Mitschrift zur Vorlesung

Analysis einer Variablen

Gehalten von Prof. Dr. Rupert Frank
WiSe 21/22

LaTeX-Bearbeitung von
FDF

Version vom
8. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Vorsicht mit Konventionen! (Manchmal gilt $0 \in \mathbb{N}$.)

Definition 1.1. Prinzip der vollständigen Induktion
Gegeben seien Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$.
Dann folgt aus

- *Induktionsanfang.* $A(1)$ ist wahr, und
- *Induktionsschritt.* Wann immer für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr,

dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Beispiel 1.2. Gaußsche Summenformel

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \underbrace{(1 + 100)}_{=101} + \underbrace{(2 + 99)}_{=101} + \underbrace{(3 + 98)}_{=101} + \ldots + \underbrace{(50 + 51)}_{=101} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Für den allgemeinen Fall s. Satz 1.4.

Notation 1.3. Sind $a_K, a_{K+1}, \ldots, a_L$ Zahlen, so ist

$$\sum_{n=K}^{L} a_n := a_K + a_{K+1} + \ldots + a_L; \qquad \sum_{n=K}^{K-1} a_n := 0 \text{ "leere Summe"}$$

Satz 1.4. (Die Gaußsche Summenformel) *Für alle* $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Beweis. Induktionsanfang, $N = 0$:

$$\sum_{n=1}^{0} n = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{n=1}^{N+1} n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} n}_{\overset{\text{IV}}{=} \frac{N \cdot (N+1)}{2}} + (N+1) = \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

□

Satz 1.5. (Geometrische Reihe) *Für alle* $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$*, wobei* $\mathbb{R}$ *die Menge der rellen Zahlen bezeichnet, und* $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

Eine Herleitung ist durch Polynomdivison möglich.

Beweis. Induktionsanfang, $N = 0$:

$$\sum_{n=0}^{0} x^n = x^0 = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{n=0}^{N+1} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} x^n}_{\overset{\text{IV}}{=} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + x^{(N+1)} = \frac{1 - x^{N+1} + (1-x)x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{N+2}}{1 - x}$$

$\square$

Beispiel 1.6. *(Der binomische Lehrsatz)*
Erinnerung:

	"Pascalsches Dreieck"
$(x+y)^0 = 1$	1
$(x+y)^1 = x + y$	1 1
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1
$\vdots$	$\vdots$

Für den allgemeinen Fall s. Satz 1.10.

Notation 1.7. Sind $a_K, a_{K+1}, \ldots, a_L$ Zahlen, so ist

$$\prod_{n=K}^{L} a_n := a_K \cdot a_{K+1} \cdot \ldots \cdot a_L; \qquad \prod_{n=K}^{K-1} a_n := 1 \text{ "leeres Produkt"}$$

Definition 1.8. *(Fakultät)* Für $N \in \mathbb{N}_0$,

$$N! := \prod_{n=1}^{N} n$$

Definition 1.9. *(Binomialkoefizienten)* Für $N, K \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq K \leq N$,

$$\binom{N}{K} := \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!} = \prod_{k=1}^{K} \frac{N-k+1}{k}$$

Satz 1.10. (Der binomische Lehrsatz) *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}_0$,*

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}$$

Also sind die Koeffizienten in der N-ten Reihe des Pascalschen Dreiecks gerade $\binom{N}{n}$ mit $n = 0, \ldots, N$.

Lemma 1.11. *Für alle $N, K \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq K \leq N$,*

$$\binom{N}{K-1} + \binom{N}{K} = \binom{N+1}{K}$$

Beweis. (Lemma 1.11)

$$\begin{aligned}
\binom{N}{K-1} + \binom{N}{K} &= \frac{N!}{(K-1)!(N-K+1)!} + \frac{N!}{K!(N-K)!} \\
&= \frac{N!(K+(N-K+1))}{K!(N-K+1)!} = \frac{(N+1)!}{K!((N+1)-K)!} = \binom{N+1}{K}
\end{aligned}$$

□

Beweis. (Satz 1.10)
Induktionsanfang, $N = 0$:

