies \forall n \geqslant \mathbb{N}\colon \ y_n^+ > M + \delta$$
$$\implies \exists \text{ Teilfolge } (x_{\ell_k})_{k\in\mathbb{N}} : \ x_{\ell_k} > M + \delta \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Wegen } (x_n)_n \text{ beschränkt} \overset{\text{Satz 2.71}}{\implies} (x_{\ell_k})_k \text{ hat Häufungspunkt } \widetilde{h} \geqslant M + \delta$$
$$\implies \exists \text{ Teilfolge } (x_{l_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}\colon \ \lim_{m\to\infty} x_{\ell_{k_m}} = \widetilde{h}$$
$$\implies \widetilde{h} \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_n \implies \widetilde{h} \in H$$
$$\lightning \text{ da } \widetilde{h} > M = \max H.$$

■

2.85 Beispiel $\limsup_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = \infty, \ \liminf_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = 0.$

2.7 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

<u>Motivation:</u> Wir suchen einen mathematischen Rahmen für Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

2.86 Definition *Menge der* ***komplexen Zahlen*** $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *mit den zwei Verknüpfungen*

$$⨹ : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

$$◬ : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{array}$$

2.87 Satz $(\mathbb{C}, ⨹, ◬)$ *ist ein Körper mit*

	$⨹$	$◬$
neutrales Element	$(0, 0)$	$(1, 0)$
inverses Element zu $z = (x, y)$	$-z := (-x, -y)$	$\frac{1}{z} := z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ [*nur für* $z \neq (0, 0)$]

Beweis. Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von $⨹$ und $◬$ folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Assoziativität von $◬$ benötigt eine kurze Rechnung $\rightsquigarrow$ Übung. ■

2.88 Bemerkung Die Abbildung $J : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x, 0) \end{array}$ ist ein *Körperhomomorphismus*, das heißt verträglich mit den Körperoperationen. Deshalb identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$, so dass dann auch $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. <u>Notation:</u> $x := (x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit gilt unter Weglassung von $\triangle$:

2.89 Lemma *Seien* $z := (x, y) \in \mathbb{C}$ *und* $\mathrm{i} := (0, 1) \in \mathbb{C}$, *so gilt*

(a) $\mathrm{i}^2 = -1$,

(b) $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$,

(c) $z = x + \mathrm{i}y$.

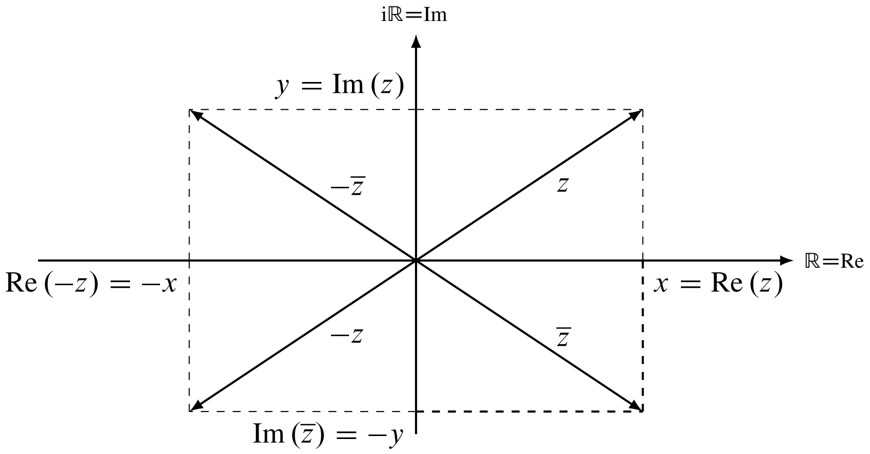


Abbildung 2.4: Darstellung einer komplexen Zahl z im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und ihrer Spiegelungen $\overline{z}, -z, -\overline{z}$.

Beweis. (a), (b): klar. (c) Mittels einfacher Identifizierung folgt

$$z = (x,0) \mathbin{⨹} (0,y) = \begin{array}{ccccc} (x,0) & ⨹ & (0,1) & ◬ & (y,0). \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & + & \mathrm{i} & \cdot & y \end{array}$$

■

2.90 Definition *Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ sei*

- $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ ***komplexe Konjugation*** *(entspricht Spiegelung an x-Achse!)*
- $\mathrm{Re}\,z := x$ ***Realteil*** *(reellwertig!)*
- $\mathrm{Im}\,z := y$ ***Imaginärteil*** *(reellwertig!)*

Daraus lassen sich sofort die im nächsten Lemma genannten Rechenregeln herleiten (Beweis klar).

2.91 Lemma *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten*

(a) $\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2},$

(b) $z = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z, \quad \mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}),$

(c) $z_1 = z_2 \iff \big(\mathrm{Re}\,z_1 = \mathrm{Re}\,z_2 \wedge \mathrm{Im}\,z_1 = \mathrm{Im}\,z_2\big),$

(d) *Falls* $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$ $\quad$ *<u>NB</u>:* $z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2 \overset{(c)}{>} 0.$

Standardtrick, um $\frac{1}{z}$ in Real- und Imaginärteil zu zerlegen!

2.92 Satz *Die Betragsabbildung*

$$|\cdot|: \begin{array}{ccl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = (z \cdot \overline{z})^{1/2} \end{array}$$

erfüllt die Eigenschaften

(B0) *der Wertebereich von* $|\cdot|$ *ist total geordnet,*

(B1) $\forall z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \geqslant 0$ *und* $|z| = 0 \iff z = 0$,

(B2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

(B3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

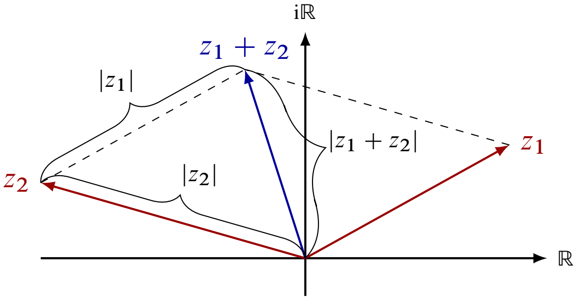
Somit ist $\mathbb{C}$ *ein bewerteter Körper, siehe Satz* 2.24.

Beweis. (B0) klar, (B1) klar wegen Lemma 2.91(c),

(B2) $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |\overline{z_1}|^2 |\overline{z_2}|^2$,

(B3) per Definition gilt $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$ und somit

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1|^2 + \underbrace{z_1 \overline{z_2} + \underbrace{\overline{z_1} z_2}_{\overline{z_1 \overline{z_2}}}}_{\underbrace{2\ \mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z_2})}_{\leqslant |z_1 \overline{z_2}| = |z_1||z_2|}} + |z_2|^2 \\ &\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$



■

Wir übertragen nun die Konvergenzbegriffe aus Kapitel 2.5 und 2.6.

2.93 Definition *Sei* $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ *eine Folge und* $z \in \mathbb{C}$.

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergent (in*** $\mathbb{C}$***) gegen*** z $\;:\iff\; \forall \varepsilon > 0^9\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ |z_n - z| < \varepsilon$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

2.94 Warnung! Da es keine natürliche Totalordnung auf $\mathbb{C}$ gibt, können wir

- bestimmte Divergenz nach ±∞
- Beschränktheit von oben/unten

---

[9] Nach wie vor: Kurzschreibweise für: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

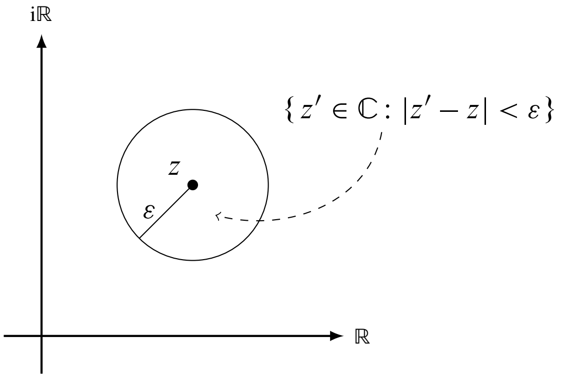


Abbildung 2.5: ε-Ball um $z \in \mathbb{C}$.

- Verträglichkeit von Limes und Ordnung
- Isotone/antitone Folgen
- Intervallschachtelungsprinzip
- obere/untere Schranken, Supremum, Infimum, Min/Max
- $\liminf$, $\limsup$

nicht von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ verallgemeinern!

2.95 Satz *Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Dann gilt*

$$(z_n)_n \textit{ konvergiert in } \mathbb{C} \iff (\operatorname{Re} z_n)_n \textit{ und } (\operatorname{Im} z_n)_n \textit{ konvergieren in } \mathbb{R}.$$

Im Fall der Konvergenz gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathrm{i} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Beweis. Sei $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$ mit $x_n := \operatorname{Re} z_n$, $y_n := \operatorname{Im} z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und sei $= x + \mathrm{i}y$ mit $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$.

„$\Rightarrow$“ $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z = x + \mathrm{i}y \implies \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\colon \underbrace{|z_n - z|^2}_{=|x_n-x|^2+|y_n-y|^2} < \varepsilon^2.$

„$\Leftarrow$“ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \wedge y_n \xrightarrow{n\to\infty} y.$

$$\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists N = \max\{N_x, N_y\} \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\colon \big(|x_n - x| < \varepsilon \wedge |y_n - y| < \varepsilon\big)$$
$$\implies |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon.$$ ■

2.96 Korollar *Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Dann gilt*

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \iff \overline{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}.$$

2.97 Bemerkung Die Definitionen von Cauchy-Folgen und konvergenten Reihen bleiben exakt die gleichen, bis auf die Ausnahme, dass der Betrag auf $\mathbb{R}$ durch den Betrag auf $\mathbb{C}$ aus Definition 2.92 ersetzt werden muss. Wegen Satz 2.95 und 2.98 überträgt sich alles weitere – mit Ausnahme der in obiger Warnung genannten Konzepte – auf Folgen $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$.

2.98 Satz *Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$(z_n)_n \subset \mathbb{C} \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{C} \iff \big(\mathrm{Re}\,(z_n)\big)_n, \big(\mathrm{Im}\,(z_n)\big)_n \subset \mathbb{R} \text{ Cauchy-Folgen in } \mathbb{R}.$$

Beweis. Analog zu Satz 2.95; ersetze Konvergenz-Kriterium durch Cauchy-Kriterium. ■

2.99 Korollar *$\mathbb{C}$ ist vollständig, das heißt jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent.*

Beweis. Übung! Verwende Satz 2.65 von Cauchy für $\mathbb{R}$. ■

Die reelle Version des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS für beschränkte Folgen liefert eine konvergente Teilfolge basierend auf der Konstruktion einer monotonen Teilfolge. Trotz des fehlenden Konzepts der Monotonie in $\mathbb{C}$ gibt es dennoch eine Variante für komplexe Zahlen.

2.100 Satz (Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS – Version für $\mathbb{C}$) *Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ beschränkt, das heißt*

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |z_n| \leqslant S,$$

dann hat $(z_n)_n$ mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Übung! Verwende Sätze 2.95 und 2.71. ■

2.8 Mächtigkeit von Mengen

2.101 Definition *Seien M, N Mengen.*

- *M und N **gleichmächtig*** $:\iff$ *$\exists$ Bijektion $M \to N$*
- *M **endlich*** $:\iff$ $M = \varnothing$ *oder* $\big(\exists n \in \mathbb{N}$ *und Bijektion* $\{1, \dots, n\} \to M\big)$
  <u>*Schreibweise:*</u> $n := |M| := \#(M)$ *für Anzahl der Elemente von M* ($:= 0$, *falls* $M = \varnothing$).
- *M **abzählbar*** $:\iff$ *$\exists$ Surjektion $\mathbb{N} \to M$*
- *M **abzählbar unendlich*** $:\iff$ *$\exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to M$*
- *M **überabzählbar*** $:\iff$ *M nicht abzählbar.*

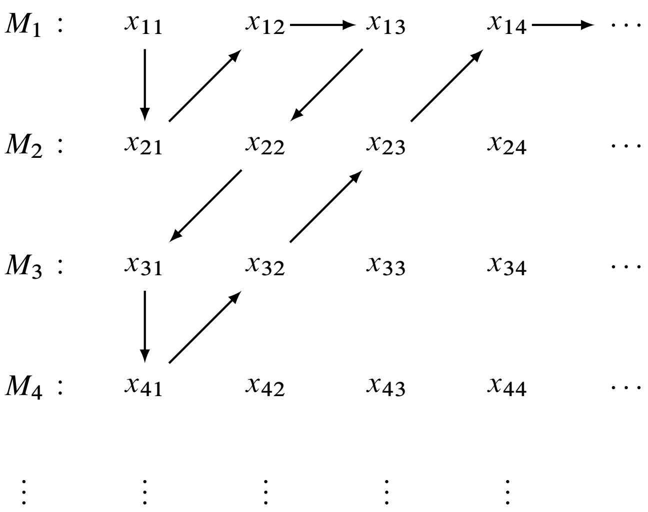


Abbildung 2.6: CANTOR'sches Diagonalverfahren.

2.102 Beispiel
- M endlich $\Longrightarrow$ abzählbar
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich

Der Ursprung der Notation $\mathscr{P}(M) = 2^M$ für die Potenzmenge liegt in

2.103 Satz *Sei M endliche Menge. Dann gilt* $|\mathscr{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

$$|(\mathscr{P}(M)| = \sum_{k=0}^{|M|} \underbrace{\big|\{ N \subseteq M : |N| = k \}\big|}_{\substack{\text{Anzahl Möglichkeiten } k \text{ Elemente} \\ \text{aus } |M| \text{ Elementen auszuwählen} \\ =\binom{|M|}{k}}} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} \overset{\text{Kor. 2.30}}{=} 2^{|M|}.$$

■

2.104 Satz *Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.*

Beweis. Mittels CANTORschem Diagonalverfahren (Abb. 2.6) ist eine Abzählung möglich. ■

2.105 Korollar $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} \Longrightarrow \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Da A_n abzählbar $\overset{\text{Satz 2.104}}{\Longrightarrow}$ Beh. ■

2.106 Satz *Endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar. Das heißt, für* $n \in \mathbb{N}$ *und für abzählbare* $M_1, \dots, M_n$ *ist*

$$\bigtimes_{k=1}^{n} M_k := M_1 \times \dots \times M_n$$

abzählbar.

Beweis. Per Induktion mit Cantorschem Diagonalverfahren. Details: Übung. ■

Achtung: die Aussage des letzten Satzes überträgt sich nicht auf unendliche kartesische Produkte! Stattdessen gilt

2.107 Satz *Die Menge*

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \bigtimes_{\mathbb{N}} \{0,1\} := \Big\{(a_1, a_2, a_3, \dots) : \ a_n \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}\Big\} = \big\{\mathbb{N} \to \{0,1\}\big\}$$

ist überabzählbar.

Beweis. Übung! ■

Der Beweis verwendet

2.108 Satz *Sei* M *eine Menge. Dann gibt es keine Surjektion* $M \to \mathscr{P}(M)$.

Beweis. <u>1. Fall</u> $M = \varnothing$. Dann gilt $\mathscr{P}(M) = \{\varnothing\} \implies |M| = 0$ und $|\mathscr{P}(M)| = 1$. ✓

<u>2. Fall</u> $M \neq \varnothing$. Annahme: $\exists$ Surjektion $\sigma : M \to \mathscr{P}(M)$

Setze $A := \{m \in M : m \notin \sigma(m)\} \overset{\forall m \in M}{\implies}$

$$m \in A \iff m \notin \sigma(m) \tag{$*$}$$

σ surjektiv $\implies \exists x \in M\colon \sigma(x) = A \overset{(*) \text{ mit } m = x}{\implies} \big[x \in A \iff x \notin \sigma(x) = A\big]$. ↯ ■

Der letzte Satz liefert sofort

2.109 Korollar $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *ist überabzählbar.*

2.110 Satz $\mathbb{R}$, *und somit auch die Menge der* ***irrationalen Zahlen*** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *ist überabzählbar.*

Beweis. Idee: ordne einer reellen Zahl $x \in \,]0,1[$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}}$ der Ziffern ihres b-adischen Bruchs aus Satz 2.64 zu.

Problem: wegen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{b^n}\right) = (b-1)\left(\frac{1}{1-1/b} - \frac{1-(1/b)^{N+1}}{1-1/b}\right) = \frac{1}{b^N}$$

$\forall N \in \mathbb{N}$ kann eine reelle Zahl 2 solcher Darstellungen besitzen: eine davon enthält dann einen periodischen Bruch mit der höchsten Ziffer $b-1$. Obige Zuordnung ist also *nicht* als surjektive Funktion realisierbar.

Ausweg: sei

$$\mathscr{D} := \left\{ x \in]0,1[: x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b^{-n}, a_n \in \{0,1,\ldots,b-2\} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

dann gibt es für $x \in \mathscr{D}$ keine Mehrdeutigkeit in der b-adischen Entwicklung $\Longrightarrow$

$$\exists\, \text{Surjektion: } \mathscr{D} \to \{0,1,\ldots,b-2\}^{\mathbb{N}} \overset{\mathbb{R} \supseteq \mathscr{D}}{\Longrightarrow} \exists\, \text{Surjektion: } \mathbb{R} \to \{0,1,\ldots,b-2\}^{\mathbb{N}}.$$

Die Behauptung folgt (mit $b = 3$) aus Satz 2.107, denn gäbe es eine Surjektion: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dann auch eine Surjektion: $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $\lightning$ Also ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar, so auch nach Satz 2.104 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. $\lightning$ ■

3

Stetige Funktionen

3.1 Funktionen von und nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Generalvoraussetzung: $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{K}$ und $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ eine Funktion.

3.1 Beispiel (allgemeine Beispiele für (nicht zwingend) stetige Funktionen)

- Konstante Funktion $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & c \end{array}$, $\quad c \in \mathbb{K}'$,
- Identität $\mathrm{id} := \mathrm{id}_{\mathbb{K}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x \end{array}$,
- Betragsfunktion $|\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{R}_{\geqslant} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$,
- (Quadrat-) Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant} & \to & \mathbb{R}_{\geqslant} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$,
- Ganzzahliger Anteil (Gauß-Klammer) $\lfloor\cdot\rfloor : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \end{array}$,
- Polynom n-ten Grades $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & p(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$,

  wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \mathbb{K}\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_n \neq 0$,
- Rationale Funktion $r : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$,

  wobei $p, q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynome und $\mathscr{D} := \mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} : q(x) = 0\}$,
- Dirichlet-Kamm $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{array}$

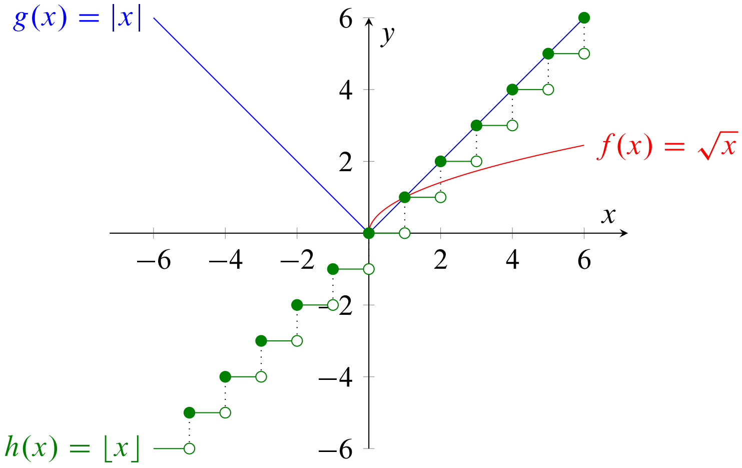


Abbildung 3.1: Graphen der Funktionen $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$, $\lfloor\cdot\rfloor$.

3.2 Definition (Operationen mit $\mathbb{K}'$-wertigen Funktionen) *Seien $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, so sind die folgenden Operationen punktweise erklärt*

- *Addition*

$$f+g: \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) =: (f+g)(x) \end{array}$$

- *Subtraktion*

$$f-g: \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & f(x)-g(x) =: (f-g)(x) \end{array}$$

- *Multiplikation*

$$f\cdot g: \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) =: (f\cdot g)(x) \end{array}$$

  Spezialfall: skalare Multiplikation für $\alpha \in \mathbb{K}'$: $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)\ \forall x \in \mathscr{D}$.

- *Division*

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{rcl} \mathscr{D}\setminus\{x \in \mathbb{K} : g(x) = 0\} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} =: \left(\frac{f}{g}\right)(x) \end{array}$$

- *Für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und für $\mathscr{R} \in \{\leqslant, <, =, \geqslant, >\}$*

$$f \mathscr{R} g :\Longleftrightarrow \mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g \ \wedge\ f(x) \mathscr{R} g(x)\ \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

3.3 Bemerkung

- Addition und Multiplikation von Funktionen sind kommutativ, assoziativ und distributiv.
- $\leqslant$ ist eine partielle (aber keine totale) Ordnungsrelation auf $\{f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R} \text{ mit } \mathscr{D}_f \subseteq \mathbb{K}\}$.

3.2 Limes einer Funktion

3.4 Definition *Sei* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ *und* $a \in \mathbb{K}$ *Häufungspunkt von* $\mathscr{D}$.

(a) ***Limes von f für x gegen a***

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existiert } \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{K}' \; \forall (x_n)_n \subset \mathscr{D} \setminus \{a\} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

Notation: $\lim_{x\to a} f(x) = y$.

<u>*Beachte:*</u>

- $\exists\, (x_n)_n \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ *mit* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, *da* a *ein Häufungspunkt ist.*
- *Der Grenzwert* y *ist unabhängig von der gewählten Folge* $(x_n)_n$.

(b) *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und falls* $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* $\mathscr{D} \cap]-\infty, a[$: ***linksseitiger Limes***

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) \text{ existiert } \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{K}' \; \forall (x_n)_n \subset \mathscr{D} \cap]-\infty, a[\text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

Notation: $\lim_{x\nearrow a} f(x) = y$.

Analog: ***rechtsseitiger Limes***

$$\lim_{x\searrow a} f(x) \text{ existiert } \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{K}' \; \forall (x_n)_n \subset \mathscr{D} \cap]a, \infty[\text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

Notation: $\lim_{x\searrow a} f(x) = y$.

(c) *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* $\mathscr{D}$ *von oben unbeschränkt:* ***Limes von f für x gegen ∞***

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ existiert } \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{K}' \; \forall (x_n)_n \subset \mathscr{D} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

Notation: $\lim_{x\to\infty} f(x) = y$. *Analog* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y$.

(d) *Falls* $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ *und es gilt in* (a), *dass* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ *für alle dort zugelassenen Folgen* $(x_n)_n$: ***(bestimmte) Divergenz von f nach ∞ für x gegen a***

Notation: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. *Beachte:* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existiert nicht!*

Analog für $-\infty$ *oder für die Situationen in* (b) *und* (c), *d.h.* $x \nearrow a,\ x \searrow a,\ x \to \pm\infty$.

(e) *Falls sogar* $a \in \mathscr{D}$, *jedoch kein Häufungspunkt von* $\mathscr{D}$ ($\Longleftrightarrow$: *a ist* ***isolierter Punkt*** *von* $\mathscr{D}$), *setze* $\lim_{x\to a} f(x) := f(a)$.

3.5 Beispiel Betrachte $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

3.6 Definition (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$)

- $\forall r \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}: \quad \infty + r := r + \infty := \infty$
- $\forall r \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}: \quad -\infty + r := r - \infty := -\infty$
- $\forall r \in \mathbb{R}_{>}\cup\{\infty\}: \quad (\pm\infty)\cdot r := r\cdot(\pm\infty) := \pm\infty$
- $\forall r \in \mathbb{R}_{<}\cup\{-\infty\}: \quad (\pm\infty)\cdot r := r\cdot(\pm\infty) := \mp\infty$
- $\forall r \in \mathbb{R}: \quad \frac{r}{\pm\infty} := r\cdot\frac{1}{\pm\infty} := \frac{1}{\pm\infty}\cdot r := 0$

Beachte: $\infty-\infty, -\infty+\infty, (\pm\infty)\cdot 0, 0\cdot(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *sind nicht definiert!*

3.7 Satz *Seien $f, g: \mathcal{D}\to\mathbb{K}'$, $a\in\mathbb{K}$ Häufungspunkt von $\mathcal{D}$, sowie $\lim_{x\to a} f(x) =: \varphi$ und $\lim_{x\to a} g(x) =: \psi$ existieren. Dann gilt*

(a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \varphi+\psi$,

(b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \varphi\psi$.

(c) *Falls $\psi \neq 0$, so ist a auch Häufungspunkt von $\widetilde{\mathcal{D}} := \{x\in\mathcal{D} : g(x)\neq 0\}$ und*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\varphi}{\psi}.$$

Es gelten außerdem noch die folgenden Zusätze

(Z1) *Falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: auch analog für $x\nearrow a,\ x\searrow a,\ x\to\pm\infty$.*

(Z2) *Falls $\mathbb{K}'=\mathbb{R}$:*
  - (a) und (Z1) *bleiben gültig für $\varphi,\psi\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ oder $\varphi,\psi\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$,*
  - (b) und (Z1) *bleiben gültig für $\varphi,\psi\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$,*
  - (c) und (Z1) *bleiben gültig für $\varphi\in\overline{\mathbb{R}}, \psi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ oder $\varphi\in\mathbb{R}, \psi\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$.*

Beweis. (a) Sei $(x_n)_n \subset \mathcal{D}\setminus\{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$$\Longrightarrow\ (f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.39}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \varphi+\psi.$$

(b) Analog zu (a).

(c) Zeige zuerst: a Häufungspunkt von $\widetilde{\mathscr{D}}$
a Häufungspunkt von $\mathscr{D} \implies \exists\,(x_n)_n \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $x_n \neq x_m \; \forall n \neq m$ [denn per Def. 2.78 eines Häufungspunkts existieren folgende Wahlmöglichkeiten: wähle $x_1 \in U_1(a) \setminus \{a\}$, wähle $x_2 \in U_{1/2}(a) \setminus \{a, x_1\}, \ldots$, wähle $x_n \in U_{1/n}(a) \setminus \{a, x_1, \ldots, x_{n-1}\}, \ldots$].
Da $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \psi \neq 0 \implies$ für obige Folge gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N\colon \underbrace{|g(x_n) - \psi| < \frac{|\psi|}{2}}$$

$$\implies g(x_n) \neq 0 \implies x_n \in \widetilde{\mathscr{D}}$$

$\implies$ jede ε-Umgebung von a enthält ∞-viele Punkte aus $\widetilde{\mathscr{D}}$. ✓

Sei nun $(x_n)_n \subset \widetilde{\mathscr{D}} \setminus \{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ beliebig $\implies \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.40}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \dfrac{\varphi}{\psi}$.

Die Zusätze werden analog bewiesen, exemplarisch hier (Z2) für (a) und $\varphi = \infty$, $\psi \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:
Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $x_n \neq a \; \forall n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{x\to a} g(x) = \psi \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \arrow[d, Rightarrow] & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{c}\exists\, U \in \mathbb{R}\; \forall n \in \mathbb{N}\colon \\ g(x_n) > U \\ \text{(hier geht ein, dass } \psi \neq -\infty) \end{array} \arrow[dr, Rightarrow] & \begin{array}{c}\forall S \in \mathbb{R}\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N\colon \\ f(x_n) > S - U \end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \forall n \geqslant N\colon (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) > S,
\end{tikzcd}$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \infty$. Da $(x_n)_n \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ bel. mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \infty$.
■

3.3 Stetigkeit

3.8 Definition *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$.*

(a)

$$\textbf{\textit{f folgenstetig in a}} \;:\Longleftrightarrow\; \forall (x_n)_n \subset \mathscr{D} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

(b)

$$\textbf{\textit{f stetig in a}} \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in \mathscr{D}\colon |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

<u>Moral:</u> sobald x nur nahe genug bei a liegt, dann liegt auch $f(x)$ nahe bei $f(a)$.

3.9 Satz *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$. Dann gilt*

$$f \text{ stetig in } a \iff f \text{ folgenstetig in } a\,.$$

Beweis. „⟹“ Sei $(x_n)_n \subset \mathscr{D}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt

$$\exists\,\delta > 0\ \forall x \in \mathscr{D}\colon\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Per Definition von $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ gilt

$$\begin{aligned} \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ &\underbrace{|x_n - a| < \delta} \\ &\implies |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

„⟸“ Beweis durch Kontraposition. Sei f ist nicht stetig in a, das heißt

$$\begin{aligned} &\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\, x \in \mathscr{D} \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon \\ \overset{\delta = n^{-1}}{\implies}\ &\exists\,\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in \mathscr{D} \text{ mit } |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon \\ \implies\ &\exists\,(x_n)_n \subset \mathscr{D} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a) \\ \implies\ &f \text{ nicht folgenstetig in } a\,. \end{aligned}$$

■

3.10 Bemerkung Wegen Satz 3.9 unterschieden wir fortan meist nicht zwischen folgenstetig und stetig. Der Grund für die Unterscheidung in ihrer Definition ist, dass in allgemeineren Räumen als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (topologische Räumen ohne 1. Abzählbarkeitsaxiom – siehe nächstes Semester) nur noch „stetig $\implies$ folgenstetig“ gilt, nicht aber die Umkehrung.

3.11 Satz *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$. Dann gilt*

$$f \text{ stetig in } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Beweis. Wir müssen 2 Fälle unterscheiden.

<u>1. Fall</u> a isolierter Punkt von $\mathscr{D}$.

- Die rechte Seite der Aussage gilt stets per Definition.
- Die linke Seite gilt auch stets wegen:

$$a \text{ isolierter Punkt von } \mathscr{D} \overset{\text{Übung}}{\iff} \begin{cases} \forall (x_n) \subset \mathscr{D} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt:} \\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\colon\ \underbrace{x_n = a} \end{cases}$$

$$\implies f(x_n) = f(a)$$

$$\implies \forall (x_n) \subset \mathscr{D} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a\ :\ f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a).$$

2. Fall a Häufungspunkt von $\mathscr{D}$.

„$\Rightarrow$“ Aussage klar, da links nach Definition 3.8(a) die Konvergenz für mehr Folgen gelten muss als rechts.

„$\Leftarrow$“ Annahme: f nicht stetig, also

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in \mathscr{D} \text{ mit } |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ und } \underbrace{|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon}_{\Longrightarrow x_n \neq a}.$$

Also $\exists\,(x_n)_n \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a)$ $\lightning$ zu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. ■

Der vorherige Beweis hat gezeigt

3.12 Korollar *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$ ein isolierter Punkt. Dann ist f stetig in a.*

3.13 Definition *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq \mathscr{D}$. Wir definieren*

- *f **stetig auf** A $:\Longleftrightarrow$ $\forall a \in A$: f stetig in a*
- *f **stetig** $:\Longleftrightarrow$ f stetig auf $\mathscr{D}$*

3.14 Beispiel (a) Jede konstante Funktion ist stetig,

(b) die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ ist stetig,

(c) jede Funktion der Form $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}'$ ist stetig.

3.15 Satz (Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig)
Seien $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ in $a \in \mathscr{D}$ stetige Funktionen. Dann gilt

(a) *$f + g$ ist stetig in a,*

(b) *fg ist stetig in a,*

(c) *falls $g(a) \neq 0$, so ist auch $\dfrac{f}{g} : \{x \in \mathscr{D} : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}'$ stetig in a.*

Beweis. Der Satz folgt aus Satz 3.11 zusammen mit Satz 3.7 bzw. Korollar 3.12. ■

3.16 Korollar *Jede rationale Funktion ist stetig.*

Beweis. Folgt aus Beispiel 3.14(a), (b) und Satz 3.15(a), (b), (c). ■

3.17 Satz (Verkettung stetiger Funktionen ist stetig) *Seien* $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{K}'$ *und* $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{K}''$, *wobei auch* $\mathbb{K}'' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Weiter sei* $a \in \mathcal{D}_f$, $f(a) \in \mathcal{D}_g \subseteq \mathbb{K}'$, *sowie*

- f *stetig in* a,
- g *stetig in* $f(a)$.

Dann ist $a \in \mathcal{D}_{g \circ f} := \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ *und* $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{K}''$ *stetig in* a.

Beweis. Sei $(x_n)_n \subset \mathcal{D}_{g \circ f}$ $(\subseteq \mathcal{D}_f)$ beliebig mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Da f stetig in a ist, folgt

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) =: y.$$

Nun ist $(y_n)_n \subset \mathcal{D}_g$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in \mathcal{D}_g$ und g stetig in y. Folglich

$$g(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(y),$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (g(\underbrace{f(x_n)}_{y_n}) = g(y) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. ■

3.18 Beispiel Sei f stetig $\overset{\text{Satz 3.17}}{\Longrightarrow}$ $|f|$ stetig, da $|f| = |\cdot| \circ f$ und $|\cdot|$ stetig ist (siehe Übung).

3.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

3.19 Satz *Sei* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ *stetig in* $a \in \mathcal{D}$.

(a) *Falls* $f(a) \neq 0$, *dann* $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}$ *mit* $|x - a| < \delta$ *gilt:* $f(x) \neq 0$.

(b) *Falls* $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ *und* $f(a) > 0$, *dann* $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}$ *mit* $|x - a| < \delta$ *gilt:* $f(x) > 0$.

(c) *Falls* $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ *und* $f(a) < 0$, *dann* $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}$ *mit* $|x - a| < \delta$ *gilt:* $f(x) < 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2}$, so ist nach Voraussetzung $\varepsilon > 0$. Da f stetig in a ist, folgt $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2} \tag{$\star$}$$

(a) $\overset{(\star)}{\Longrightarrow}$ $f(x) \neq 0$, sonst $|f(a)| < \dfrac{|f(a)|}{2}$ ↯.

(b) <u>Annahme:</u> $f(x) \leqslant 0 \overset{(\star)}{\Longrightarrow} f(a) - f(x) < \dfrac{f(a)}{2} \Longrightarrow \dfrac{f(a)}{2} < f(x) \leqslant 0$ ↯.

(c) analog zu (b) oder zurückführen auf (b) mittels $g := -f$. ■

Der folgende Satz gilt nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$.

3.20 Satz (Nullstellensatz von Bolzano) *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$. Dann gilt*

$$\exists\, \xi \in \,]a,b[\colon\; f(\xi) = 0.$$

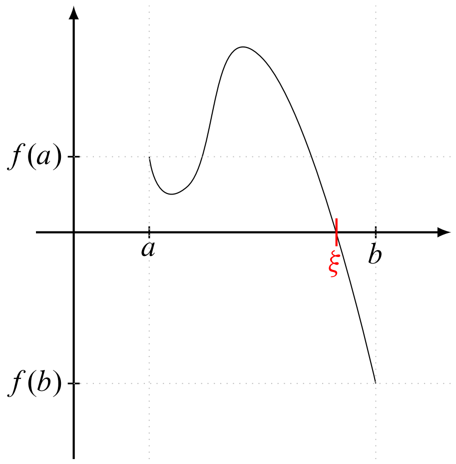


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der Situation im Nullstellensatz von Bolzano.

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Setze $A := \{\, x \in [a,b] : f(x) \geqslant 0 \} \subset \mathbb{R} \implies$

- $A \neq \varnothing$ (da $a \in A$),
- A von oben beschränkt (da b obere Schranke ist)

$\implies \xi := \sup A \in [a,b]$. Somit $\exists\, (x_n)_n \subset A\colon x_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$, denn $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\xi - n^{-1}$ keine obere Schranke, also $\exists\, x_n \in A \cap \,]\xi - n^{-1}, \xi]$. Da f stetig ist, folgt weiter

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \underset{\substack{\uparrow\\ f(b)<0}}{\implies} \xi \in [a,b[\,.$$

Annahme: $f(\xi) > 0 \overset{\text{Satz 3.19(b)}}{\implies} \exists\, \delta > 0\ \forall x \in \,]\xi - \delta, \xi + \delta[\, \cap [a,b]\colon\; f(x) > 0 \overset{]\xi,\xi+\delta[\cap[a,b]\neq\varnothing}{\implies}$ $\exists\, x_0 \in \,]\xi, b[\colon\; f(x_0) > 0 \implies x_0 \in A \lightning\ \xi = \sup A$. Somit haben wir $f(\xi) = 0$. ∎

Auch der nächste Satz gilt wieder nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$.

3.21 Korollar (Zwischenwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $m := \min\{f(a), f(b)\}$ und $M := \max\{f(a), f(b)\}$ an, das heißt*

$$\forall y \in [m, M]\ \exists\, x \in [a,b]\colon\; f(x) = y.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a) > f(b)$, denn der Fall „=“ ist trivial und der Fall „<“ analog.
Sei $y \in \,]f(b), f(a)[$ ein beliebiger Zwischenwert (die Fälle $y = f(a)$ und $y = f(b)$ sind klar!).
Setze $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := f(x) - y$, so gilt

- g stetig
- $g(a) > 0$
- $g(b) < 0$

und mit Satz 3.20 folgt $\exists\, \xi \in \,]a,b[\colon 0 = g(\xi) = f(\xi) - y$. ∎

3.22 Satz *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (uneigentliches Intervall erlaubt, das heißt auch Grenzen $\pm\infty$) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein (möglicherweise uneigentliches) Intervall.*

Beweis. <u>1. Fall</u> $f = a$ konstant $\implies f(I) = [a, a]$.

<u>2. Fall</u> f nicht konstant.

Mit $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (NB: $\overset{f \neq \text{const.}}{\implies} A < B$) gilt

$$f(I) \subseteq \begin{cases} [A, B], & \text{falls } A, B \in \mathbb{R}, \\ ]A, B], & \text{falls } A = -\infty, B \in \mathbb{R}, \\ [A, B[, & \text{falls } A \in \mathbb{R}, B = \infty, \\ ]A, B[, & \text{falls } A = -\infty, B = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Andererseits

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. von sup, inf}}{\implies} \quad \forall y \in]A, B[\ \exists a, b \in I\colon\ f(a) < y < f(b) \\ &\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\implies} \quad \forall y \in]A, B[\ \exists x \in]a, b[\colon\ f(x) = y \\ &\overset{]a,b[\subset I}{\implies} \quad]A, B[\subseteq f(I). \end{aligned} \tag{2}$$

$$(1) \wedge (2) \implies f(I) \in \big\{]A, B[, [A, B[,]A, B], [A, B] \big\}.$$ ■

3.23 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion) *Sei I (uneigentliches) Intervall mit $|I| > 0$, das heißt nicht ausgeartet. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton. Dann existiert $f^{-1} : f(I) \to I$ und ist stetig.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f strikt isoton (sonst betrachte $-f$). Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} existiert und ist strikt isoton.
<u>Annahme:</u> $\exists\, y \in f(I)$: f^{-1} nicht stetig in $y \implies$

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \exists\, (y_n)_n \subset f(I)\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |y_n - y| < \frac{1}{n} \text{ und } |\underbrace{f^{-1}(y_n)}_{=:\, x_n \in I} - \underbrace{f^{-1}(y)}_{=:\, x \in I}| \geqslant \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Insbesondere gilt $y_n \neq y$.

- Falls $y < y_n \implies x < \underbrace{x + \varepsilon}_{\in I,\text{ da } I \text{ Intervall}} \overset{(\star)}{\leqslant} x_n \implies f(x) < f(x + \varepsilon) \leqslant f(x_n) \overset{n \to \infty}{\implies}$ (da $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$)
  $$f(x) < f(x + \varepsilon) \leqslant f(x).\ \lightning$$
- Falls $y_n < y \implies x_n \overset{(\star)}{\leqslant} \underbrace{x - \varepsilon}_{\in I,\text{ da } I \text{ Intervall}} < x \implies f(x_n) \leqslant f(x - \varepsilon) < f(x)$. $\lightning$ wie oben. ■

3.24 Bemerkung

- f muss nicht stetig sein, damit f^{-1} es ist.
- Stärkere Voraussetzung: f stetig auf Intervall und injektiv $\implies f$ strikt monoton. Beweisskizze: per Widerspuch; zeige dann $\exists\, x_j \in I$, $j = 1, 2, 3$, mit $x_1 < x_2 < x_3$ und

$f(x_2) \geqslant \max\{f(x_1), f(x_3)\}$ oder $f(x_2) \leqslant \min\{f(x_1), f(x_3)\}$; $\lightning$ mit Zwischenwertsatz zur Injektivität.