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{n=0}^{0} \binom{0}{n} x^n y^{0-n} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{N+1} &= (x+y)^N \cdot (x+y) \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n} \right) \cdot (x+y) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^{n+1} y^{N-n} + \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} x^k y^{N-k+1} + \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} \right)}_{=\binom{N+1}{k}} x^k y^{N+1-k} + \underbrace{\binom{N}{N}}_{=\binom{N+1}{N+1}} x^{N+1} + \underbrace{\binom{N}{0}}_{=\binom{N+1}{0}} y^{N+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} x^k y^{N+1-k}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = N^2, N \in \mathbb{N}_0$$

Beweis. Durch Induktion.
Induktionsanfang, $N = 0$:

$$\sum_{n=1}^{0}(2n-1) = 0 = 0^2 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{n=1}^{N+1}(2n-1) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N}(2n-1)}_{\overset{\text{IV}}{=}N^2} + (2(N+1)-1) = N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

□

Beweis. Direkt.

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = 2\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = 2 \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2} - N = N^2$$

□

1.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz über die reellen Zahlen

Bezeichnung: $\mathbb{Q}$ =Menge der rationalen Zahlen.

Satz 1.12. *Es gibt einen angeordneten Körper mit der Supremumseigenschaft. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig und enthält einen Unterkörper, der zu $\mathbb{Q}$ isomorph ist.*

Definition 1.13. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei verschiedenen Elementen 0, 1 und vier Funktionen

$$+ : K \times K \to K, \qquad \cdot : K \times K \to K, \qquad - : K \to K, \qquad \cdot^{-1} := K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\},$$

so dass für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(A1) $x + y = y + x$ kommutativ

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ assoziativ

(A3) $x + 0 = x$

(A4) $x + (-x) = 0$

(M1) $x \cdot y = y \cdot x$ kommutativ

(M2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ assoziativ

(M3) $x \cdot 1 = x$

(M4) $x \cdot (x^{-1}) = 1$ falls $x \neq 0$

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributiv

Notation 1.14. Im folgenden verwenden wir die üblichen Bezeichnungen

$$x + (-y) = x - y, \qquad x \cdot x = x^2, \qquad x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}, \ldots$$

Beispiel 1.15. Es gilt $x \cdot 0 = 0$:

$$\begin{array}{rrcl}
 & x \cdot 0 + x \cdot 0 \underset{(\mathrm{D})}{=} x \cdot (0+0) & \underset{(\mathrm{A3})}{=} & x \cdot 0 \\
\Rightarrow & (x \cdot 0 + x \cdot 0) - (x \cdot 0) & = & \underbrace{x \cdot 0 - x \cdot 0}_{\underset{(\mathrm{A4})}{=} 0} \\
\underset{(\mathrm{A2})}{\Rightarrow} & x \cdot 0 + \underbrace{(x \cdot 0 - x \cdot 0)}_{\underset{(\mathrm{A4})}{=} 0} & = & 0 \\
\Rightarrow & \underbrace{x \cdot 0 + 0}_{\underset{(\mathrm{A3})}{=} x \cdot 0} & = & 0 \\
\Rightarrow & x \cdot 0 & = & 0
\end{array}$$

Beispiel 1.16. Körper.

- $\mathbb{Q}$ ist ein Körper
- $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ sind keine Körper
- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ist ein Körper

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Alle neun Körperaxiome sind erfüllt (Nachrechnen)

Definition 1.17. Eine *angeordnete Menge* ist eine Menge S mit einer Beziehung $<$, so dass gilt

(i) Für alle $x, y \in S$ gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

(ii) Für alle $x, y, z \in S$ mit $x < y$ und $y < z$ gilt $x < z$. transitiv

Notation 1.18. Wir verwenden die Bezeichnungen $\leq, >, \geq$.

Beispiel 1.19. Angeordnete Mengen.

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind angeordnete Mengen.
- $\{0, 1\}$ ist eine angordnete Menge mit $0 < 1$.

Definition 1.20. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K, der auch eine angeordnete Menge ist, so dass $x, \cdot$ und $<$ verträglich sind in dem Sinne, dass für alle $x, y, z \in K$ gilt

(a) Falls $y < z$, dann ist $x + y < x + z$.

(b) Falls $x > 0$ und $y > 0$, dann ist $x \cdot y > 0$.

Beispiel 1.21. Angeordnete Körper.