3.25 Definition

$K \subset \mathbb{K}$ ***(folgen-)kompakt*** $:\iff \forall (x_n)_n \subset K \; \exists$ *Teilfolge* $(x_{n_k})_k \; \exists x \in K\colon \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

3.26 Beispiel (a) $K = [a,b]$ kompakt in $\mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$,

(b) $K = \overline{B}_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r \}$ kompakt in $\mathbb{C}$ für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$,

denn: K beschränkt $\overset{\text{Bolzano-W.}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n \subset K$ hat konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset K$. Wegen „$\leqslant$“ beziehungsweise abgeschlossenes Intervall gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

3.27 Satz *Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion f beschränkt ($:\iff f(K)$ ist beschränkt) und nimmt ihr Maximum und Minimum an:*

$$\exists x_+, x_- \in K\colon \; f(x_+) = \max f(K) \quad \textit{und} \quad f(x_-) = \min f(K).$$

Beweis. Sei $S := \sup f(K) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (Beachte: $S = \infty \iff f(K)$ nicht von oben beschränkt)

$$\Longrightarrow \; \exists \text{ Folge } (x_n)_n \subset K \text{ mit } f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} S. \quad \text{(Konvergenz oder best. Divergenz.)} \qquad (\star)$$

K kompakt $\Longrightarrow \; \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset K$ mit $x_+ := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Da f stetig $\Longrightarrow$

$$f(x_+) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(\star)}{=} S.$$

Also ist $S < \infty$, das Supremum wird als Maximum angenommen und $f(K)$ ist von oben beschränkt. Analog für $I := \inf f(K)$. Also ist f auch beschränkt. ■

3.28 Definition *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$.*

- ***f gleichmäßig stetig*** $:\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in \mathscr{D}$ *mit* $|x - x'| < \delta$:
  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

  Beachte: δ hängt nicht von x, $x' \in \mathscr{D}$ ab (Jargon: δ ist gleichmäßig in x, x').

- ***f Lipschitz-stetig*** $:\iff \exists C \in \,]0, \infty[\; \forall x, x' \in \mathscr{D}:$
  $|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$

3.29 Lemma *Für $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ gilt*

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \implies f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig.}$$

Beweis. Linke Implikation: wähle $\delta = \varepsilon / C$. Rechte Implikation: Klar, denn:
stetig $\iff \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathscr{D}\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in \mathscr{D}$ mit $|x - x'| < \delta$: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. ■

3.30 Satz *Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{K}'$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Annahme: f nicht gleichmäßig stetig auf $K \overset{\delta = 1/n}{\Longrightarrow}$

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, x_n' \in K \text{ mit } \underbrace{|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}}_{(1)} \text{ und } \underbrace{|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon}_{(2)}.$$

K kompakt $\implies$ $(x_n)_n$ hat konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $\xi := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \xi \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} f(x_{n'_k}) = f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \tag{3}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \forall k \in \mathbb{N}\colon \left|f(x_{n_k}) - f(x_{n'_k})\right| \geqslant \varepsilon \tag{4}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} 0 = \lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k}) - f(x_{n'_k})\right| \overset{(4)}{\geqslant} \varepsilon > 0. \quad ↯$$

■

3.5 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Illustration der Fragestellung dieses Abschnitts anhand von

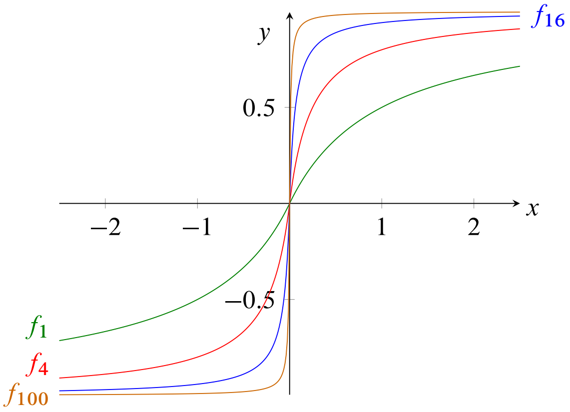
3.31 Beispiel

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\frac{1}{n} + |x|} \end{array}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: f_n stetig nach Beispiel 3.14(a), (b), Beispiel 3.18 und Satz 3.15.
Zudem existiert punktweise $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Die Funktion sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, obwohl punktweiser Limes stetiger Funktionen, ist unstetig! Der Stetigkeitsverlust kann vermieden werden, falls eine schärfere Konvergenzart vorliegt.

3.32 Definition *Sei $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{K}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$.*

(a)
$$\left.\begin{array}{r}\textit{Die Funktionenfolge } (f_n)_n \\ \textbf{\textit{konvergiert punktweise}} \textit{ gegen} \\ f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'\end{array}\right\} :\iff \left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathscr{D}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array}\right.$$

$$\Bigl(\iff \forall x \in \mathscr{D}\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\Bigr)$$

(b)
$$\left.\begin{array}{r}\textit{Die Funktionenfolge } (f_n)_n \\ \textbf{\textit{konvergiert gleichmäßig}} \textit{ gegen} \\ f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'\end{array}\right\} :\iff \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \\ \|f_n - f\|_\infty := \sup\limits_{x \in \mathscr{D}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array}\right.$$

Beachte: *in* (b) *hängt N nicht von x ab.* *Jargon: N ist „gleichmäßig“ in x.*

3.33 Bemerkung Aus gleichmäßger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz.

3.34 Beispiel Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.31 konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen sgn. Beweis durch Rechnung oder aber mit

3.35 Satz (Gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind stetig) *Sei $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{K}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ stetig und $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergent gegen $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x \in \mathscr{D}$ beliebig fest und $\varepsilon > 0$. Für alle $y \in \mathscr{D}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \tag{$\star$}$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ folgt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall \xi \in \mathscr{D}\colon |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$n = N$ in ($\star$) $\implies$

$$\forall y \in \mathscr{D}\colon |f(x) - f(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)|. \tag{$\star\star$}$$

(Beachte: ($\star\star$) wäre im Allgemeinen falsch, wenn N von ξ abhinge.)
Da f_N stetig in x ist, folgt

$$\exists \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0\ \forall y \in \mathscr{D} \text{ mit } |x - y| < \delta\colon |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit ($\star\star$) folgt $\forall y \in \mathscr{D}$ mit $|x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also f stetig in x. ■

4

Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung dieses Kapitels vertiefen wir zuerst ein wenig unser Verständnis über...

4.1 Reihen (2. Teil)

Zur Erinnerung aus Abschnitt 2.5: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k$ und

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ konvergiert } :\Longleftrightarrow \quad (S_N)_N \text{ konvergiert } \quad\Longleftrightarrow\quad (S_N)_N \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

4.1 Satz *Sei $(a_k)_k \subset \mathbb{K}$. Dann gilt* $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *konvergent* $\Longrightarrow$ $(a_k)_k$ *ist Nullfolge.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $(S_N)_N$ eine Cauchy-Folge, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geqslant N \colon \, |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Für $n = m + 1$ gilt $S_{m+1} - S_m = a_{m+1}$ und somit folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \, \forall m \geqslant N \colon \, |a_{m+1}| < \varepsilon.$$

■

4.2 Bemerkung Die Umkehrung „$\Longleftarrow$" des Satzes gilt nicht. Als Beispiel dient die *harmonische Reihe* $a_k = 1/k$ (siehe Übung).

4.3 Definition *Sei $(a_k)_k \subset \mathbb{K}$.*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \textit{ ist } \textbf{\textit{absolut konvergent}} \textit{ (in } \mathbb{K}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \textit{ ist konvergent (in } \mathbb{R}).$$

4.4 Satz *Sei $(a_k)_k \subset \mathbb{K}$. Dann gilt* $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *konvergent.*

4.5 Bemerkung Die Umkehrung „$\Longleftarrow$“ des Satzes gilt auch hier nicht. Als Beispiel dient die *alternierende harmonische Reihe* $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ (siehe Übung).

Beweis von Satz 4.4. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ und $A_N := \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|$. Mit der iterierten Dreiecksungleichung folgt $\forall M \in \mathbb{N}, M \geqslant N$

$$|S_M - S_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{M} a_k \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{M} |a_k| = A_M - A_N = |A_M - A_N|$$

und somit $(A_N)_N$ Cauchy $\Longrightarrow$ $(S_N)_N$ Cauchy. ■

4.6 Satz (Majoranten-Kriterium) *Seien* $(a_k)_k \subset \mathbb{K}, (c_k)_k \subset \mathbb{R}_{\geqslant}$ *mit* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ *konvergent und* $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant N : |a_k| \leqslant c_k$. *Dann ist* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *absolut konvergent.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $N = 1$ (denn: endlich viele Glieder abändern beeinflusst die Konvergenz nicht). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ und $C_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Für alle $m \in \mathbb{N}, m \geqslant n$ gilt

$$|A_m - A_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{|a_k|}_{\leqslant c_k} \leqslant C_m - C_n = |C_m - C_n|$$

und somit $(C_n)_n$ Cauchy $\Longrightarrow$ $(A_n)_n$ Cauchy. ■

4.7 Beispiel $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \geqslant 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ konvergiert,}$$

denn $\forall k \in \mathbb{N}$: $k^\alpha = \underbrace{k^{\alpha-2}}_{\geqslant 1} \underbrace{k^2}_{\geqslant k\frac{k+1}{2}} \Longrightarrow \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{2}{k(k+1)} =: c_k$. Mit Satz 4.6 und Beispiel 2.48 folgt die Behauptung. (Das Resultat ist noch nicht optimal, denn Konvergenz gilt $\forall \alpha > 1$; dazu später mehr).

4.8 Satz (Quotientenkriterium) *Sei* $(a_k)_k \subset \mathbb{K}$ *mit* $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant N : a_k \neq 0$ *und*

$$\exists\, \theta \in]0,1[\ \forall k \geqslant N : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leqslant \theta \qquad (\longleftarrow \textit{ unabhängig von } k!). \tag{Q}$$

Dann ist $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *absolut konvergent.*

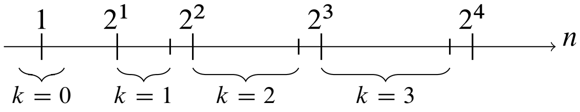


Abbildung 4.1: Zusammenfassen der Summanden im Beweis von Satz 4.11 zu Päckchen.

Beweis. O.B.d.A. gelte $N = 1$ (denn: endlich viele Glieder beeinflussen die Konvergenz nicht).

$$\text{(Q)} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vollst. Induktion}}}{\Longrightarrow} \quad \forall k \in \mathbb{N}\colon\ |a_k| \leqslant \underbrace{\theta^{k-1}|a_1|}_{=:\, c_k \,\geqslant\, 0}$$

Geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = |a_1| \sum\limits_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{|a_1|}{1-\theta}$ konvergent, da $|\theta| < 1$. Die Behauptung folgt somit aus Satz 4.6. ■

4.9 Bemerkung (a) Zum Quotientenkriterium: (Q) $\iff \limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

(b) Warnung: Die Bedingung $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant N\colon \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ist nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe. Beispiel: *harmonische Reihe* mit $a_k = 1/k\ \forall k \in \mathbb{N}$.

4.10 Beispiel Die **Exponentialreihe** $\exp(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{K}$, denn

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant |x| : \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \leqslant \frac{|x|}{|x|+1} =: \theta < 1.$$

4.11 Satz (Cauchy'scher Verdichtungssatz) *Sei $(a_n)_n \subset [0, \infty[$ antiton. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \textit{ konvergiert.}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Sei $N \in \mathbb{N}$. Wähle $K \in \mathbb{N}: 2^{K+1} > N \implies$

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \geqslant 0}}{\leqslant} S_{2^{K+1}-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Abb. 4.1}}}{=} \sum_{k=0}^{K} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \underbrace{a_n}_{\substack{\leqslant a_{2^k} \\ \text{da antiton}}} \leqslant \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} =: \sigma_K \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.V.}}}{\xrightarrow{K\to\infty}} \sigma \in \mathbb{R}.$$

Da $(S_N)_N$ isoton und $\forall N \in \mathbb{N}\colon S_N \leqslant \sigma \overset{\text{Satz 2.68}}{\Longrightarrow} (S_N)_N$ konvergiert.

„$\Rightarrow$“ Sei $K \in \mathbb{N}$. Wähle $N \in \mathbb{N}:\ N \geqslant 2^K \implies$

$$\sigma_K = a_1 + 2\sum_{k=1}^{K} 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + 2\sum_{k=1}^{K} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \underbrace{a_{2^k}}_{\substack{\leqslant a_n \\ \text{da antiton}}} \leqslant 2S_{2^K} \leqslant 2S_N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.V.}}}{\xrightarrow{N\to\infty}} 2S \in \mathbb{R}.$$

Da $(\sigma_K)_K$ isoton und $\forall K \in \mathbb{N}$: $\sigma_K \leqslant 2S \overset{\text{Satz 2.68}}{\implies} (\sigma_K)_K$ konvergiert. ■

4.12 Korollar *Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Die Reihe*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \textit{konvergiert für } \alpha > 1, \\ \textit{divergiert für } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

(Auch gültig für $\alpha \in \mathbb{R}$. Potenzen mit irrationalen Exponenten werden aber erst später definiert.)

Beweis.

- $\alpha > 1 \implies r := \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1$, denn $\exists p, q \in \mathbb{N}{:}\, \alpha - 1 = \dfrac{p}{q}$. Wäre nun $(2^{-p})^{\frac{1}{q}} \geqslant 1 \implies 2^{-p} \geqslant 1$ ↯. Also ist

  $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

  als geometrische Reihe mit $0 < r < 1$ konvergent. Mit Satz 4.11 folgt die Behauptung.

- $\alpha \leqslant 1 \implies \dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n} \cdot \underbrace{n^{1-\alpha}}_{\geqslant 1} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Mit dem Minorantenkriterium (Übung) und der Tatsache, dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergiert, folgt die Behauptung. ■

4.13 Bemerkung Sei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergente Reihe. Dann gilt

(a) Man darf Klammern (zusätzlich) setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{a_3}_{b_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6)}_{b3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

wobei $b_k := \sum\limits_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n$ mit $1 = N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$, das heißt $(N_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ strikt isoton.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{K} b_k = \sum\limits_{n=1}^{N_{K+1}-1} a_n = S_{N_{K+1}-1}$. Da $(S_n)_n$ konvergent, so auch jede Teilfolge mit demselben Limes.

(b) Man darf bestehende Klammern nicht umsetzen. Gegenbeispiel: $a_n := 0 = 1 - 1 \implies$

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

Verschieben der Klammern $\implies$

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1$$

„Erschaffung der Welt aus dem Nichts“ (GUIDO GRANDI).

Nützlich für die Bestimmung von Konvergenz, beziehungsweise Divergenz ist

4.14 Satz (Wurzelkriterium) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge und*

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty] .$$

Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \begin{cases} \textit{konvergiert absolut} & \textit{für } \alpha < 1, \\ \textit{divergiert} & \textit{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Für $\alpha = 1$ ist keine Aussage möglich (absolute Konvergenz, Konvergenz oder Divergenz möglich).

Beweis. Fall $\alpha < 1$: Da lim sup der größte Häufungspunkt ist und $\alpha < 1$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geqslant N$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} =: q \in]\alpha, 1[.$$

Daraus folgt nun direkt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{=:M<\infty} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \leqslant M + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n = M + \frac{1}{1-q} < \infty.$$

Fälle $\alpha \geqslant 1$: Übung. ■

4.15 Satz (Umordnungssatz) *Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{K}$ und $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv (Umordnung). Dann gilt*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \textit{ konvergiert absolut} \implies \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{\Phi(k)} \textit{ konvergiert absolut und } \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{\Phi(k)}.$$

4.16 Bemerkung (a) Absolute Konvergenz der Reihe ist wesentliche Voraussetzung, das heißt, ohne sie ist die Behauptung falsch; siehe Übung (Riemannscher Umordnungssatz) oder

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n n^{-1}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Betrachte folgende Umordnung

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\Phi(n)} = -1 + \frac{1}{2} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{2^0\text{ Glieder}} + \frac{1}{4}}_{=:b_1} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{2^1\text{ Glieder}} + \frac{1}{6}}_{=:b_2} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{2^2\text{ Glieder}} + \frac{1}{8}}_{=:b_3}$$

$$\ldots \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geqslant 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leqslant\frac{1}{6}\ (\text{für } n\geqslant 2)}}_{=:b_n\leqslant-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}\ (\text{für } n\geqslant 2)} - \ldots$$

<u>Annahme:</u> $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{\Phi(n)}$ konvergent $\overset{\text{Bem. 4.13(a)}}{\Longrightarrow}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergent. $\lightning$, da $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n = -\infty$.

(b) Es gilt sogar für $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent: (per Widerspruch zu Riemannschem Umordnungssatz)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\Phi(n)} \text{ konvergiert für alle Umordnungen } \Phi \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Beweis von Satz 4.15. Sei $S := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $A := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Absolute Konvergenz $\implies$

$$\forall\varepsilon>0\;\exists N\in\mathbb{N}\colon \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| = \lim_{\substack{K\to\infty\\K>N}} \underbrace{\sum_{n=N+1}^{K}|a_n|}_{\sum\limits_{n=1}^{K}|a_n|-\sum\limits_{n=1}^{N}|a_n|} = A-\sum_{n=1}^{N}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \left|S-\sum_{n=1}^{N}a_n\right| = \lim_{\substack{K\to\infty\\K>N}}\left|\sum_{n=N+1}^{K}a_n\right| \leqslant \lim_{\substack{K\to\infty\\K>N}}\sum_{n=N+1}^{K}|a_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\exists\, M := M_N \in\mathbb{N}$ (groß genug), dass $\{\Phi(1),\Phi(2),\ldots,\Phi(M)\}\supseteq\{1,2,\ldots,N\}$. Damit gilt $\forall m\geqslant M$

$$\left|S-\sum_{k=1}^{m}a_{\Phi(k)}\right| \leqslant \underbrace{\left|S-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \left|\underbrace{\sum_{n=1}^{N}a_n-\sum_{k=1}^{m}a_{\Phi(k)}}_{-\sum\limits_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}:\\\Phi(k)>N}}a_{\Phi(k)}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| < \varepsilon,$$

d.h. die umgeordnete Reihe konvergiert und hat denselben Limes. Analog gilt

$$\left|A - \sum_{k=1}^{m} |a_{\Phi(k)}|\right| \leqslant \underbrace{A - \sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \left|\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n| - \sum_{k=1}^{m} |a_{\Phi(k)}|}_{-\sum\limits_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}:\\ \Phi(k)>N}} |a_{\Phi(k)}|}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

■

4.17 Satz (Von MERTENS über das Cauchy-Produkt von Reihen) *Seien* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$*,* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ *konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$*, eine davon absolut konvergent. Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$*.*
Dann ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ *konvergent und*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Falls beide Reihen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$*,* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ *absolut konvergieren, dann konvergiert auch* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ *absolut.*

Beweis. O.B.d.A. sei $A := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$ die absolut konvergente Reihe. Sei $B := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ und für $N \in \mathbb{N}$ seien

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n,\ B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n,\ C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n$$

die zugehörigen Partialsummen. Es folgt

$$\begin{aligned} C_N &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots + (a_0b_N + a_1b_{N-1} + \dots + a_Nb_0)\\ &= a_0B_N + a_1B_{N-1} + \dots + a_NB_0\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ B_N =: B-\beta_N}}{=} A_NB - \underbrace{(a_0\beta_N + \dots + a_N\beta_0)}_{=:\,\omega_N} \end{aligned}$$

Wir zeigen: $(\omega_N)_N$ ist Nullfolge ($\Longrightarrow C_N \xrightarrow{n\to\infty} AB$). Es gilt

(i) $(\beta_N)_N$ ist Nullfolge. Klar, da $B_N \xrightarrow{n\to\infty} B$.

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge. Klar, da $\sum_n a_n$ konvergent (sogar absolut).

Setze $S := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow}$ $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall N \geqslant k\colon\ |\beta_N| \leqslant \varepsilon/S$.

$$\implies \forall N \geqslant k\colon\ |\omega_N| = \left|\sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j|\,|a_{N-j}| + \underbrace{\sum_{j=k}^{N} \underbrace{|\beta_j|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{S}}\ |a_{N-j}|}_{\leqslant \varepsilon}$$

$$\implies \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \cdot \underbrace{\limsup_{N\to\infty} |a_{N-j}|}_{=0 \text{ gemäß (ii)}} + \varepsilon = \varepsilon \overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\implies} \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| = 0. \quad \checkmark$$

Absolute Konvergenz von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ folgt aus Anwendung des bisher Bewiesenen auf die konvergenten Reihen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ und $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n|$. ■

4.2 Potenzreihen

4.18 Definition *Sei* $(a_n)_n \subset \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$.

- ***Potenzreihe*** *(in* $\mathbb{K}$*):* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- ***Assoziierte Potenzreihenfunktion*** *(auf maximalem Definitionsbereich):*

$$f_{(a_n)_n} : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array} \qquad \textit{mit} \qquad \mathscr{D} := \left\{ x \in \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \textit{ konvergiert} \right\}.$$

4.19 Beispiel (a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{x^n}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Beispiel 4.10}}}{\implies} \mathscr{D} = \mathbb{K}$,

(b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} x^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe}}}{\implies} \mathscr{D} = \{\, x \in \mathbb{K} : |x| < 1 \,\}$ Beachte: Satz 2.49 gilt auch für $q \in \mathbb{C}$.

(c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} n^n x^n$. Für $x \neq 0$ und $n > \frac{2}{|x|} \implies |n^n x^n| > 2^n \implies$ divergent. Somit $\mathscr{D} = \{0\}$.

Diese Beispiele illustrieren die drei prinzipiellen Möglichkeiten, die auftreten können.

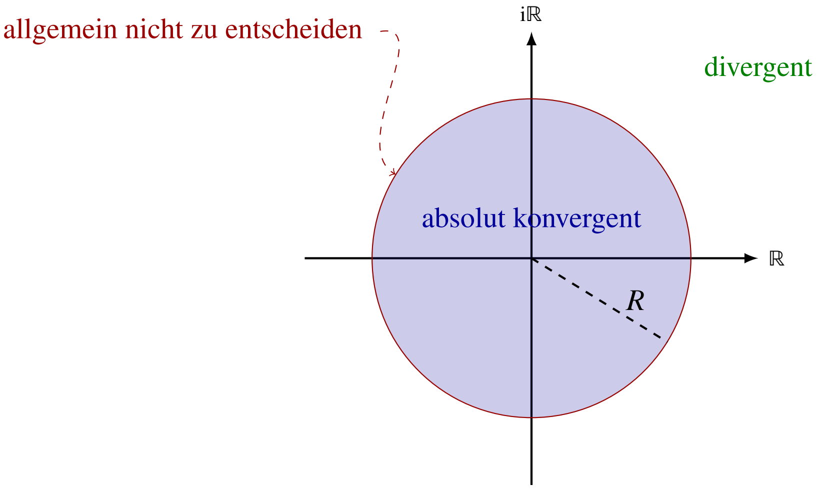


Abbildung 4.2: Illustration des Konvergenzkreises für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.20 Definition ***Konvergenzradius*** *der Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*:*

$$R := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \textit{falls} \ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \left]0, \infty\right[, \\ 0, & \textit{falls} \ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \infty, & \textit{falls} \ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Erinnerung: für $r > 0$ ist $B_r := \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ und $\overline{B}_r := \{x \in \mathbb{K} : |x| \leqslant r\}$.

4.21 Satz (von Cauchy–Hadamard) *Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *Potenzreihe in* $\mathbb{K}$ *mit Definitionsbereich* $\mathscr{D}$*. Dann gilt (siehe Abb.* 4.2*)*

(a) $R = \infty \implies \mathscr{D} = \mathbb{K}$,

(b) $R = 0 \implies \mathscr{D} = \{0\}$,

(c) $R \in \left]0, \infty\right[\implies B_R \subseteq \mathscr{D} \subseteq \overline{B}_R$.

Zudem gilt: Für $x = 0$ *und* $x \in B_R$ *ist die Konvergenz der Potenzreihe absolut.*

4.22 Bemerkung (a) Auf dem Rand $\{\, x \in \mathbb{K} : |x| = R \,\}$ des Konvergenzkreises B_R ist keine Aussage möglich (absolute Konvergenz, Konvergenz, Divergenz möglich).

Beispiel: $a_n := 1/n \implies$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n} \begin{cases} \text{konvergiert} & \text{für } x = -1 \text{ (alternierende harmonische Reihe).} \\ \text{divergiert} & \text{für } x = 1 \quad \text{(harmonische Reihe).} \end{cases}$$

$\overset{\text{Satz 4.21(c)}}{\implies} R = 1.$

(b) Falls $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \ a_n \neq 0$, dann ist $R = \liminf\limits_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$.

(c) Abschätzungen des Konvergenzradius aus dem Quotientenkriterium (falls $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \ a_n \neq 0$; Beweis siehe Übung)

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant R \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beweis von Satz 4.21. Wende das Wurzelkriterium, Satz 4.14, auf $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ mit $c_n := a_n x^n$ an.

(a) $\forall x \in \mathbb{K}$: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies$ absolut konvergent.

(b) $\forall 0 \neq x \in \mathbb{K}$: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \implies$ divergent und für $x = 0$ absolut konvergent.

(c) $|x| < R \implies \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \implies$ absolut konvergent.

$|x| > R \implies \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1 \implies$ divergent. ■

Zur Vorbereitung der Stetigkeit von Potenzreihen dient der folgende Satz.

4.23 Satz (Konvergenzkriterium von WEIERSTRASS) *Sei $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{K}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_\infty < \infty$, wobei $\|\varphi_n\|_\infty := \sup\limits_{x\in\mathscr{D}} |\varphi_n(x)|$. Dann gilt*

(a) *Für alle $x \in \mathscr{D}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ absolut und $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \end{array}$ ist wohldefiniert.* *Notation:* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n := \Phi$.

(b) *Die Funktionenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen Φ, wobei $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k$.*

Jargon: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ *konvergiert absolut und gleichmäßig.*

Beweis. (a) $\forall x \in \mathscr{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $|\varphi_n(x)| \leqslant \|\varphi_n\|_\infty \implies$ Behauptung mit Majorantenkriterium.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_\infty$ konvergent $\implies$

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty < \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Und somit $\forall n \geqslant N$

$$\|\Phi - S_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathscr{D}} \underbrace{|\Phi(x) - S_n(x)|}_{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\varphi_k(x)} \leqslant \sup_{x\in\mathscr{D}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|\varphi_k(x)|}_{\leqslant\|\varphi_k\|_\infty} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty \overset{(\star)}{<} \varepsilon.$$

■

Für $g: \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ und $A \subseteq \mathscr{D}$ ist $g\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ die Restriktion auf A (siehe Def. 1.26).

4.24 Satz *Sei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ *Potenzreihe in* $\mathbb{K}$ *mit Konvergenzradius* $R \neq 0$ *und* $f_{(a_n)_n}$ *die assoziierte Potenzreihenfunktion. Dann gilt:*

(a) $\forall \rho \in\,]0, R[$ *konvergiert* $f_{(a_n)_n}\big|_{B_\rho}$ *absolut und gleichmäßig.*

(b) $f_{(a_n)_n}\big|_{B_R}$ *ist stetig.*

(c) $\forall \rho \in\,]0, R[$ *ist* $f_{(a_n)_n}\big|_{\overline{B}_\rho}$ *gleichmäßig stetig.*

Beweis. (a) Sei $\rho \in\,]0, R[$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi_n : \begin{array}{ccc} B_\rho & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_n x^n \end{array} \implies \|\varphi_n\|_\infty = |a_n|\rho^n$ $\overset{\rho<R,\,\text{Satz 4.21}(c)}{\implies} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_n\|_\infty$ konvergent $\overset{\text{Satz 4.23}}{\implies} f_{(a_n)_n}\big|_{B_\rho} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \varphi_n$ absolut und gleichmäßig konvergent.

(b) $\forall \rho \in\,]0, R[\ \forall N \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{n=0}^{N} \varphi_n : B_\rho \to \mathbb{K}$ stetig $\overset{\text{Satz 3.35 \& (a)}}{\implies} f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_ρ.
Nun sei $x \in B_R$ beliebig $\implies \exists \rho \in\,]0, R[\, : x \in B_\rho \implies f_{(a_n)_n}$ stetig in $x \implies f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_R.

(c) Für $\rho \in\,]0, R[$ ist $\overline{B}_\rho$ kompakt und $f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\overline{B}_\rho \subset B_R \overset{\text{Satz 3.30}}{\implies} f_{(a_n)_n}$ ist gleichmäßig stetig auf $\overline{B}_\rho$. ■

Potenzreihen sind bereits durch ihre Werte auf „wenigen“ Punkten eindeutig bestimmt.

4.25 Satz (Identitätssatz) *Seien* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ *Potenzreihen in* $\mathbb{K}$ *mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Falls es eine Folge* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B_R \setminus \{0\}$ *gibt mit* $x_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$ *und* $f_{(a_n)_n}(x_m) = f_{(b_n)_n}(x_m)\ \forall m \in \mathbb{N}$, *dann gilt*

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

4.26 Bemerkung

- Der Satz kann verallgemeinert werden. Es reicht, wenn $x_m \xrightarrow{m\to\infty} \tilde{x} \in B_R$, das heißt $\tilde{x}$ muss nicht 0 sein. Mehr dazu in der Vorlesung *Funktionentheorie*.
- Moral: Gleichheit auf einer Folge mit Häufungspunkt in $B_R \implies$ Gleichheit überall.
- Gilt insbesondere für Polynome.

Beweis von Satz 4.25. Wir zeigen $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $a_j = b_j \ \forall j \in \{0, \dots, n\}$ per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.
$\underline{n = 0:}$

$$a_0 = f_{(a_\nu)_\nu}(0) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{m\to\infty} f_{(a_\nu)_\nu}(x_m) = \lim_{m\to\infty} f_{(b_\nu)_\nu}(x_m) \overset{\text{stetig}}{=} f_{(b_\nu)_\nu}(0) = b_0.$$

$\underline{n \to n+1:}$ Es gelte $a_j = b_j \ \forall j \in \{0, \dots, n\}$. Zu zeigen ist $a_{n+1} = b_{n+1}$.
Für $x \in B_R \setminus \{0\}$ sei

$$g(x) := \frac{1}{x^{n+1}}\left[f_{(a_\nu)_\nu}(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right] = a_{n+1} + a_{n+2}x + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+1+j} x^j,$$

$$h(x) := \frac{1}{x^{n+1}}\left[f_{(b_\nu)_\nu}(x) - \sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right] = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n+1+j} x^j,$$

also Potenzreihen mit demselben Konvergenzradius R und $\forall m \in \mathbb{N}$: $g(x_m) \overset{\text{Ind.vorauss.}}{=} h(x_m) \implies$

$$a_{n+1} = f_{(a_{n+1+\nu})_\nu}(0) \overset{\text{stetig in 0}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{f_{(a_{n+1+\nu})_\nu}(x_m)}_{g(x_m) = h(x_m) = f_{(b_{n+1+\nu})_\nu}(x_m)} \overset{\text{stetig in 0}}{=} f_{(b_{n+1+\nu})_\nu}(0) = b_{n+1}. \qquad \blacksquare$$

4.3 Exponentialfunktion

4.27 Definition

Exponentialfunktion

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{z^n}{n!} \end{array}.$$

Wohldefiniert, da Konvergenzradius $R = \infty$*, also absolut konvergent auf* $\mathbb{C}$ *(siehe Beispiel* 4.10*).*

4.28 Satz *Es gelten die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.*

(a) $\exp$ *ist stetig,*

(b) $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!} =: \mathrm{e}$,

(c) ***Funktionalgleichung:*** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2),$$

(d) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$,

(e) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$,

(f) *Insbesondere gilt* $\forall x \in \mathbb{R}$: $\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(-\mathrm{i}x)$ *und* $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1$.

Beweis. (a) Satz 4.24(b), da $R = \infty$.

(b) Klar.

(c) Übung.

(d) <u>Annahme:</u> $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}\colon\ \exp(z_0) = 0 \implies$

$$1 = \exp(0) = \exp(z_0 - z_0) \overset{(c)}{=} \underbrace{\exp(z_0)}_{0}\ \underbrace{\exp(-z_0)}_{\in\mathbb{K}} = 0 \quad ↯$$

Somit erhalten wir $\forall z \in \mathbb{C}$

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) \overset{(c)}{=} \exp(z)\exp(-z) \overset{\exp(z)\neq 0}{\implies} \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

(e)

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} \overset{\text{Kor. 2.96}}{=} \lim_{N\to\infty}\overline{\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\overline{\frac{1}{n!}z^n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\overline{z^n}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(\overline{z})^n}{n!} = \exp(\overline{z}).$$

(f) Folgt aus (e) und (c). ■

4.29 Satz (Reelle Exponentialfunktion) (a) $\exp|_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to\ ]0,\infty[$ *ist strikt isoton, bijektiv, stetig.*

(b) $x \geqslant 0 \implies \exp(x) \geqslant 1$ (*und* $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$).

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.

Beweis. (b) Sei $x \geqslant 0 \implies \exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + x \implies$ Beh.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\exp(x) \overset{\text{Beweis von (b)}}{\geqslant} \lim\limits_{x\to\infty}(1 + x) = \infty \implies$

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = \lim_{x\to\infty}\exp(-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

(a)
- Stetigkeit folgt aus der von exp auf $\mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, da nur reelle Koeffizienten in der exp-Reihe. Sei $x \in \mathbb{R} \implies$

$$\exp(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 4.28(c)}}}{=} \Big(\underbrace{\exp\Big(\frac{x}{2}\Big)}_{\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big)^2 > 0 \quad\implies\quad \exp(\mathbb{R}) \subseteq\ ]0,\infty[\,. \qquad (*)$$

- Sei $x_2 > x_1 \implies \exp(x_2) = \exp(x_1)\exp(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}) \underset{\overset{\uparrow}{\text{(a)}}}{>} \exp(x_1) \implies$ strikt isoton.
- Injektivität folgt aus der strikten Isotonie.
- exp stetig $\overset{\text{Satz 3.22, (c)}}{\implies} \exp(\mathbb{R}) \supseteq]0, \infty[\overset{(*)}{\implies} \exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$, also auch surjektiv. ■

4.30 Korollar *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

- $\exp(z) = \exp\big(\mathrm{Re}\,(z)\big) \exp\big(\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)\big)$,
- $|\exp(z)| = \exp\big(\mathrm{Re}\,(z)\big)$.

4.31 Satz *Für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt* $\exp(q) = \mathrm{e}^q$.

Beweis. Sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \implies \mathrm{e}^q = \sqrt[n]{\mathrm{e}^m}$. Andererseits

$$[\exp(q)]^n = \exp(\underbrace{nq}_{m=1+\ldots+1}) = [\underbrace{\exp(1)}_{\mathrm{e}}]^m = \mathrm{e}^m > 0 \implies \exp(q) \underset{\overset{\uparrow}{\text{Eindeutigkeit der positiven } n\text{-ten Wurzel}}}{=} \sqrt[n]{[\exp(q)]^n} = \sqrt[n]{\mathrm{e}^m}. \quad ■$$

4.32 Definition *Für alle $z \in \mathbb{C}$ setze* $\mathrm{e}^z := \exp(z)$.

4.33 Bemerkung Konsistent für $z \in \mathbb{Q}$ mit Definition 2.76 wegen Satz 4.31.

4.4 Trigonometrische Funktionen, die Zahl π und Polardarstellung komplexer Zahlen

4.34 Definition ***Trigonometrische Funktionen Kosinus** und **Sinus***

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \end{array}, \qquad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{array}.$$

Wohldefiniert, da Konvergenzradius $R = \infty$, also absolut konvergent auf $\mathbb{C}$.

4.35 Satz *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt mit der Notation* $\sin z := \sin(z)$, $\cos z := \cos(z)$

(a) $\sin, \cos$ *sind stetig.*

(b) $\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$, $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$. *Insbesondere* $\cos 0 = 1$, $\sin(0) = 0$.

(c) $\cos z = \cos(-z), \quad \sin z = -\sin(-z)$.

(d) ***Eulersche Formel*** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$.

(e) ***Satz von Pythagoras*** $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, *wobei* $\sin^2 z = (\sin z)^2$, $\cos^2 z = (\cos z)^2$.

(f) ***Additionstheoreme*** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- (i) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,
- (ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,
- (iii) $\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$,
- (iv) $\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

Und viele mehr, siehe z.B. GRADSHTEYN/RYZHIK*: Table of Integrals, series and products.*

Beweis. (a) Satz 4.24(b), da $R = \infty$.

(b) Hier nur für cos [für sin verläuft der Beweis analog]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{beide Reihen} \\ \text{konvergent}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left[\, (\mathrm{i}z)^n + (-\mathrm{i}z)^n \,\right]}_{= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2\,\mathrm{i}^n z^n, & n \text{ gerade} \end{cases}}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{\mathrm{i}^{2k}}_{(-1)^k} z^{2k} = 2\cos z.$$

(c) Folgt aus Definition oder (b).

(d) Folgt aus (b).

(e), (f) Übung. ∎

4.36 Satz (Reelle trigonometrische Funktionen) (a) $\sin|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *und* $\cos|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *sind stetig.*

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$, $\sin x = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$.

Beweis. $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}, \cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ gemäß Definition $\Longrightarrow$ $\sin^2 x \geqslant 0, \cos^2 x \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R} \overset{\text{Satz 4.35(e)}}{\Longrightarrow}$ $\sin^2 x \in [0, 1]\,, \cos^2 x \in [0, 1]$. Restliche Behauptungen aus Satz 4.35(a) und (d). ∎

4.37 Satz und Definition *Es gibt genau ein* $\xi \in\,]0, 2[$ *mit* $\cos\xi = 0$.

Kreiszahl: $\pi := 2\xi$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf

4.38 Lemma *Für alle* $x \in \,]0,3[$ *gilt*

(a) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$,

(b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

Die Aussagen sind sogar für alle $x > 0$ *wahr – mehr dazu später.*

Beweis. Übung. ■

Beweis von Satz 4.37. Es gilt $\cos(0) = 1 > 0$ und

$$\cos(2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 4.38}}}{<} 1 - 2 + \underbrace{\frac{16}{24}}_{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Da cos stetig ist, folgt mit dem Nullstellensatz von Bolzano (Satz 3.20)

$$\exists\, \xi \in \,]0,2[\ \text{mit}\ \cos(\xi) = 0.$$

ξ ist eindeutig, da $\cos :\ ]0,2[\to \mathbb{R}$ strikt antiton. Letzteres gilt, denn seien $x, y \in \,]0,2[$ mit $x > y$

$$\Longrightarrow \cos x - \cos y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.35(f)(iv)}}}{=} -2 \sin\Big(\underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\in\,]0,1[}\Big) \sin\Big(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in\,]0,2[}\Big) < 0,$$

da gemäß Lemma 4.38(b) für alle $\tilde{x} \in \,]0,2[$ gilt

$$\sin \tilde{x} > \tilde{x}\left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{6}\right) > \frac{\tilde{x}}{3} > 0. \tag{$*$}$$

■

4.39 Satz *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

(a) $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$,

(b) $\cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z$,

(c) $\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z$,

das heißt, 2π *ist eine* ***Periode*** *von* sin *und* cos *– und ist sogar die* ***kleinste Periode****,*

(d) $\forall x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

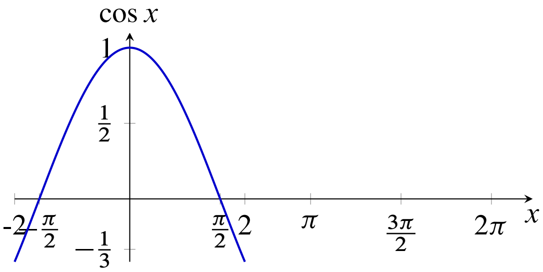
$$\sin x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon\ x = k\pi.$$

Beweis. (a) Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.35(e)}}}{\Longrightarrow} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \underset{\substack{\uparrow \\ (*)\text{ im Beweis von Satz 4.37}}}{\Longrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 4.35(f)(i),(ii)}}}{\Longrightarrow}$ Beh.