- $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.
- $\mathbb{F}_2$ ist kein angeordneter Körper: Wir sehen gleich, dass in jedem angeordneten Körper $0 < 1$ gilt. Dann folgt $1 = 1 + 0 \underset{(a)}{<} 1 + 1 \underset{\text{in } \mathbb{F}_2}{=} 0$, im Widerspruch zu (i).

Es gelten folgendende Rechenregeln in jedem angeordneten Körper:

- $x > 0 \quad \Rightarrow -x < 0$
- $x > 0, y < z \Rightarrow x \cdot y < x \cdot z$
- $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0$ (insbesondere (mit $x = 1$): $1 > 0$)
- $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$

Behauptung: Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.

Beweis. Durch Widerspruch.
Angenommen es gäbe so ein $q = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.
O.B.d.A. sind m und n nicht beide gerade (sonst Kürzen!)
$\Rightarrow n^2 = 2m^2$ ist gerade $\Rightarrow n$ gerade $\Rightarrow m^2 = \frac{1}{2}n^2 = 2(\frac{n}{2})^2$ ist gerade $\Rightarrow m$ gerade, *Widerspruch*! $\square$

Betrachte: $A := \{p \in \mathbb{Q} : p > 0, p^2 < 2\}$
Behauptung: A hat kein größtes Element d.h. für jedes $p \in A$ gibt es ein $q \in A$ mit $q > p$.

Beweis. Setze $q := p + \frac{2-p^2}{p+2} = \frac{2p+2}{p+2}$.
Dann ist $q \in \mathbb{Q}$ und $q > p > 0$ und $2 - q^2 = \frac{2(p+2)^2-(2p+2)^2}{(p+2)^2} = \frac{2(2-p^2)}{(p+2)^2} > 0$. $\square$

Bezeichnung: Sind E, S Mengen, so heißt E *Teilmenge* von S, in Zeichen $E \subset S$, falls für jedes $x \in E$ gilt $x \in S$.

Definition 1.22. Sei S eine angeordnete Menge und $E \subset S$. Ein Element $\beta \in S$ heißt eine *obere Schranke* von E, falls für jedes $x \in E$ gilt $x \leq \beta$, und in diesem Fall heißt E *nach oben beschränkt*. Ein Element $\beta \in S$ heißt die *kleinste obere Schranke* (Supremum) von E, falls es eine obere Schranke von E ist und für jedes $\alpha \in S$ mit $\alpha < \beta$ gilt, dass α keine obere Schranke von E ist.

Entsprechend: Ein Element $\beta \in S$ heißt eine *untere Schranke* von E, falls für jedes $x \in E$ gilt $x \geq \beta$, und in diesem Fall heißt E *nach unten beschränkt*. Ein Element $\beta \in S$ heißt die *größte untere Schranke* (Infimum) von E, falls es eine untere Schranke von E ist und für jedes $\alpha \in S$ mit $\alpha > \beta$ gilt, dass α keine untere Schranke von E ist.

Bezeichnung: $\sup E, \inf E$.

Beispiel 1.23. Supremum.

1. Die Menge A oben ist nach oben beschränkt und besitzt kein Supremum.
2. Das Supremum kann, muss aber nicht zu E gehören:
   $E_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}, E_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\}$.
   Dann ist $\sup E_1 = \sup E_2 = 0$, aber $0 \notin E_1, 0 \in E_2$.

Definition 1.24. Eine angeordnete Menge S hat die Supremumseigenschaft, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum (in S) besitzt.

Beispiel 1.25. $\mathbb{Q}$ hat nicht die Supremumseigenschaft.

Lemma 1.26. *Sei S eine angeordnete Menge mit der Supremumgseigenschaft. Dann hat jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge ein Infimum (in S).*

Beweis. Sei B nicht leer und nach unten beschränkt und sei

$$L := \{x \in S : x \text{ ist eine untere Schranke von } B\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ ist nach unten beschränkt } \Rightarrow L \text{ ist nicht leer} \\ B \text{ ist nicht leer } \Rightarrow L \text{ ist nach oben beschränkt} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Sup.-Eig.}]{} \alpha := \sup L$$