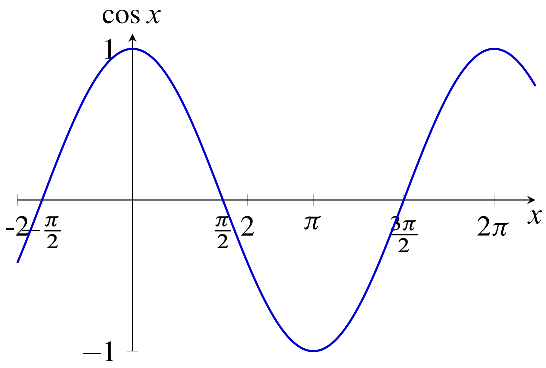
(b) und (c) sind Iterationen von (a). Dass 2π die *kleinste* Periode, folgt aus dem Beweis von

(d) Nullstellen:

cos stetig, Lemma 4.38, strikt antiton auf $[0,2]$ (Beweis von Lemma 4.38), Satz 4.37 und cos gerade $\Longrightarrow$



$\xRightarrow{\text{(b),(c)}}$

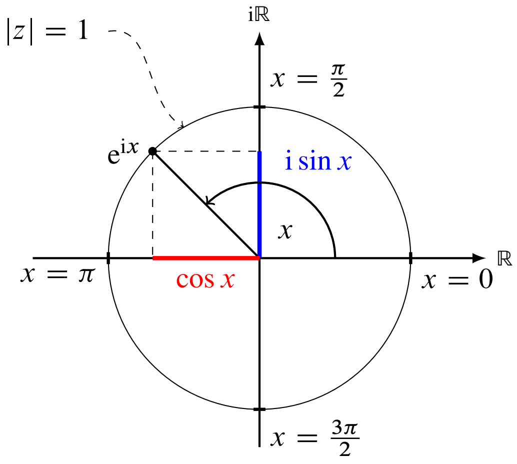


Insbesondere sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ die einzigen Nullstellen von cos in $[0,2\pi]$ $\xRightarrow{\text{(b)}}$ Beh. für cos; und mit (a) die Beh. für sin. ■

4.40 Satz (a) $2\pi\mathrm{i}$ *ist die kleinste imaginäre Periode von* exp. *Insbesondere gilt für alle* $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}.$$

(b) *Mit wachsendem* $x \in [0,2\pi[$ *durchläuft* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *genau einmal den Einheitskreis in* $\mathbb{C}$ *entgegen dem Uhrzeigersinn.*



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$	1

Abbildung 4.3: Der Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Beweis. (a) $z_P \in \mathbb{C}$ ist Periode von exp $\overset{\text{Satz 4.28(c)}}{\iff}$ $e^{z_P} = 1$. Aus Korollar 4.30 und Satz 4.29 folgt $\operatorname{Re}(z_P) = 0$, und mit der Eulerschen Formel $\cos\big(\operatorname{Im}(z_P)\big) = 1$, $\sin\big(\operatorname{Im}(z_P)\big) = 0 \implies$ Beh.

(b) Siehe Abbildung 4.3. Folgt aus der Eulerschen Formel und dem Verhalten von sin und cos, Lemma 4.38 und Satz 4.39. ■

4.41 Korollar (Polardarstellung komplexer Zahlen) *$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varphi \in \mathbb{R}$ (**Phase** oder **Argument**), so dass $z = |z|e^{i\varphi}$. Falls $z \neq 0$, ist φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.*

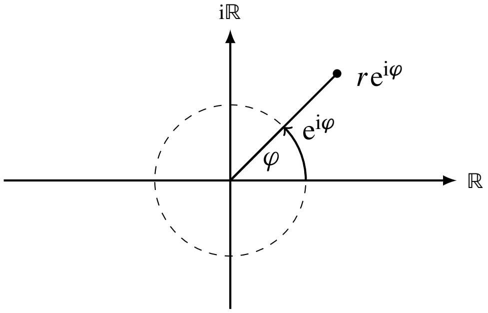


Abbildung 4.4: Polardarstellung einer komplexen Zahl mit Betrag r und Phase φ.

Beweis. Falls $z = 0 \implies |z| = 0$ und φ beliebig. Falls $0 \neq z \in \mathbb{C} \implies \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \overset{\text{Satz 4.40}}{\implies} \exists_1\, \varphi \in\ ]-\pi, \pi] : \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$. ■

4.42 Definition (Hauptzweig des Arguments)

$$\arg : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to &]-\pi, \pi] \\ z & \mapsto & \varphi \end{array}$$ *wobei φ eindeutig aus Korollar 4.41 bestimmt, ist wohldefiniert.*

Es gilt damit für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z = |z|e^{i\arg(z)}$. *(Auch gebräuchlich Schreibweise:* Arg*)*

4.43 Lemma *Für $z_j := r_j e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2\}$, ist $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.*

4.44 Korollar *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt genau n Lösungen[1] in $\mathbb{C}$. Diese sind*

$$z_k := e^{i2\pi\frac{k}{n}}, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

*und heißen die **n-ten Einheitswurzeln.***

---

[1] Alternative Formulierung: Das Polynom $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n - 1$, besitzt genau n Nullstellen.

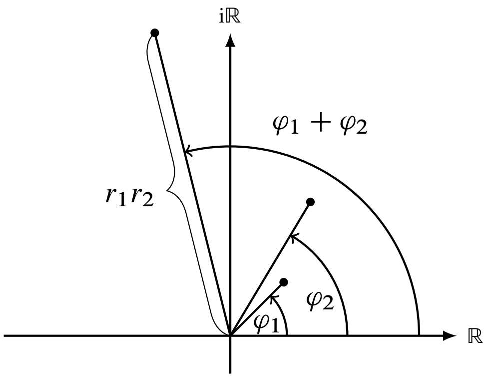


Abbildung 4.5: Multiplikation zweier komplexer Zahlen als Drehstreckung.

4.45 Beispiel Eine Illustration der Einheitswurzeln für $n = 5$ befindet sich in Abbildung 4.6. Allgemein ergibt sich ein regelmäßiges n-Eck.

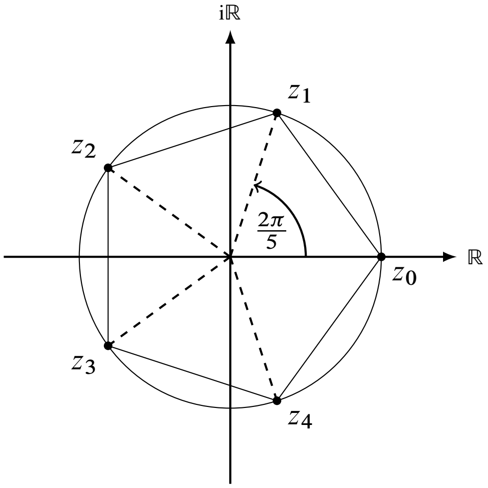


Abbildung 4.6: Die 5-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

Eine schöne Anwendung von Lemma 4.43 und der Sätze über stetige Funktionen ist der folgende

4.46 Satz (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, das heißt $\exists\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so dass $P(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann besitzt P eine Nullstelle.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a_n = 1$ (sonst betrachte $\widetilde{P} := \frac{1}{a_n} P$). Sei $Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_{\geqslant} \\ z & \mapsto & |P(z)| \end{array}$.

1. Akt: Q nimmt Minimum an.

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$Q(z) = |z^n| \cdot \Bigg| 1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n}}_{=:\, r(z)} \Bigg| \quad \Longrightarrow \quad |r(z)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z|^{j-n} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,$$

da $j-n<0$ und endliche Summe. Also $\exists\, \rho \in]0,\infty[\ \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$: $|r(z)| < \frac{1}{2}$. Aus $1 = |1 - r(z) + r(z)| \leqslant |1 + r(z)| + |r(z)|$ folgt $|1 + r(z)| \geqslant 1 - |r(z)| \underset{|z|>\rho}{\underset{\uparrow}{>}} \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad Q(z) > \frac{|z|^n}{2} \text{ für alle } |z| > \rho.$$

Sei $R \geqslant \rho$ so groß, dass $\frac{R^n}{2} \geqslant |a_0| = Q(0)$, so folgt

$$\inf_{z\in\mathbb{C}} Q(z) = \inf_{z\in\overline{B}_R} Q(z)$$

mit $\overline{B}_R := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$.

(ii) Da $\overline{B}_R$ kompakt (Beispiel 3.26) und $Q : \overline{B}_R \to \mathbb{R}_\geqslant$ stetig, folgt mit Satz 3.27

$$\exists\, z_- \in \overline{B}_R \colon Q(z_-) = \min_{z\in\overline{B}_R} Q(z) = \inf_{z\in\overline{B}_R} Q(z) \overset{\text{(i)}}{=} \inf_{z\in\mathbb{C}} Q(z).$$

2.Akt: $Q(z_-) = 0$.
Annahme: $Q(z_-) > 0$. Sei $p(z) := \frac{1}{P(z_-)} P(z_- + z)\ \forall z \in \mathbb{C}$
$\Longrightarrow$ p ist Polynom vom Grad n mit $|p(z)| \geqslant p(0) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$
$\Longrightarrow$ $\exists\, m \in \{1, \ldots, n\}$ und $\exists\, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit[2] $b_m \neq 0$:

$$p(z) = 1 + \sum_{j=m}^{n} b_j z^j =: 1 + b_m z^m + z^{m+1} \widetilde{p}(z),$$

wobei $\widetilde{p} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ebenfalls ein Polynom (falls $m = n$, ist $\widetilde{p} = 0$). Wähle nun $\xi \in \mathbb{C}$, so dass $\xi^m = -\frac{b_m}{|b_m|}$ (existiert nach Korollar 4.43 und hat Betrag $|\xi| = 1$) $\Longrightarrow$ $\forall t \in [0, |b_m|^{-1/m}]$

$$\begin{aligned} |p(\xi t)| = \left| 1 - |b_m| t^m + (\xi t)^{m+1} \widetilde{p}(\xi t) \right| &\leqslant \left| 1 - |b_m| t^m \right| + t^{m+1} |\widetilde{p}(\xi t)| \\ &\underset{t\leqslant|b_m|^{-1/m}}{\underset{\uparrow}{=}} 1 - t^m \Big(\underbrace{|b_m|}_{>0} - \underbrace{t|\widetilde{p}(\xi t)|}_{\xrightarrow{t\to 0} 0} \Big). \end{aligned}$$

Also $\exists\, t_0 > 0$: $|p(\xi t_0)| < 1$. ↯ zu $|p| \geqslant 1$. ■

Der vorstehende Satz liefert eine weitreichende Verallgemeinerung von Korollar 4.44.

---

[2] m ist kleinster Grad aller Monome, aus denen das Polynom $p - 1$ aufgebaut ist. Es gilt auch noch $b_n \neq 0$ (interessiert aber nicht).

4.47 Korollar *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt P genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, gezählt mit ihrer Vielfachheit, das heißt $\exists\, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ und $\exists\, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:*

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - \zeta_k) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. $\underline{n = 1:}$ klar.
$\underline{n \to n + 1:}$ Sei P vom Grad $n + 1$ und sei $\zeta_{n+1} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P nach Satz 4.46. Es gilt

$$\exists \text{ Polynom } Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ vom Grad } n \text{ mit } P(z) = (z - \zeta_{n+1})Q(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{$*$}$$

denn: sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j z^j$, dann bestimme Q mittels Ansatz $Q(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j$ durch Koeffizientenvergleich (gerechtfertigt wegen Identitätssatz 4.25):

$$a_{n+1} = b_n \quad \text{und} \quad a_j = b_{j-1} - \zeta_{n+1} b_j \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Dies liefert rekursiv $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Mit $(*)$ und der Induktionsvoraussetzung $Q(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - \zeta_k)$ folgt der Induktionsschritt. ■

4.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

4.48 Lemma und Definition

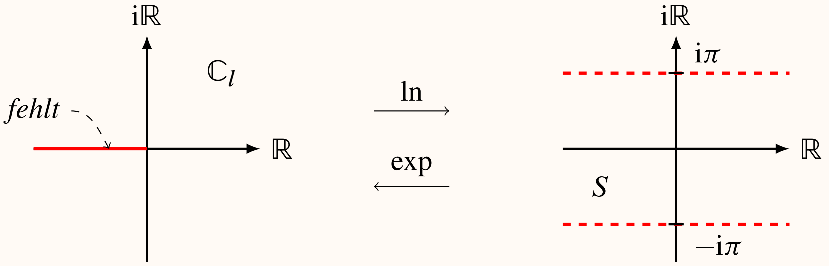
- ***Links geschlitzte komplexe Ebene*** $\mathbb{C}_l := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\leqslant$
- ***Offener Horizontalstreifen*** *(der Breite 2π)* $S := \{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$

Die Restriktion der komplexen e*-Funktion* $\exp|_S : S \to \mathbb{C}_l$ *ist bijektiv. Die Umkehrfunktion*

$$\ln : \mathbb{C}_l \to S$$

*heißt **Hauptzweig des (natürlichen) Logarithmus** (auch:* log, Log*).*

Auch übliche Notation: $\ln z := \ln(z)$ *für* $z \in \mathbb{C}_l$.



Beweis (Bijektivität). Sei $z \in S \implies \mathrm{e}^z = \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}}_{|\mathrm{e}^z|} \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i} \operatorname{Im} z}}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\mathrm{e}^z)}}$

- Satz 4.29 $\implies \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, \infty[\\ \operatorname{Re} z & \mapsto & \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \end{array}$ bijektiv,

- Definition 4.42 $\implies$ $\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \to & \{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}\setminus\{-1\} \\ \operatorname{Im} z & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z} \end{array}$ bijektiv.

Damit folgt die Behauptung aus der Polardarstellung. ■

4.49 Satz (Funktionalgleichung des ln) *Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_l$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_l$. Dann existiert genau ein $k := k_{z_1,z_2} \in \{0,1,-1\}$, so dass*

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi\mathrm{i}.$$

Beweis. Für $j = 1,2$ setze $\zeta_j := \ln z_j \in S$, also $z_j = \mathrm{e}^{\zeta_j}$. Aus der Funktionalgleichung von exp folgt

$$z_1 z_2 = \mathrm{e}^{\zeta_1+\zeta_2} = \mathrm{e}^{\zeta_1+\zeta_2+2k\pi\mathrm{i}},$$

wobei $k \in \{0,1,-1\}$ eindeutig festgelegt ist durch die Forderung $\zeta := \zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi\mathrm{i} \in S$, denn $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_l \implies \operatorname{Im}(\zeta_1+\zeta_2) \neq \pm\pi$. Damit folgt $\ln(z_1 z_2) = \zeta$. ■

4.50 Korollar (Reller Logarithmus) *Die Funktion* $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_>$ *ist bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion* $\ln|_{\mathbb{R}_>} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$. *Es gilt für alle $x_1, x_2 \in]0,\infty[$*

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Beweis. Sätze 4.29, 3.23, 4.49. ■

4.51 Korollar *Für alle $z \in \mathbb{C}_l$ gilt*

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)$$

und $\ln : \mathbb{C}_l \to S$ *ist stetig.*

Beweis. Polardarstellung und Satz 4.49. Stetigkeit aus Korollar 4.50 und Stetigkeit von $|\cdot|$ und arg (letzteres siehe Übung). ■

4.52 Definition *Für $a \in \mathbb{C}_l$ und $z \in \mathbb{C}$ setze*

$$a^z := \exp\big(z \ln a\big).$$

4.53 Bemerkung

- Konsistent mit Definition 4.32 für $a = \mathrm{e}$ wegen $\ln \mathrm{e} = 1$.
- Ebenfalls konsistent mit Definition 2.76 für $a \in \mathbb{R}_>$ und $z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, da

$$\left[\exp\left(\frac{m}{n}\ln a\right)\right]^n = \exp\big(m \ln a\big) = \big[\exp(\ln a)\big]^m = a^m$$

und damit wegen der Eindeutigkeit der positiven n-ten Wurzel positiver Zahlen

$$\exp\left(\frac{m}{n}\ln a\right) = \sqrt[n]{a^m}.$$

- Für alle $a \in \mathbb{C}_l$ gilt: $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a^z \end{array}$ ist stetig.
- $a^{z_1}a^{z_2} = a^{z_1+z_2}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

4.54 Satz (a) *Für alle* $z_1 \in S$ *und alle* $z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt* $(\mathrm{e}^{z_1})^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 z_2}$.

(b) *Für alle* $z_1 \in \mathbb{C}_l$ *und alle* $z_2 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_1^{z_2} \in \mathbb{C}_l$ *gibt es genau ein* $k \in \mathbb{Z}$*, so dass*

$$\ln\left(z_1^{z_2}\right) = z_2 \ln z_1 + 2k\pi\mathrm{i}.$$

Beweis. Übung. ■

5

Differenzieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Generalvoraussetzung in diesem Kapitel: $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

5.1 Ableitung

5.1 Definition *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$.*

(a)

$$f \textbf{ \textit{differenzierbar in} } a \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{\textit{(1.) Ableitung von } f \textit{ in } a} \textit{ (auch: }\textbf{\textit{Differentialquotient}}\textit{)}}}{=: f'(a)} =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) \quad \textit{existiert}$$

(b) *Falls $a \in \mathscr{D}$ Häufungspunkt von $\mathscr{D} \cap [a, \infty[$:*

$$\boldsymbol{f} \textbf{ \textit{von rechts differenzierbar in} } \boldsymbol{a} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{\textit{rechtsseitige (1.) Ableitung von } f \textit{ in } a}}}{f'_+(a)} \quad \textit{existiert}$$

Analog: von links differenzierbar.

(c) *Sei $A \subseteq \mathscr{D}$ und jedes $a \in A$ sei Häufungspunkt von $\mathscr{D}$:*

$$\boldsymbol{f} \textbf{ \textit{differenzierbar auf} } \boldsymbol{A} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall a \in A\colon\ f \textit{ differenzierbar in } a$$

und

$$\textbf{\textit{(1.) Ableitung von } } \boldsymbol{f} \textbf{ \textit{auf} } \boldsymbol{A}\textit{:} \qquad f' : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K}' \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

Alternative Notation: $f' =: \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} =: \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f.$

(d)

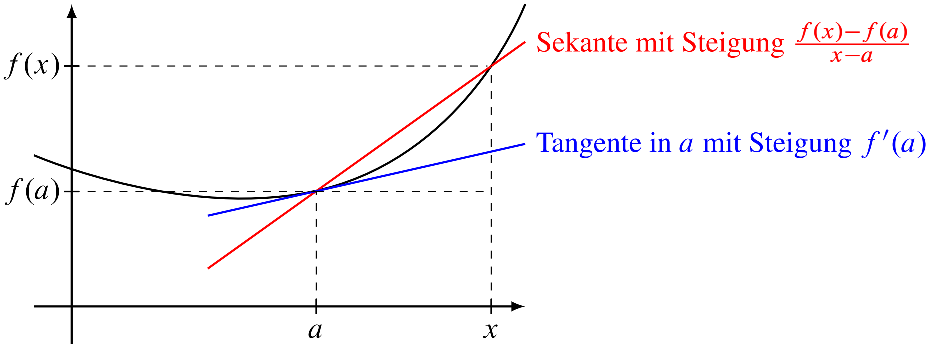
$$f \textbf{ \textit{differenzierbar} } \quad :\Longleftrightarrow \quad f \textit{ differenzierbar auf } \mathscr{D}$$

5.2 Bemerkung (a) Für $a \in \mathscr{D}$ Häufungspunkt von $\mathscr{D}$ gilt

$$\boldsymbol{f} \textbf{ differenzierbar in } \boldsymbol{a} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{beliebige Nullfolgen } (h_n)_n \subset \{x-a\,:\, x \in \operatorname{dom}(f)\} \setminus \{0\}}}{\lim_{h\to 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existiert.}$$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist kein Quotient, sondern lediglich Notation!

(c) Geometrische Interpretation für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$: $f'(a)$ ist Steigung der Tangente am Graphen von f im Punkt a.



5.3 Beispiel (a) Konstante Funktionen $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & c \end{array}$ für $c \in \mathbb{C}$

$$\overset{\forall a\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \qquad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0.$$

(b) Monome $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\forall a\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \qquad f'(a) = n a^{n-1},$$

denn

$$\frac{1}{h}\underbrace{\big(f(a+h)-f(a)\big)}_{(a+h)^n-a^n} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k a^{n-k} = \binom{n}{1}a^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}a^{n-k}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}.$$

(c) Exponentialfunktion $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\lambda x}\end{array}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\overset{\forall a\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \qquad f'(a) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda a} = \lambda f(a). \tag*{$(*)$}$$

Insbesondere gilt

- $\exp' = \exp$,
- $\sin' = \cos$,
- $\cos' = -\sin$,

(für letztere beide wegen Satz 4.35(b) und $(*)$ mit $\lambda = \pm\mathrm{i}$). Beweis von $(*)$: $\forall h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Funktionalgleichung}}}{=} \mathrm{e}^{\lambda a}\,\frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h} = \mathrm{e}^{\lambda a}\lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda h)^{n-1}}{n!}}_{=:g(h)}.$$

$h \mapsto g(h)$ ist assoziierte Funktion zu einer Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (Quotientenkriterium!) $\overset{\text{Satz 4.24(b)}}{\Longrightarrow}$ g stetig auf $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = g(0) = 1$.

(d) $|\cdot| : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|\end{array}$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aber nicht in 0, mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \operatorname{sgn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Die Ableitungen von rechts und links existieren dagegen in $x = 0$.

5.4 Definition (Höhere Ableitungen) *Sei* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, $x \in \mathscr{D}$ *und* $A \subseteq \mathscr{D}$.

(a)
- *Sei* $\varepsilon > 0$, *so dass* f *diff.-bar auf* $\mathscr{D} \cap\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ *und* f' *diff.-bar in* x.

  2. Ableitung von f in x: $\quad f''(x) := (f')'(x)$,
- ***f 2-mal diff.-bar (auf A)*** $\quad :\Longleftrightarrow \quad f, f'$ *diff.-bar (auf* A*).*

(b) *Induktive Definition für* $k \in \mathbb{N}$.

- *Sei* $\varepsilon > 0$, *so dass* $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f', \ldots, f^{(k-2)}$ *diff.-bar auf* $\mathscr{D} \cap\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ *und* $f^{(k-1)}$ *diff.-bar in* x.

  k-te Ableitung von f in x: $\quad f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x)$,
- ***f k-mal diff.-bar (auf A)*** $\quad :\Longleftrightarrow \quad f^{(0)}, \ldots, f^{(k-1)}$ *diff.-bar (auf* A*).*

  mit

  k-te Ableitung von f (auf A): $\quad f^{(k)} : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K}' \\ x & \mapsto & f^{(k)}(x)\end{array}$.

  Alternative Notation: $\quad f^{(k)} =: \dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} =: \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f =: \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f$.

(c) ***f k-mal stetig diff.-bar (auf A)*** $:\Longleftrightarrow$ f *k-mal diff.-bar (auf* A*) und* $f^{(k)}$ *stetig (auf* A*).*

5.5 Beispiel (a) $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

(b) $\sin'' = -\sin$,

(c) $\cos'' = -\cos$.

5.6 Satz (Lineare Approximierbarkeit) *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$. Dann gilt*

$$f \text{ diff.-bar in } a \iff \begin{cases} \exists m \in \mathbb{K}' \; \exists \delta > 0 \text{ und } \exists \varphi : \mathscr{D} \cap B_\delta(a) \to \mathbb{K}' \text{ mit } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{x-a} = 0 \\ \text{und } f(x) = f(a) + m(x-a) + \varphi(x) \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap B_\delta(a). \end{cases}$$

In diesem Fall ist $f'(a) = m$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Setze $m := f'(a)$ und $\forall x \in \mathscr{D} : \varphi(x) := f(x) - f(a) - m(x-a) \implies$

$$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{a\}: \quad \frac{\varphi(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\xrightarrow{x\to a} m} - m \xrightarrow{x\to a} 0.$$

„$\Leftarrow$“ $\forall x \in \mathscr{D} \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}$ gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \frac{\varphi(x)}{x-a}.$$

Daraus folgt nach Voraussetzung an φ, dass f diff.-bar in a mit $f'(a) = m$. ■

5.7 Bemerkung (a) Aus dem Beweis folgt, dass der Satz auch mit „$\delta = \infty$“ gilt, d.h. mit $\mathscr{D}$ anstelle von $\mathscr{D} \cap B_\delta(a)$.

(b) Insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{\varphi(x)}{x-a}(x-a)\right] = 0 = \varphi(a)$.

(c) Später dient lineare Approximierbarkeit als Definition der Diff.-barkeit in allgemeineren Situationen.

5.8 Korollar (a) *f diff.-bar in $a \implies f$ stetig in a.*

(b) *f k-mal stetig diff.-bar für ein $k \in \mathbb{N} \implies f^{(j)}$ stetig für alle $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.*

5.2 Ableitungsregeln

5.9 Satz *Sei $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathscr{D}, f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ diff.-bar in x. Es gilt*

(a) ***Linearität der Ableitung:*** *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}'$ ist $\lambda f + \mu g$ diff.-bar in x und*

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

(b) ***Produktregel:*** *fg ist diff.-bar in x und*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(c) ***Quotientenregel:*** *Sei $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diff.-bar in x und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

Beweis. (a) Folgt direkt aus den Regeln für Limiten.

(b) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in \mathscr{D} \implies$

$$(fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h) = f(x+h)g(x) + f(x+h)[g(x+h) - g(x)]$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= f'(x)g(x) + \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

(c) Da $g(x) \neq 0$ und g diff.-bar in $x \overset{\text{Kor. 5.8(a), Satz 3.19}}{\implies} \exists\, \delta > 0\ \forall y \in \mathscr{D} \cap B_\delta(x)\colon\ g(y) \neq 0.$

<u>1. Akt</u>: $f = 1$. Sei $h \in \mathbb{R}, |h| < \delta$ mit $x + h \in \mathscr{D}$ (also $g(x+h) \neq 0$), dann folgt

$$\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \underbrace{\frac{1}{g(x+h)g(x)}}_{\substack{\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{(g(x))^2}, \\ \text{da } g \text{ stetig}}} \underbrace{\frac{g(x) - g(x+h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} -g'(x)}$$

$$\implies \frac{1}{g} \text{ diff.-bar in } x \text{ und } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

<u>2. Akt</u>: $f \neq 1$. Produktregel und 1. Akt $\implies$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

■

5.10 Beispiel (a) **(Komplexer) Tangens**

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} \end{array} \qquad \text{mit} \quad \mathscr{D} := \mathbb{C} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

denn $\cos z = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = -1 \iff 2z = \pi + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Quotientenregel $\implies \tan|_{\mathscr{D}\cap\mathbb{R}}$ ist diff.-bar mit

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \forall x \in \mathscr{D} \cap \mathbb{R}.$$

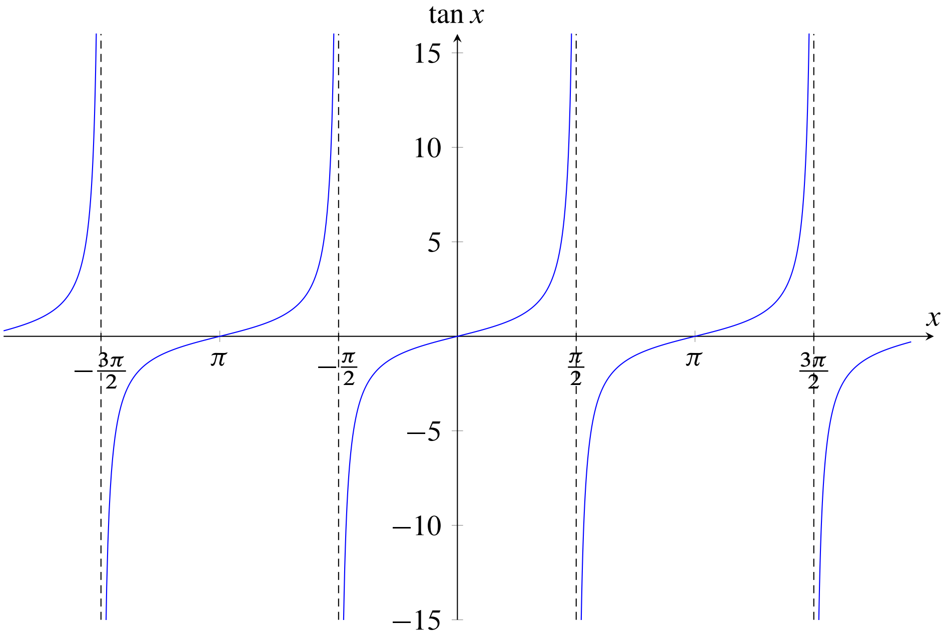


Abbildung 5.1: Funktionsgraph des (rellen) Tangens.

(b) **Inverse Potenz** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-n} \end{array}$, $n \in \mathbb{N}$, ist diff.-bar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-n}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Zusammen mit Beispiel 5.3(a), (b) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \begin{cases} \mathbb{R}, & n \in \mathbb{Z}_{\geqslant}, \\ \mathbb{R}\setminus\{0\}, & n \in \mathbb{Z}_{<}. \end{cases}$$

5.11 Satz (Kettenregel) *Seien $\mathscr{D}_f, \mathscr{D}_g \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}, g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{K}'$ Funktionen mit $f(\mathscr{D}_f) \subseteq \mathscr{D}_g$. Sei f diff.-bar in $x \in \mathscr{D}_f$ und g diff.-bar in $f(x) \in \mathscr{D}_g$. Dann ist $g \circ f$ diff.-bar in $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$ mit*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Beweis. Nach Satz 5.6 und Bemerkung 5.7(a) gilt (mit einer translatierten Restfunktion)

- f diff.-bar in $x \implies \exists \varphi_f : \underbrace{\mathscr{D}_f - \{x\}}_{:= \{x' - x \,:\, x' \in \mathscr{D}_f\}} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h + \varphi_f(h)}_{=:\,\theta(h)} \qquad \forall h \in \mathscr{D}_f - \{x\} \text{ und } \frac{\varphi_f(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

- g diff.-bar in $y := f(x) \implies \exists\, \varphi_g : \mathscr{D}_g - \{y\} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(y+l) = g(y) + g'(y)l + \varphi_g(l) \quad \forall l \in \mathscr{D}_g - \{y\} \ \text{ und } \ \frac{\varphi_g(l)}{l} \xrightarrow{l\to 0} 0.$$

Also ist $\forall h \in \mathscr{D}_f - \{x\}$

$$g\big(\underbrace{f(x+h)}_{f(x)+\theta(h)}\big) = g\big(f(x)\big) + g'\big(f(x)\big)\theta(h) + \varphi_g\big(\theta(h)\big).$$

und somit $\forall 0 \neq h \in \mathscr{D}_f - \{x\}$

$$\frac{1}{h}\Big[(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)\Big] = g'\big(f(x)\big)\Big[f'(x) + \underbrace{\frac{\varphi_f(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}\Big] + \underbrace{\frac{\varphi_g\big(\theta(h)\big)}{h}}_{=:\,\Phi(h)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$.

<u>1. Fall</u> $\theta(h) = 0 \implies \varphi_g\big(\theta(h)\big) = \varphi_g(0) \overset{\text{Bem. 5.7(b)}}{=} 0 \implies \Phi(h) = 0.$

<u>2. Fall</u> $\theta(h) \neq 0 \implies \Phi(h) = \underbrace{\frac{\theta(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(x)} \ \underbrace{\frac{\varphi_g\big(\theta(h)\big)}{\theta(h)}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0,\ \text{da } \theta(h)\to 0 \text{ und } \frac{\varphi_g(l)}{l} \xrightarrow{l\to 0} 0} \ \xrightarrow{h\to 0} 0.$ ■

5.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) nicht ausgeartetes Intervall (d.h. $|I| > 0$). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und diff.-bar in $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} diff.-bar in $y := f(x)$ mit*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Beweis. Übung. ■

5.13 Beispiel (a) **Logarithmus** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_> & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array} \implies$

$$f := \exp \implies f' \circ f^{-1} = \exp \circ \ln = \mathrm{id} \overset{\text{Satz 5.12}}{\implies} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_>.$$

(b) **Allgemeine Potenz** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_> & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x^z = \mathrm{e}^{z\ln x} \end{array}$ mit $z \in \mathbb{C} \implies$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{z\ln x} \underset{\substack{\uparrow \\ g:=\mathrm{e}^{z\cdot}}}{=} \underbrace{g'(\ln x)}_{zg(\ln x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x \overset{\text{(a)}}{=} zx^z \cdot \frac{1}{x} = zx^{z-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_>.$$

5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

In diesem Unterkapitel sei stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (Funktionen sind reellwertig).

5.14 Definition *Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathscr{D}$.*

$$\begin{aligned}
f \text{ hat } \textbf{\textit{lokales Maximum}} \text{ in } \xi \quad &:\iff \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in \big(B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}\big) \cap \mathscr{D}\colon\ f(\xi) \geqslant f(x),\\
f \text{ hat } \textbf{\textit{striktes lokales Maximum}} \text{ in } \xi \quad &:\iff \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in \big(B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}\big) \cap \mathscr{D}\colon\ f(\xi) > f(x),\\
f \text{ hat } \textbf{\textit{lokales Minimum}} \text{ in } \xi \quad &:\iff \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in \big(B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}\big) \cap \mathscr{D}\colon\ f(\xi) \leqslant f(x),\\
f \text{ hat } \textbf{\textit{striktes lokales Minimum}} \text{ in } \xi \quad &:\iff \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in \big(B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}\big) \cap \mathscr{D}\colon\ f(\xi) < f(x).
\end{aligned}$$

- *ξ heißt **Maximalstelle** bzw. **Minimalstelle**.*
- ***(Striktes) lokales Extremum:** (striktes) lokales Maximum oder Minimum*

  ***Extremalstelle:** Maximalstelle oder Minimalstelle.*

Eine notwendige Bedingung für Extrema differenzierbarer Funktionen liefert

5.15 Satz *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ mit lokalem Extremum in $\xi \in]a, b[$ und f diff.-bar in ξ. Dann gilt*

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung ξ Maximalstelle (für Minimalstelle analog). Nach Voraussetzung $\exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(\xi) \subset]a, b[$ und $f(x) \leqslant f(\xi)\ \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \implies$

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \underbrace{\lim_{x \nearrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geqslant 0} = \underbrace{\lim_{x \searrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leqslant 0} \implies f'(\xi) = 0.$$

■

5.16 Warnung! (a) Die Bedingung $f'(\xi) = 0$ ist <u>nicht hinreichend</u> für Existenz von Extrema.

Beispiel: $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ und $\xi = 0$.

(b) Randpunkte a, b sind ausgeschlossen in Satz 5.15.

Beispiel: $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ und $\xi = 0$ oder $\xi = 1$.

5.17 Satz (Satz von Rolle) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f diff.-bar auf $]a, b[$. Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. <u>1. Fall</u> $f =$ const. ist trivial.

<u>2. Fall</u> $f \neq$ const. $\implies \exists\, x_0 \in]a, b[: f(x_0) \neq f(a)$. O.B.d.A. sei $f(x_0) > f(a)$ ($<$ analog).
Satz 3.27 $\implies$ f nimmt Maximum an, das heißt

$$\exists\, \xi \in [a, b] \text{ mit } f(\xi) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

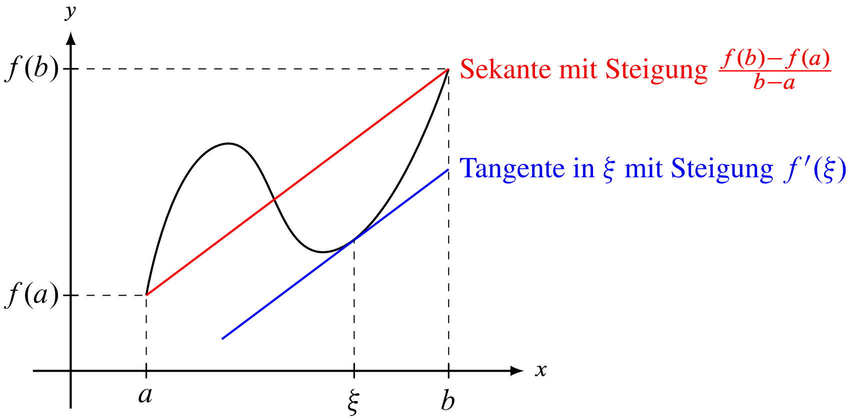


Abbildung 5.2: Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für $g = \mathrm{id}$.

$$\text{Wegen } f(x_0) > f(a) = f(b) \implies \xi \in\,]a,b[\implies \text{Behauptung mit Satz 5.15.} \qquad \blacksquare$$

5.18 Korollar (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Seien* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und diff.-bar in* $]a,b[$*. Sei* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in\,]a,b[$*. Dann*

$$\exists \text{ „Mittelwert“ } \xi \in\,]a,b[: \; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi).$$

[Beachte: Satz von Rolle $\implies$ $g(a) \neq g(b)$.*]*

Insbesondere für $g = \mathrm{id}$ *gilt*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis. Anwendung des Satzes von Rolle auf

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big),$$

denn φ ist stetig auf $[a,b]$, diff.-bar auf $]a,b[$ und $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$. Somit

$$\exists \xi \in\,]a,b[: \; 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi). \qquad \blacksquare$$

Der Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung erfolgt in

5.19 Satz *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *diff.-bar. Dann gilt*

(a) $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in\,]a,b[\implies f$ *isoton* (*d.h. auf dem Def.bereich* $[a,b]$),
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in\,]a,b[\implies f$ *strikt iston,*
$f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in\,]a,b[\implies f$ *antiton,*
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in\,]a,b[\implies f$ *strikt antiton.*

(b) $$\begin{aligned} &f \textit{ isoton} &&\implies && f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \,]a,b[\,, \\ &f \textit{ antiton} &&\implies && f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \,]a,b[\,. \end{aligned}$$

[Hier keine extra Version für „strikt“. Beispiel: $x \mapsto f(x) = x^3$.*]*

Beweis. Übung. ■

5.20 Satz *Sei* $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ *diff.-bar und* $\xi \in \,]a,b[\,$. *Weiter sei*

- f *2-mal diff.-bar in* ξ,
- $f'(\xi) = 0$,
- $f''(\xi) > 0$ [*bzw.* $f''(\xi) < 0$].

Dann hat f *in* ξ *ein striktes lokales Minimum* [*bzw. Maximum*].

5.21 Bemerkung Im Gegensatz zu Satz 5.15 gibt Satz 5.20 eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für ein lokales Extremum. Beispiel: $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}$ und $\xi = 0$.

Beweis von Satz 5.20. Sei o.E. $f''(\xi) > 0$ [Fall < 0 analog].

$$0 < f''(\xi) \overset{f'(\xi)=0}{=} \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{x - \xi} \implies \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(\xi) \subset \,]a,b[\, \text{ und } \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}\colon \frac{f'(x)}{x-\xi} > 0.$$

Und somit

$$\forall h \in \,]0,\varepsilon[\,: \quad f'(\xi - h) < 0 < f'(\xi + h).$$

Mit Satz 5.19(a) folgt f strikt antiton in $]\xi - \varepsilon, \xi]$ und f strikt isoton in $[\xi, \xi + \varepsilon[\; \implies$ Beh. ■

5.22 Satz (Regeln von DE L'HOSPITAL) *Sei* $\mathscr{D} := \,]a,b[$ *und seien* $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *diff.-bar. Es gebe* $b' \in \,]a,b[\,$, *so dass* $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \,]a,b'[$ *und es gelte*

$$\underline{\textit{entweder}} \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x) \qquad \underline{\textit{oder}} \quad \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Falls $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert oder eine bestimmte Divergenz vorliegt, dann gilt das auch für*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die Aussage gilt analog für $x \nearrow b$ *und, falls (anders als oben!)* $\mathscr{D} \supseteq \,]a,\infty[\,$, *bzw.* $\mathscr{D} \supseteq \,]-\infty,b[$ *auch für* $x \to \pm\infty$.

Beweis. Im Fall der Voraussetzung „oder“ sei o.E. $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \infty$ [sonst betrachte $-g$].

Sei $L := \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Fall: $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.</u> Sei $L_+ > L$ beliebig und $\ell \in \,]L, L_+[\; \Longrightarrow$

$$\exists\, x_0 \in \,]a, b']\; \forall x \in \,]a, x_0]\colon\; \frac{f'(x)}{g'(x)} < \ell. \tag{1}$$

Fixiere ein beliebiges $y \in \,]a, x_0]$. Dann gilt $\forall x \in \,]a, y[$ gemäß Anwendung des Mittelwertsatzes (Kor. 5.18) auf $[x, y]$

$$\exists\, \xi \in \,]x, y[\colon\; \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \overset{(1)}{<} \ell. \tag{2}$$

- Im Fall der Voraussetzung „entweder“ folgt mit $x \searrow a$ in (2)

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant \ell < L_+ \qquad \forall y \in \,]a, x_0]. \tag{3}$$

- Im Fall der Voraussetzung „oder“ $\exists\, x_1 \in \,]a, y[\; \forall x \in \,]a, x_1]\colon\; g(x) > \max\{g(y), 0\}$. Nach Multiplikation von (2) mit $\dfrac{g(x) - g(y)}{g(x)}$ folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \ell\Big(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\Big) + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad \forall x \in \,]a, x_1].$$

Da g divergiert und $\ell < L_+ \implies \exists\, x_2 \in \,]a, x_1]$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} < L_+ \qquad \forall x \in \,]a, x_2]. \tag{4}$$

Zusammenfassung der beiden Fälle (3) und (4):

$$\forall L_+ > L\; \exists\, \underbrace{x_+}_{:=x_2<x_0} \in \,]a, b[\; \forall x \in \,]a, x_+]\colon\; \frac{f(x)}{g(x)} < L_+. \tag{5}$$

Falls $L = -\infty$, folgt die Behauptung aus (5) durch Wahl von $L_+ \in -\mathbb{N}$.