Behauptung: $\boxed{\alpha = \inf B}$

- Ist $\gamma < \alpha$, so ist nach der Definition von α als Supremum, γ kein Supremum von L, d.h. es gibt ein $x \in L$ mit $x > y$. Damit gilt für alle $y \in B$, dass $y \geq x > \gamma$. Insbesondere ist $\gamma \notin B$.
  Damit haben wir gezeigt, dass $x \geq \alpha$ für alle $x \in B$, d.h. α ist eine untere Schranke von B und damit $\alpha \leq \inf B$.
- Ist $\beta > \alpha$, so ist nach der Definition von α als Supremum, β nicht die kleinste obere Schranke von L, d.h. es gibt ein $\beta' < \beta$ mit $x \leq \beta'$ für alle $x \in L$. Insbesondere ist $\beta \notin L$, d.h. β ist keine untere Schranke von B.

$\Rightarrow$ α ist die größte untere Schranke von B.

$\square$

1.3 Folgerungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Proposition 1.27. *1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in N$ mit $nx > y$.(Archimedisches Axiom)*

2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweis. 1. Sei $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Angenommen 1. wäre falsch. Dann ist y eine obere Schranke von A. Außerdem ist A nichtleer, also nach Supremumseigenschaft $\alpha := \sup A \in \mathbb{R}$. Wegen $x > 0$ ist $\alpha - x < \alpha$ und damit ist $\alpha - x$ keine obere Schranke von A, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha - x < mx \Rightarrow \alpha < \underbrace{(m+1)x}_{\in A}$. Dies ist ein *Widerspruch* zu α als obere Schranke.

2. Wegen $y - x > 0$ gibt es nach 1. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(y - x) > 1$.
Außerdem gibt es nach 1. $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > nx, m_2 > -nx \Rightarrow -m_2 < nx < m$.
Nach den Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m - 1 \leq nx < m$.

$$\Rightarrow nx < m \leq nx + 1 < (ny - 1) + 1 = ny \qquad \Rightarrow \qquad x < \underbrace{\frac{m}{n}}_{=:q} < y$$

□

Existenz von Wurzeln

Proposition 1.28. *Für jedes $0 < x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $0 < y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$.*

Notation 1.29.

$$y = x^{1/n} \text{ oder } y = \sqrt[n]{x}$$

Es gilt:

$$(xy)^{1/n} = x^{1/n} y^{1/n}$$

Beweis.
- Eindeutigkeit: Für $0 < y_1 < y_2 \Rightarrow 0 < y_1^n < y_2^n$
- Existenz: $E := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0, t^n < x\}$
  - E nichtleer: $t := \frac{x}{1+x} \Rightarrow 0 < t < 1 \Rightarrow t^n < t$ und $t < x \Rightarrow t \in E$
  - E nach oben beschränkt: $t > 1 + x \Rightarrow t^n > t$, und $t > x \Rightarrow t^n > x, t \notin E$
    Also ist $1 + x$ eine obere Schranke von E.
  - Daher existiert $\boxed{y := \sup E}$. Behauptung: $\boxed{y^n = x}$.

□

Satz 1.30. *Nützliche Ungleichung (*Bernoullische Ungleichung*):*

$$b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a) \text{ für alle } 0 < a < b$$

Beweis.

$$b^n - a^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geometrische Reihe} \\ \text{mit } x=\frac{a}{b}}}{=} (b-a)\underbrace{\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + \ldots + a^{n-2}b + a^{n-1}\right)}_{n \text{ Terme, jeder ist } \leq b^{n-1}}$$

$y^n \geq x$. *Angenommen* $y^n < x$. Sei $0 < h < 1$ mit $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}} (*)$
Mit $a = y, b = y + h$:

$$(y+h)^n - y^n < n(y+h)^{n-1}h \underset{h<1}{<} n(y+1)^{n-1}h \underset{(*)}{<} x - y^n \Rightarrow (y+h)^n < x$$
$$\Rightarrow y + h \in E, \text{aber } y + h > y = \sup E, \qquad \text{Widerspruch!}$$

$y^n \leq x$. *Angenommen* $y^n > x$. Sei $k := \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$ und damit $0 < k < y$.
Mit $b = y, a = y - k$ gilt für $t \geq y - k$:

$$(y+h)^n - y^n < n(y+h)^{n-1}h \underset{h<1}{<} n(y+1)^{n-1}h \underset{(*)}{<} x - y^n \Rightarrow (y+h)^n < x$$
$$\Rightarrow y - k \text{ ist obere Schranke von } E, \text{aber } y - k < y = \inf E, \qquad \text{Widerspruch!}$$