<u>Fall: $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.</u> Analog zum obigen Fall gilt

$$\forall L_- < L\; \exists\, x_- \in \,]a, b[\; \forall x \in \,]a, x_-]\colon\; \frac{f(x)}{g(x)} > L_-. \tag{6}$$

Falls $L = \infty$, folgt die Behauptung aus (6) durch Wahl von $L_- \in \mathbb{N}$. Falls $L \in \mathbb{R}$, wähle in (5) und (6) $L_\pm := L \pm \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig.

<u>Zusätze:</u> Der Beweis der Behauptung für $x \nearrow b$ ist analog. Für $x \to \pm\infty$ folgt sie mittels $\tilde{f}\left(\frac{1}{x}\right) := f(x)$, $\tilde{g}\left(\frac{1}{x}\right) := g(x)$ aus der Behauptung für $x \nearrow 0$ bzw. $x \searrow 0$ für $\tilde{f}, \tilde{g}$. ■

5.23 Beispiel Sei $\mathscr{D} =]0,\infty[$ und $\alpha > 0$. Dann gilt

(a) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$,

denn $\ln x \xrightarrow{x \searrow 0} -\infty$, $x^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \ln x} \xrightarrow{x \searrow 0} \infty \implies$

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{Satz 5.22}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{-1}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

wegen (a) mittels $y := \frac{1}{x}$ und $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$.

<u>Moral:</u> Der Logarithmus wächst „langsamer“ als jede Potenz.

6

Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Generalvoraussetzung in diesem Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $I := [a, b]$

6.1 RIEMANN-integrierbare Funktionen

6.1 Definition (a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ***Treppenfunktion***

$$:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists \textit{ Unterteilung } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \textit{ von } I: \\ \forall\, j = 1, \ldots, n\ \exists\, c_j \in \mathbb{R} \textit{ mit } \varphi\big|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j . \end{array} \right.$$

Die Werte $\varphi(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$, sind definiert – über sie ist aber nichts ausgesagt.

(b) ***Menge der Treppenfunktionen auf I:*** $\mathcal{T}(I) := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi \textit{ Treppenfunktion}\}$.

(c) *Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ Treppenfunktion*

***Integral** von φ:* $$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Alternative Notationen: $$\int_a^b \mathrm{d}x\, \varphi(x), \quad \int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_I \varphi.$$

6.2 Bemerkung $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung von φ. Für den Beweis verwende gröbste Verfeinerung zweier gegebener Unterteilungen, siehe im Beweis von Lemma 6.3(a). Kern des Arguments ist, dass für $x_{j-1} = z_{\alpha_{j-1}} < z_{\alpha_{j-1}+1} < \ldots < z_{\alpha_j} = x_j$ gilt

$$c_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{\alpha=\alpha_{j-1}+1}^{\alpha_j} c_{j(\alpha)} (z_\alpha - z_{\alpha-1}) \qquad \text{mit } j(\alpha) = j\ \forall \alpha = \alpha_{j-1} + 1, \ldots, \alpha_j .$$

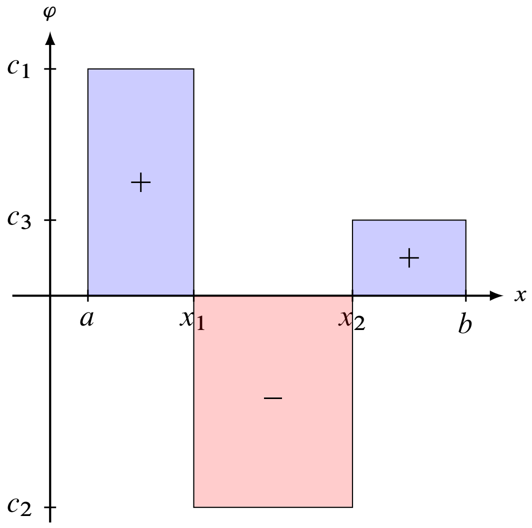


Abbildung 6.1: Das Integral einer Treppenfunktion φ.

6.3 Lemma (a) *$\mathcal{T}(I)$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

Linearität des Integrals:
$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) *Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I)$. Dann gilt*

Monotonie des Integrals:
$$\varphi \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Beweis. (b) klar. Zu (a): $\mathcal{T}(I)$ ist Vektorraum, da

- $0 \in \mathcal{T}(I)$ klar.
- Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\varphi \in \mathcal{T}(I)$, denn $c_j \to \lambda c_j$.
- Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi\big|_{]x_{j-1},x_j[} = c_j$, $j = 1,\dots,n$, $\psi\big|_{]y_{k-1},y_k[} = d_k$, $k = 1,\dots,m$. Definiere **gröbste Verfeinerung** $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{\nu-1} < z_\nu = b$ beider Unterteilungen, das heißt
$$\big\{z_\alpha : \alpha = 1,\dots,\nu-1\big\} = \big\{x_j : j = 1,\dots,n-1\big\} \cup \big\{y_k : k = 1,\dots,m-1\big\}.$$
Sie ist gröbste Unterteilung, die die Unterteilungen von φ und ψ enthält $\Longrightarrow$
$$\forall \alpha = 1,\dots,\nu\ \exists\, j(\alpha) \in \{1,\dots,n\}\ \exists\, k(\alpha) \in \{1,\dots,m\}:$$
$$\varphi\big|_{]z_{\alpha-1},z_\alpha[} = c_{j(\alpha)} \text{ und } \psi\big|_{]z_{\alpha-1},z_\alpha[} = d_{k(\alpha)} \implies (\varphi+\psi)\big|_{]z_{\alpha-1},z_\alpha[} = c_{j(\alpha)} + c_{k(\alpha)},$$
also $\varphi + \psi \in \mathcal{T}(I)$.

Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\lambda c_{j(\alpha)} + \mu d_{k(\alpha)})(z_\alpha - z_{\alpha-1}) \\ &= \lambda \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_{j(\alpha)}(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})} + \mu \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_{k(\alpha)}(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\sum_{k=1}^{m} d_k(y_k - y_{k-1})} \quad \text{[s. Bem. 6.2]} \\ &= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

6.4 Definition (a) *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$.

- ***Oberintegral*** $\mathcal{O}_I(f) := \inf\left\{ \int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \geqslant f \right\}$,
- ***Unterintegral*** $\mathcal{U}_I(f) := \sup\left\{ \int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \leqslant f \right\}$,
- ***f Riemann-integrierbar (über I)*** $:\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R} \ni \mathcal{O}_I(f) = \mathcal{U}_I(f) =: \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$

(b) *Sei* $f : I \to \mathbb{C}$:

- *f Riemann-integrierbar* $:\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *Riemann-integrierbar.*
  In diesem Fall ist

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I (\operatorname{Re} f)(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_I (\operatorname{Im} f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.5 Bemerkung (a) Seien $m_\pm \in \mathbb{R}$ mit $m_- \leqslant f \leqslant m_+$, sei $|I| := b - a \implies$

$$m_-|I| \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi = m_- \\ \text{zugelassen}}}{\leqslant} \mathcal{U}_I(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 6.3}(b)\text{:} \\ \varphi \leqslant \psi \implies \int_I \varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \psi\,\mathrm{d}x}}{\leqslant} \mathcal{O}_I(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \psi = m_+}}{\leqslant} m_+|I|.$$

(b) Jedes $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = c_j}}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}).$$

(c) Die Funktion $x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ ist nicht Riemann-integrierbar über $I := [0, 1]$, denn

- $\mathscr{O}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 1$, da inf durch $1_{[0,1]}$ realisiert wird, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{U}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 0$, da sup durch 0 realisiert wird, da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

(d) Der Name der Integrationsvariable ist irrelevant (so wie der Name des Summationsindex).

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.6 Lemma *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f beschränkt.*

Beweis. Da $\mathscr{O}_I(f), \mathscr{U}_I(f) \in \mathbb{R} \implies \{\varphi_+ \in \mathscr{T}(I) : f \leqslant \varphi_+\} \neq \varnothing$ und $\{\varphi_- \in \mathscr{T}(I) : \varphi_- \leqslant f\} \neq \varnothing$. Da Treppenfunktionen beschränkt $\implies$ Behauptung. ■

6.7 Definition *Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung von I und $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ sei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ (**„Stützstelle“**).*

- ***Zerlegung*** *(= Unterteilung mit Stützstellen)* $\mathcal{Z} := \big((x_j)_{j\in\{0,\dots,n\}}, (\xi_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}\big)$
- ***Feinheit der Zerlegung*** $\mu(\mathcal{Z}) := \max\big\{x_j - x_{j-1} : j = 1, \dots, n\big\}$
- ***Riemann-Approximante (von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$)*** $\varphi_{\mathcal{Z}} \in \mathscr{T}(I)$ *mit* $\varphi_{\mathcal{Z}}\big|_{]x_{j-1},x_j[} = f(\xi_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$
- ***Riemann-Summe (von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$)***

$$\mathscr{R}(\mathcal{Z}, f) := \int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Der nächste Satz dient zur Charakterisierung von Riemann-integrierbaren Funktionen.

6.8 Satz (Integrabilitätskriterium von Riemann) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent*

(i) *f ist Riemann integrierbar.*

(ii) $\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ *Zerlegungen* $\mathcal{Z}$ *mit* $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$:

$$|J - \mathscr{R}(\mathcal{Z}, f)| < \varepsilon.$$

Notation: $\lim_{\mu(\mathcal{Z})\to 0} \mathscr{R}(\mathcal{Z}, f) = J.$

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi_+, \varphi_- \in \mathscr{T}(I)$ *mit* $\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+$ *und*

$$\int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I \varphi_-\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Trifft eine der Aussagen (i) – (iii) *zu, so ist*

$$J = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. (iii) ⇒ (i) $\forall \varphi_\pm \in \mathscr{T}(I)$ mit $\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+$ gilt

$$-\infty < \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{U}_I(f) \leqslant \mathscr{O}_I(f) \leqslant \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x < \infty \overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \mathscr{U}_I(f) = \mathscr{O}_I(f) \in \mathbb{R}.$$

(i) ⇒ (iii) Sei $\varepsilon > 0$. Per def. von $\mathscr{U}(I)$ und $\mathscr{O}(I)$ als nicht-leeres sup bzw. inf $\exists\, \varphi_\pm \in \mathscr{T}(I)$ mit

$$\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+, \qquad \mathscr{U}(I) - \varepsilon < \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x < \mathscr{O}(I) + \varepsilon$$

Wegen (i) ist $\mathscr{U}_I(f) = \mathscr{O}_I(f)$ und somit

$$0 \leqslant \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x < 2\varepsilon.$$

(ii) ⇒ (iii) Nach Voraussetzung $\exists\, J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, so dass für $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit $\max\limits_{j=1,\dots,n}(x_j - x_{j-1}) < \delta \implies$

$$\forall j = 1,\dots,n\ \forall \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]\colon \left| J - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Für $j = 1,\dots,n$ sei $f_j^+ := \sup\{f(x) : x \in\,]x_{j-1}, x_j[\,\}$, $f_j^- := \inf\{f(x) : x \in\,]x_{j-1}, x_j[\,\}$

$$\overset{\text{Def. sup, inf}}{\Longrightarrow} \qquad \exists\, (\eta_{j,\nu}^\pm)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset\,]x_{j-1}, x_j[\ \text{ mit } \lim_{\nu\to\infty} f(\eta_{j,\nu}^\pm) = f_j^\pm.$$

Beh.: $f_j^\pm \in \mathbb{R}\ \forall j = 1,\dots,n$.

Bew.: Fixiere $j \in \{1,\dots,n\}$. Wähle $\xi_j = \eta_{j,\nu}^\pm$ in ($*$), belasse die anderen ξ_k für $k \neq j \overset{\nu\to\infty}{\Longrightarrow}$

$$\Bigg| \underbrace{J - \sum_{k\neq j} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\in\mathbb{R}} - f_j^\pm(x_j - x_{j-1}) \Bigg| \leqslant \varepsilon. \quad \checkmark$$

Wähle nun $\xi_k = \eta_{k,\nu}^\pm\ \forall k = 1,\dots,n$ in ($*$) $\overset{\nu\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \left| J - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^\pm (x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \varepsilon.$

Definiere $\varphi_\pm \in \mathscr{T}(I)$ durch $\varphi_\pm|_{]x_{k-1}, x_k[} := f_k^\pm$ und $\varphi_\pm(x_k) := f(x_k)\ \forall k = 1,\dots,n \implies$

$$\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+ \quad \text{und} \quad \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon.$$

(iii) ⇒ (ii) Seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi_\pm$ wie in (iii). Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ_+ und φ_- und sei $\delta > 0$ mit

$$2n\delta \underbrace{\left(\sup_{x\in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x\in I} |\varphi_-(x)| \right)}_{=:\, S} < \varepsilon. \tag{1}$$

Sei $\mathcal{Z} = \big((y_k)_{k=0,\dots,m}, (\xi_k)_{k=1,\dots,m}\big)$ eine beliebige Zerlegung mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$ und sei

$$a = z_0 < z_1 < \dots < z_\nu = b$$

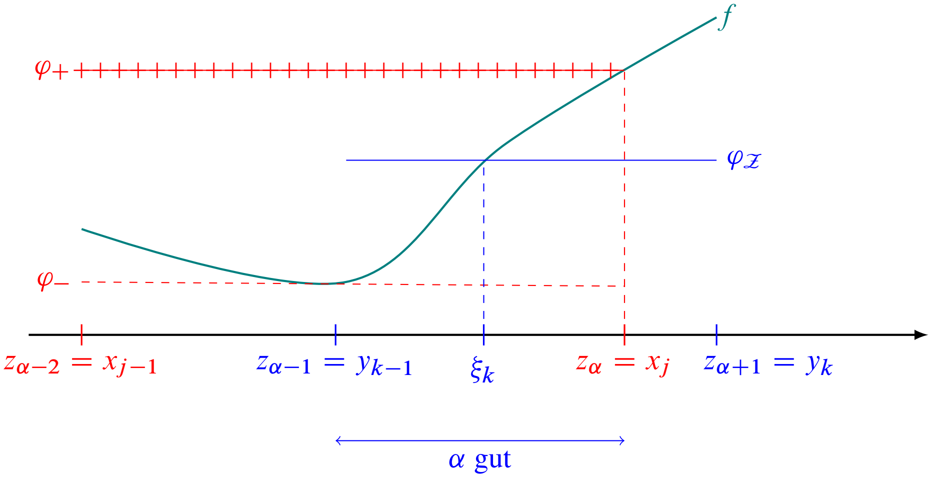
die *gröbste* gemeinsame Unterteilung von $(x_j)_j$ und $(y_k)_k$, also $\nu \leqslant m + (n-1)$
[man denke sich die x_j, $j = 1, \dots, n-1$, in die Unterteilung $(y_k)_{k=0,\dots,m}$ hineingeworfen].

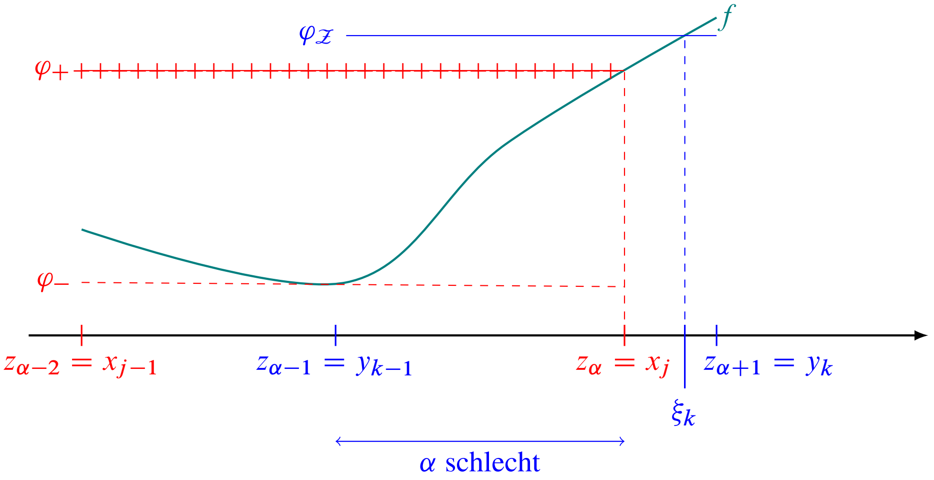
Definition. $$\alpha \in \{1, \dots, \nu\}\ \underline{\text{gut}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \varphi_- \leqslant \varphi_{\mathcal{Z}} \leqslant \varphi_+ \text{ auf }]z_{\alpha-1}, z_\alpha[\,. \tag{2}$$

Es gilt

$$\exists \text{ höchstens } 2n \text{ nicht gute } \alpha\text{'s, da (siehe auch Abb.)} \tag{3}$$

(a) $\xi_k \in]z_{\alpha-1}, z_\alpha[\implies \alpha$ gut.
(b) $\xi_k = z_\alpha$ und $z_\alpha \notin \{x_0, \dots, x_n\} \implies \alpha$ und $\alpha + 1$ gut.
(c) $\xi_k = z_\alpha$ und $z_\alpha \in \{x_0, \dots, x_n\} \implies$ keine Aussage für α und $\alpha + 1$ möglich
$\implies$ falls (c) nicht vorliegt für ein ξ_k, liefert es mindestens ein gutes α
$\implies$ für $m > n$ $\exists$ mindestens $m - (n+1)$ gute α's $\implies$ (3) [für $m \leqslant n$ ist (3) klar].





Für $\sigma \in \{+,-,\mathcal{Z}\}, \alpha \in \{1,\dots,\nu\}$ sei $c_{\sigma,\alpha} := \varphi_\sigma\big|_{]z_{\alpha-1},z_\alpha[}$. Setze

$$\int_{I,g} \varphi_\sigma(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha \text{ gut}}}^{\nu} c_{\sigma,\alpha}(z_\alpha - z_{\alpha-1}).$$

Es folgt

- $$\left|\int_I \varphi_\sigma(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_\sigma(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\text{ nicht gut}}}^{\nu} \underbrace{|c_{\sigma,\alpha}|}_{\leqslant S}\,\underbrace{(z_\alpha-z_{\alpha-1})}_{\leqslant\mu(\mathcal{Z})<\delta} \overset{(3),(1)}{<} \varepsilon, \tag{4}$$
- $$\int_{I,g}\varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{\leqslant} \int_{I,g}\varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{\leqslant} \int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\left|\int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_-(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\left|\int_I\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I\varphi_-(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\left|\int_I\varphi_-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_-(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\overset{(4),\text{ n.V.},(4)}{<} 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Zusammen mit (5) folgt

$$0 \leqslant \int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x < 3\varepsilon. \tag{6}$$

Insgesamt schließen wir mit $-\infty < \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{U}_I(f) \leqslant \underbrace{\mathcal{O}_I(f)}_{=:J\ \Longrightarrow\ \in\mathbb{R}} \leqslant \int_I\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x < \infty$

$$\begin{aligned}\big|J - \underbrace{\mathcal{R}(\mathcal{Z},f)}_{\int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x}\big| &\leqslant \left|J - \int_I\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_I\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\left|\int_{I,g}\varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I,g}\varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{I,g}\varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_I\varphi_{\mathcal{Z}}(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\overset{\text{n.V.},(4),(6),(4)}{<} \varepsilon+\varepsilon+3\varepsilon+\varepsilon = 6\varepsilon.\end{aligned}$$

Also gilt (ii).

Wert von J: Da $J = \mathcal{O}_I(f) \in \mathbb{R} \overset{\text{(i) gilt}}{\Longrightarrow} J = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Ziel ist eine andere Charakterisierung der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen in Satz 6.12. Dazu 2 Vorbereitungen: Nullmengen und die Überdeckungskompaktheit abgeschlossener eigentlicher Intervalle (Satz 6.11).

6.9 Definition *Sei $N \subset \mathbb{R}$.*

$$N \text{ (\textsc{Lebesgue}-) } \textbf{\textit{Nullmenge}} \; :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \; \exists \textit{ offene Intervalle } J_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\text{:} \\ &N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \;\; \textit{und} \;\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

6.10 Satz (a) *Seien $N_k \subset \mathbb{R}$ Nullmengen $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge.*

(b) *Sei $M \subset \mathbb{R}$ abzählbar $\Longrightarrow$ M ist Nullmenge.*

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung eine „Überdeckung“ $N_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n^k$ mit offenen Intervallen J_n^k, so dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < 2^{-k}\varepsilon$.

Daraus folgt $\bigcup_k N_k \subseteq \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}} J_n^k$ mit offenen Intervallen und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = \varepsilon$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$: $\{x\} \subset \,]x - \varepsilon/4, x + \varepsilon/4[\, =: J$ und $|J| = \varepsilon/2 < \varepsilon$; also einpunktige Mengen sind Nullmengen. Da M abzählbar, folgt die Behauptung aus (a). ■

Beispiel (a) $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge. (b) Teilmengen einer Nullmenge sind Nullmengen.

Der nächste (und letzte) Hilfssatz für die Charakterisierung integrierbarer Funktionen ist ein Spezialfall des Kompaktheitssatzes von HEINE-BOREL (siehe Analysis II). Der Vollständigkeit halber geben wir dennoch bereits hier einen Beweis.

6.11 Satz (Überdeckungskompaktheit abgeschlossener Intervalle) *Seien $-\infty < a < b < \infty$, $\mathscr{J}$ eine (unendliche) Indexmenge und für alle $\alpha \in \mathscr{J}$ sei I_α ein offenes Intervall. Es gelte*

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathscr{J}} I_\alpha.$$

Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, $\exists J \in \mathbb{N} \; \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_J \in \mathscr{J}$, so dass

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} I_{\alpha_n}.$$

Beweis. Per Widerspruch. Annahme: $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von $[a, b] =: K_1$.
$\Longrightarrow$ mindestens eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Wähle eines davon aus und bezeichne es als K_2.
Per Induktion folgt: $\exists$ Intervallschachtelung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

(1) $K_n \subseteq K_{n-1}$

(2) $|K_n| = |K_{n-1}|/2$

(3) $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von K_n.

Satz 2.74 (Intervallschachtelungsprinzip – benötigt Abgeschlossenheit und Beschränktheit!) $\Longrightarrow$

$$\exists_1 x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ x \in K_n.$$

Da $(I_\alpha)_{\alpha \in J} \supseteq [a,b] \implies \exists\, \alpha_0 \in \mathscr{J}\colon\ x \in I_{\alpha_0}$. Nun

$$I_{\alpha_0} \text{ offen} \implies \exists\, \varepsilon > 0\colon\ x \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq I_{\alpha_0}.$$

Schließlich betrachte $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|K_n| < \varepsilon \overset{x \in K_n}{\Longrightarrow} K_n \subset \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq I_{\alpha_0}$. $\lightning$ zu (3). ■

Nun zum zweiten Charakterisierungssatz.

6.12 Satz (Integrabilitätskriterium von Lebesgue)
Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $\mathscr{N}_f := \{x \in I : f$ <u>nicht</u> stetig in $x\}$. Dann gilt

$$f \text{ Riemann-integrierbar auf } I \iff f \text{ beschränkt und } \mathscr{N}_f \text{ Nullmenge.}$$

Beweis. „$\Leftarrow$". Sei $\varepsilon > 0$.

- Sei $x \in I \setminus \mathscr{N}_f \overset{f \text{ stetig in } x}{\Longrightarrow} \exists\, \delta_x > 0\ \forall y \in B_{\delta_x}(x) \cap I$:
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$
- Da $\mathscr{N}_f$ Nullmenge, $\exists$ Überdeckung $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathscr{N}_f$ aus offenen Intervallen mit
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon. \tag{2}$$

Damit gilt

$$I \subseteq \left(\bigcup_{x \in I \setminus \mathscr{N}_f} B_{\delta_x}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \right)$$

Nach Satz 6.11 ist I überdeckungskompakt, das heißt $\exists$ endliche Teilüberdeckung. Also $\exists\, K, N \in \mathbb{N}\ \exists\, x_1, \dots, x_K \in I \setminus \mathscr{N}_f\ \exists\, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ mit

$$I \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{K} B_{\delta_{x_k}}(x_k) \right) \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{N} J_{n_\nu} \right).$$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_{L-1} < z_L = b$ eine Unterteilung von $I = [a,b]$ mit $\forall l = 1, \dots, L$ gilt

$$\begin{aligned} &\underline{\text{entweder}} \quad \exists\, k_l = 1, \dots, K\colon\ I_l := \,]z_{l-1}, z_l[\, \subseteq B_{\delta_{x_{k_l}}}(x_{k_l}) &&:\Longleftrightarrow\ l \text{ gut},\\ &\underline{\text{oder}} \quad \exists\, \nu_l = 1, \dots, N\colon\ I_l \subseteq J_{n_{\nu_l}} &&:\Longleftrightarrow\ l \text{ schlecht}. \end{aligned}$$

Seien $\varphi_\pm \in \mathscr{T}(I)$ mit $\varphi_+\big|_{I_l} := \sup\limits_{x\in I_l} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ f \text{ beschr.}}}{\in} \mathbb{R}$, $\varphi_-\big|_{I_l} := \inf\limits_{x\in I_l} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ f \text{ beschr.}}}{\in} \mathbb{R}$ konstant auf I_l $\forall l = 1,\dots,L$ und $\varphi_\pm(z_l) := f(z_l)$ $\forall l = 0,\dots,L$.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ 0 \leqslant \mathscr{O}_I(f) - \mathscr{U}_I(f) &\overset{\varphi_-\leqslant f\leqslant\varphi_+}{\leqslant} \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{L} \Big(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l}\Big)\,|I_l| \\ &= \sum_{l \text{ gut}} \underbrace{\Big(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l}\Big)}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ gemäß (1)}}\,|I_l| + \sum_{l \text{ schlecht}} \underbrace{\Big(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l}\Big)}_{\leqslant 2 \sup_{x\in I} |f(x)| =: 2S < \infty \text{ n.V.}}\,|I_l| \\ &\leqslant 2\varepsilon|I| + 2S \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} |J_{n_\nu}|}_{<\varepsilon \text{ gemäß (2)}} < 2\varepsilon(|I| + S).\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.

„$\Rightarrow$“. Für Beschränktheit, siehe Lemma 6.6. Nun zu den Unstetigkeitsstellen. Für $x \in I$ sei (beachte: Limiten antitoner, von unten beschränkter Folgen existieren!)

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\searrow 0} \sup_{x'\in]x-\delta,x+\delta[\cap I} |f(x) - f(x')|.$$

Es gilt: f stetig in x $\Longleftrightarrow$ $\omega_f(x) = 0$.
Also

$$\mathscr{N}_f = \big\{x \in I : \omega_f(x) > 0\big\} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \underbrace{\Big\{x \in I : \omega_f(x) > \frac{1}{s}\Big\}}_{=:\,N_{f,s}}.$$

Wir zeigen: $N_{f,s}$ ist Nullmenge $\forall s \in \mathbb{N}$ $[\overset{\text{Satz 6.10(a)}}{\Longrightarrow}$ Behauptung].
Sei dazu $s \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung und Satz 6.8 $\Longrightarrow$ $\exists\,\varphi_\pm\mathscr{T}(I)$ mit $\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+$ und

$$\int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{s}. \tag{3}$$

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ_+ und φ_- und sei $J_j :=]x_{j-1}, x_j[$ für $j \in \{1,\dots,n\}$ $\Longrightarrow$

$$\varphi_+\big|_{J_j} - \varphi_-\big|_{J_j} \geqslant \sup_{x\in J_j} f(x) - \inf_{x\in J_j} f(x) = \sup_{x\in J_j} \underbrace{\sup_{x'\in J_j} |f(x) - f(x')|}_{\geqslant\,\omega_f(x)}. \tag{4}$$

Mit $S := \big\{j = 1,\dots,n : J_j \cap N_{f,s} \neq \varnothing\big\}$ $\Longrightarrow$ $\bigcup\limits_{j\in S} J_j \supseteq N_{f,s} \setminus \{x_k : k = 0,\dots,n\}$.
Wir erhalten (sogar) endliche Überdeckung aus offenen Intervallen

$$N_{f,s} \subseteq \Big(\bigcup_{j\in S} J_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{n} \Big]x_k - \frac{\varepsilon}{n+1}, x_k + \frac{\varepsilon}{n+1}\Big[\Big) =: \mathscr{L}.$$

Schließlich

$$\frac{\varepsilon}{s} \overset{(3)}{>} \sum_{j=1}^{n} \int_{J_j} \underbrace{\big[\varphi_+(x) - \varphi_-(x)\big]}_{\geqslant 0} \mathrm{d}x \geqslant \sum_{j\in S} \int_{J_j} \big[\varphi_+(x) - \varphi_-(x)\big] \mathrm{d}x \underset{j\in S \Rightarrow \exists\, y_j \in J_j \cap N_{f,s}}{\underset{\uparrow}{\overset{(4)}{\geqslant}}} \sum_{j\in S} |J_j| \underbrace{\omega_f(y_j)}_{>\frac{1}{s}}$$

$\Longrightarrow \ \sum_{j\in S} |J_j| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \ |\mathscr{L}| < 3\varepsilon \overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} N_{f,s}$ Nullmenge. ■

6.13 Definition *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{N}_f$ wie in Satz* 6.12

$$f \textit{ \textbf{stückweise stetig}} \ :\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{N}_f \textit{ ist endlich}, \\ \lim\limits_{y \searrow x} f(y) \textit{ existiert } \forall x \in [a,b[\,, \\ \lim\limits_{y \nearrow x} f(y) \textit{ existiert } \forall x \in \,]a,b]\,. \end{cases}$$

6.14 Bemerkung Für $f : I \to \mathbb{R}$ gilt: f stetig $\Longrightarrow$ f stückweise stetig $\overset{\text{Satz 3.27}}{\Longrightarrow}$ f beschränkt.

6.15 Korollar *Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) *f stückweise stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar auf I,*

(b) *f monoton $\Longrightarrow$ f integrierbar auf I.*

Beweis. (a) Bemerkung 6.14 und Satz 6.12.

(b) Folgt aus „monoton auf $I \Longrightarrow$ beschränkt“, dem nächsten Satz und Satz 6.12. ■

6.16 Satz *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist $\mathcal{N}_f$ höchstens abzählbar.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f isoton (sonst betrachte $-f$). Aus der Monotonie folgt $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{y \nearrow x} f(y) =: f(x_-) \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{y \searrow x} f(y) =: f(x_+) \in \mathbb{R}$. Für $M, n \in \mathbb{N}$ setze

$$U_n^M := \left\{ x \in [-M, M] : f(x_+) - f(x_-) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{N}_f = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^M.$$

Da $\frac{1}{n} |\{U_n^M\}| \leqslant f(M) - f(-M) < \infty \Longrightarrow |U_n^M| < \infty \ \forall n, M \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mathcal{N}_f$ abzählbar. ■

6.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

6.17 Satz *Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

(a) ***Linearität.*** *$\lambda f + \mu g$ ist Riemann-integrierbar und*

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) ***Produkte.*** *fg ist Riemann-integrierbar.*

(c) ***Monotonie.*** *Für $f, g : I \to \mathbb{R}$*

$$f \leqslant g \implies \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(d) ***Dreiecksungleichung.*** *$|f| : I \to \mathbb{R}_{\geqslant}$ ist Riemann-integrierbar und*

$$\left|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(e) ***Additivität.*** *Seien $I = [a, b]$ und $a < c < b$. Dann sind äquivalent:*

- (i) *f ist Riemann-integrierbar auf I,*
- (ii) *f ist Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$.*

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. (a) Für f, g ℝ-wertig und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ aus $\mathscr{R}(\mathcal{Z}, \lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{R}(\mathcal{Z}, f) + \mu \mathscr{R}(\mathcal{Z}, g)$ und Satz 6.8. Im allgemeinen (komplexen) Fall zerlege f, g und λ, μ jeweils in Real- und Imaginärteil und wende die ℝ-Linearität auf deren Beiträge zu Real- und Imaginärteil von $\lambda f + \mu g$ an.

(b) Satz 6.12 und Satz 6.10(a).

(c) Wegen (a) genügt es zu zeigen: $g \geqslant 0 \implies \int_I g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Klar, da $g \geqslant 0 \implies \mathscr{R}(\mathcal{Z}, g) \geqslant 0 \ \forall$ Zerlegungen $\mathcal{Z}$.

(d) f integrierbar $\implies$ $\operatorname{Re} f \wedge \operatorname{Im} f$ integrierbar $\overset{\text{Sätze 6.12, 6.10(a)}}{\implies}$ $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$ integrierbar. Somit gilt

$$\left|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x\right| \overset{\text{Satz 6.8}}{=} \lim_{\mu(\mathcal{Z})\to 0} \underbrace{|\mathscr{R}(\mathcal{Z}, f)|}_{\leqslant \mathscr{R}(\mathcal{Z}, |f|)} \overset{\text{Satz 6.8}}{\leqslant} \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(e) (i) $\iff$ (ii) aus Satz 6.12 und Satz 6.10(a). Die Zerlegung des Integrals in die beiden Teilintegrale folgt aus Satz 6.8 und einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit c als Unterteilungspunkt. ■

Es gelte von nun an die folgende Konvention

6.18 Definition

- *Für f Riemann-integrierbar auf* $[a,b]$: $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$

Der folgende Satz gilt nur für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$.

6.19 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Weiter sei f stetig und $g \geqslant 0$. Dann $\exists\, \xi = \xi(f,g,I) \in I$:*

$$\int_I f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Speziell für $g = 1$ gilt

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\,|I|.$$

Beweis. Integrierbarkeit von fg gemäß Satz 6.17(b). Seien $M_+ := \sup\{\,f(x) : x \in I\,\} \in \mathbb{R}$, $M_- := \inf\{\,f(x) : x \in I\,\} \in \mathbb{R}$ (da f beschränkt nach Lemma 6.6) $\overset{g\geqslant 0}{\Longrightarrow}$ $M_- g \leqslant fg \leqslant M_+ g$

$$\overset{\text{Satz 6.17(c)}}{\Longrightarrow} \quad M_- \int_I g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M_+ \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \exists\, \mu \in [M_-, M_+] \colon \int_I f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da I kompakt, f stetig und Satz 3.27 $\Longrightarrow$ $\exists\, x_\pm \in I\colon\ f(x_\pm) = M_\pm$. Aus Zwischenwertsatz (wähle $a := \min\{x_+, x_-\}$, $b := \max\{x_+, x_-\}$ in Kor. 3.21) folgt $\exists\, \xi \in I \colon \mu = f(\xi)$. ■

Eine unmittelbare Anwendung des Satzes ist der folgende

6.20 Satz (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung) *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, $x_0 \in I$ und*

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y \end{array}.$$

Dann ist F differenzierbar mit $F' = f$.

Beweis. Es genügt den Satz für $f : I \to \mathbb{R}$ stetig zu zeigen ($\Longrightarrow$ Behauptung für $\mathbb{C}$ durch separate Betrachtung von Real- und Imaginärteil). Sei $x \in I, 0 \neq h \in \mathbb{R}$, so dass $x + h \in I$, dann folgt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.17(e)}}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwertsatz 6.19} \\ \exists\,\xi_h\colon |\xi_h - x| \leqslant |h|}}{=} f(\xi_h) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig,} \\ \xi_h \to x}}{\xrightarrow{h\to 0}} f(x).$$

■

6.21 Definition *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig.*

$$F : I \to \mathbb{C} \textit{ diff.-bar ist } \textbf{\textit{Stammfunktion zu }} f \quad :\Longleftrightarrow \quad F' = f.$$

Notationen: $F = \int f = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad F(x) = \int^x f = \int^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

6.22 Satz *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und F Stammfunktion zu f. Dann gilt*

$$G : I \to \mathbb{C} \textit{ diff.-bar ist Stammfunktion zu } f \quad \Longleftrightarrow \quad F - G = \textit{const.}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ $0 = F' - G' = f - G' \implies f = G'$.

„$\Rightarrow$“ Sei G auch Stammfunktion zu $f \implies (G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.
Da $G - F$ differenzierbar auf I, folgt mit dem Mittelwertsatz der Diff.rechnung (Kor. 5.18 mit $b = x$): $G(x) - F(x) = G(a) - F(a)\ \forall x \in\,]a, b]$. ■

6.23 Korollar *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\forall x_0 \in I$*

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

eine Stammfunktion zu f und für eine beliebige Stammfunktion F zu f gilt

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(x_0) =: F(t)\Big|_{x_0}^{x}.$$

6.24 Beispiel (a) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}_>$ abgeschlossenes Intervall, dann gilt

$$\int_a^b x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1} x^{r+1}\Big|_a^b.$$

Für $r \geqslant 0$ genügt die Voraussetzung $I \subset \mathbb{R}_\geqslant$, für $r \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ dass $0 \notin I$ und für $r \in \mathbb{N}_0$ ist keine Voraussetzung an I nötig.

(b) Sei $0 \notin I$, dann gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x\Big|_a^b, & a > 0 \\ \ln(-x)\Big|_a^b, & b < 0 \end{array} \right\} = \ln|x|\Big|_a^b.$$

(c)

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x.$$

Falls eine Stammfunktion nicht offensichtlich ist, können die folgenden Integrationsformeln der partiellen Integration und der Integration durch Substitution unter Umständen nützlich sein.

6.25 Satz (Partielle Integration) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.-bar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Aus der Produktregel für $\Phi := fg \implies \Phi' = f'g + fg' =: \varphi$ und Korollar 6.23 mit $f = \varphi, F = \Phi$. ■

6.26 Beispiel (a) Seien $0 < a < b \implies$

$$\int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{=f} \cdot \underbrace{1}_{=g'}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{P.I}}}{=} \ln(x)\cdot x\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x}_{x|_a^b} = x\big(\ln x - 1\big)\Big|_a^b.$$

(b) Sei $I_m(x) := \displaystyle\int_0^x \underbrace{\sin^m t}_{:=(\sin t)^m}\,\mathrm{d}t$ für $m \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

- $m = 0, 1$: $I_0(x) = x,\ I_1(x) = -\cos x + 1.$
- $m \geqslant 2$:

$$I_m(x) = \int_0^x \underbrace{\sin t}_{=g'}\ \underbrace{\sin^{m-1} t}_{=f}\,\mathrm{d}t = -\cos x \sin^{m-1} x + \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,(m-1)\sin^{m-2} t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\big[I_{m-2}(x) - I_m(x)\big].$$

Damit können nun rekursiv alle $I_m(x)$ berechnet werden

$$I_m(x) = -\frac{1}{m}\cos x \sin^{m-1} x + + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2}(x).$$

Insbesondere ist

$$I_2(x) = \int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

6.27 Satz (Riemannsches Lemma) *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig differenzierbar und sei*

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ k & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \end{array} .$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\pm\infty} \tilde{f}(k) = 0.$$

Beweis. Sei $k \neq 0$, so gilt

$$\tilde{f}(k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P.I.}}}{=} f(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k}\bigg|_a^b - \frac{1}{\mathrm{i}k}\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.17(d)}}}{\Longrightarrow} |\tilde{f}(k)| \leqslant \frac{1}{|k|}\big(\underbrace{|f(b)|}_{<\infty} + \underbrace{|f(a)|}_{<\infty}\big) + \frac{1}{|k|}(b-a)\underbrace{\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|}_{\substack{=:M<\infty \\ f' \text{ stetig auf } [a,b] \\ \Longrightarrow \text{ beschränkt}}} \xrightarrow{|k|\to\infty} 0.$$

∎

6.28 Bemerkung

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **Fourier-Transformierte** von f (modulo Vorfaktor).
- Wird später (Ana III) verallgemeinert auf integrierbare f ⇝ Riemann–Lebesgue-Lemma.
- Moral: Für $|k| \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} |f'(x)|$