□

1.4 Konstruktion von $\mathbb{R}$ durch Dedekindsche Schnitte (1872)

Definition 1.31. Eine Teilmenge $\alpha \subset \mathbb{Q}$ heißt **Dedekindscher Schnitt**, falls

(a) α nichtleer, $\alpha \neq \mathbb{Q}$

(b) Für $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ mit $q < p$ gilt $q \in \alpha$.

(c) Für $p \in \alpha$ gibt es ein $r \in \alpha$ mit $r > p$.

Beispiel 1.32. $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ ist ein Schnitt.

Definition 1.33. $\mathbb{R} := \{\alpha : \alpha \text{ ist ein Schnitt}\}$

Zu zeigen:

1. $\mathbb{Q}$ kann mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ identifiziert werden.
2. Es gibt eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$, die die auf $\mathbb{Q}$ fortsetzt.
3. Es gibt eine Anordnung auf $\mathbb{R}$, die die auf $\mathbb{Q}$ fortsetzt.
4. Addition und Multiplikation und die Anordnung sind verträglich.
5. $\mathbb{R}$ hat die Supremumseigenschaft.

Beweis.

1. Für $r \in \mathbb{Q}$ setze $r^* := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Das ist ein Schnitt.} \\ \bullet \text{ Für } r_1 \neq r_2 \in \mathbb{Q} \text{ ist } r_1^* \neq r_2^*. \end{array}\right\} \text{Mittels } r \mapsto r^* \text{ können wir } \mathbb{Q} \text{ als Teilmenge von } \mathbb{R} \text{ auffassen.}$$

2. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei $\alpha + \beta := \{r + s : r \in a, s \in \beta\}$
   - $\alpha + \beta$ ist ein Schnitt
   - Die Addition erfüllt die Axiome (A1-4) mit $0 = 0^*$
   - $(r + s)^* = r^* + s^*$

   Definition der Multiplikation
   Für $\alpha, \beta > 0^*$ sei
   $$\alpha \cdot \beta := \{p \in \mathbb{Q} : p \leq rs \text{ für ein } 0 < r \in \alpha \text{ und ein } 0 < s \in \beta\}$$
   Außerdem sei
   $$\alpha \cdot \beta := \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta) & \text{falls } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ -((-\alpha) \cdot \beta) & \text{falls } \alpha < 0^*, \beta > 0^* \\ -(\alpha \cdot (-\beta)) & \text{falls } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \\ 0^* & \text{falls } \alpha = 0^* \text{ oder } \beta = 0^* \end{cases}$$
   - Multiplikationsaxiome (mit 1^*)
   - Distributivaxiom
   - $(rs)^* = r^* s^*$ für $r, s \in \mathbb{Q}$
3. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei $\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$
   - $r < s$ in $\mathbb{Q} \Rightarrow r^* < s^*$
   - Nachweis der Anordnungsaxiome
     - Klar, dass *höchstens* eine der Aussagen $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$ gilt.
     - Nachweis, dass *mindestens* eine gilt:
       Nehme an, dass $\alpha \not< \beta$ und $\alpha \neq \beta$; z.z.: $\beta < \alpha$.
       $\alpha \not< \beta$ und $\alpha \neq \beta \Rightarrow a \not\subset \beta$, d.h. es gibt ein $p \in \alpha$ mit $p \notin \beta$.
       Behauptung: $\beta \subset \alpha$ (Sei $q \in \beta$. Dann folgt aus Eigenschaft (b) von β, dass $q < p$. Wegen Eigenschaft (b) von α ist dann aber $q \in \alpha$.)
       Wegen $a \neq \beta$ gilt dann sogar $\beta \subsetneq \alpha$, d.h. $\beta < \alpha$.
     - Transitivität ✓ $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$
4. Verträglichkeit von Addition und Anordnung: $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ✓
   Multiplikation: Für $\alpha > 0^*, \beta > 0^*$ gilt $\alpha \cdot \beta > 0^*$.
   Zu zeigen: $\{q \in \mathbb{Q} : q < 0\} \subsetneq \{p \in \mathbb{Q} : p \leq rs \text{ für ein } 0 < r \in \alpha \text{ und ein } 0 < s \in \beta\}$.
   Klar gilt „$\subset$“, denn für jedes $q < 0$ und für alle $0 < r \in \alpha, 0 < s \in \beta$ gilt $q < 0 < rs$. (Solche r und s gibt es wegen $\alpha > 0^*$ und $\beta > 0^*$.)
   Außerdem gilt „$\neq$“, denn für alle $0 < r \in \alpha$ und $0 < s \in \beta$ gilt $rs > 0$, d.h. $rs \in \{p \in \mathbb{Q} : p \leq rs \text{ für ein } 0 < r \in \alpha \text{ und ein } 0 < s \in \beta\}$, aber $rs \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$.
5. Supremumseigenschaft: Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt und
   $$\gamma := \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \qquad \text{(das ist eine Teilmenge von } \mathbb{Q})$$
   Behauptung: $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \sup A$.
   (a) γ nichtleer: A nichtleer $\Rightarrow$ es gibt ein $\alpha_0 \in A$; wegen Eigenschaft (a) für α_0 ist α_0 nichtleer. Somit ist $\alpha_0 \subset \gamma$ und daher γ nichtleer.
   $\gamma \neq \mathbb{Q}$: A ist nach oben beschränkt durch $\beta \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $\alpha \in A$ gilt $\alpha < \beta$ ($\alpha \subsetneq \beta$)
   $\Rightarrow \gamma = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \alpha \subset \beta$; wegen (a) für $\beta : \beta \neq \mathbb{Q}$, daher auch $\gamma \neq \mathbb{Q}$
   (b) Sei $\underbrace{p \in \gamma}_{\Rightarrow p \in \alpha_0 \text{ für ein } \alpha_0 \in A}$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < p$. Zu zeigen: $q \in \gamma$. Aus (b) für α_0 folgt $q \in \alpha_0$; wegen $\alpha_0 \subset \gamma \Rightarrow q \in \gamma$.
   (c) Sei $p \in \gamma$. Dann ist $p \in \alpha_0$ für ein $\alpha_0 \in A$. Aus (c) für α_0 folgt, dass es ein $r \in \alpha_0$ gibt, mit $r > p$; wegen $a_0 \subset \gamma \Rightarrow r \in \gamma$.

Obere Schranke: Für alle $\alpha \in A$ gilt $\alpha \subset \gamma$, d.h. $\alpha \leq \gamma$.

Kleinste obere Schranke: Sei $\delta < \gamma$, d.h. $\delta \subsetneq \gamma$.
Dann gibt es ein $\underbrace{s \in \gamma}_{\Rightarrow s \in \alpha_0 \text{ für ein } \alpha_0 \in A}$ mit $s \notin \delta \Rightarrow \underbrace{\alpha_0 \not\subset \delta}_{\Rightarrow \delta \subsetneq \alpha_0}$, d.h. $\alpha_0 > \delta$. Also ist δ keine obere Schranke von A.

□

Definition 1.34. Absolutbetrag in $\mathbb{R}$: Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Satz 1.35. (Dreiecksungleichung)*:*

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Beweis. Falls $x + y \geq 0$:

$$|x+y| = x + y \underset{}{\overset{\substack{\text{für alle } x \\ \text{gilt } x \leq |x|}}{\leq}} |x| + |y|$$

Falls $x + y < 0$:

$$|x+y| = -x - y \underset{\substack{\text{für alle } x \\ \text{gilt } -x \leq |x|}}{\leq} |x| + |y|$$

□

Satz 1.36.

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$$
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

1.5 Dezimaldarstellung und b-adische Darstellung reeller Zahlen

Satz 1.37. *Sei* $2 \leq b \in \mathbb{N}$.

1. *Für jedes Vorzeichen* $\pm$, *jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $n_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, j \geq -k$, *definiert*

$$x := \pm \sup\{\sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j} : J \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

   eine relle Zahl.

2. *Umgekehrt gibt es für jedes* $x \in \mathbb{R}$ $\pm, k$ *und* n_i *wie in 1., so dass (1) gilt.*

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die Darstellung nicht eindeutig, z.B. $1.000\ldots = 0.999\ldots$.

Beweis. 1. Klar ist die Menge nichtleer.
Nach oben beschränkt: Für jedes $J \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j} \leq \sum_{j=-k}^{J} (b-1)b^{-j} = (b-1)b^k \sum_{l=0}^{J-k} b^{-l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} (b-1)b^k \frac{1-b^{-J+k-1}}{1-b^{-1}} = b^{k+1} - b^{-J} \leq b^{k+1}$$

Also ist x wohldefiniert nach der Supremumseigenschaft.

2. Wir nehmen an, dass $x > 0$ und wählen dann das Vorzeichen $+$.
Falls $x < 1$, wähle $k = 0$ und $n_0 = 0$.
Falls $x \geq 1$,sei $k \in \mathbb{N}_0$ die größte Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit $b^k \leq x$. (Wegen dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ und verwende, dass $\{k \in \mathbb{N}_0 : b^k \leq x\}$ ein größtes Element besitzt.)
Dann gibt es ein $n_{-k} \in \{1, \dots, b-1\}$ mit $n_{-k}b^k \leq x$.
Wähle jetzt $n_{-k+1} \in \{0, \dots, b-1\}$ maximal, so dass $n_{-k}b^k + n_{-k+1}b^{k-1} \leq x$, dann $n_{-k+2} \in \{0, \dots, b-1\}$ maximal, so dass $n_{-k}b^k + n_{-k+1}b^{k-1} + n_{-k+2}b^{k-2} \leq x$, usw.
Das definiert Zahlen $n_{-k}, n_{-k+1}, n_{-k+2}, \dots$ und nach (1) eine relle Zahl $\tilde{x}$.
Zu zeigen: $\tilde{x} = x$.

- Nach Konstruktion ist für jedes $J \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=-k}^{J} n_j b^j \leq x \Rightarrow \tilde{x} = \sup\sup\{\sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j} : J \in \mathbb{N}\} \leq x$.
- Wir zeigen: Für $0 < y < x$ gibt es ein J mit $\sup \sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j} > y$. (Damit ist y keine obere Schranke und damit $\tilde{x} \geq x$.)
Nach dem Archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{x-y}$, also auch ein $J \in \mathbb{N}$ mit $b^J > \frac{1}{x-y}$, d.h. $y + b^{-J} < x$.
Nach Konstruktion, da n_J maximal gewählt ist, ist

$$x < \sum_{j=-k}^{J-1} n_j b^{-j} + (n_J + 1)b^{-J} = \sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j} + b^{-J} \Rightarrow y < \sum_{j=-k}^{J} n_j b^{-j}$$

□

1.6 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

Definition 1.38. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. f heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. f heißt *surjektiv*, falls es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.
3. f heißt bijektivv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition 1.39. Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn sie entweder leer ist oder nichtleer und es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N}_0 \to A$ gibt. Eine Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Beispiel 1.40. 1. Jede endliche Menge ist abzählbar. (Denn ist $A = \{a_0, \dots, a_N\}$, so definiert $f(n) := a_n$ für $0 \leq n \leq N$ und $f(n) := a_N$ für $n > N$ eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to A$.)

2. $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar. (Man wähle $f(n) = n$.)
3. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. ($f(2k-1) := k, f(2k) := -k$, d.h. $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$)

Proposition 1.41. *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. $M_n, n \in \mathbb{N}$ sind abzählbar, also $M_n = \{x_{nm} : m \in \mathbb{N}_0\}$. (Hier ist $x_{nm} = f_n(m)$, wobei $f_n : \mathbb{N}_0 \to M_n$ surjektiv.)

Durch

$$\begin{tikzcd}
M_0 : & x_{00} \arrow[r] & x_{01} \arrow[dl] & x_{02} \arrow[r] & x_{03} \arrow[dl] & \cdots \\
M_1 : & x_{10} \arrow[d] & x_{11} \arrow[ur] & x_{12} \arrow[dl] & x_{13} & \cdots \\
M_2 : & x_{20} \arrow[ur] & x_{21} \arrow[dl] & x_{22} & x_{23} & \cdots \\
M_3 : & x_{30} \arrow[d] & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\
\vdots & {} & & & &
\end{tikzcd}$$

wird eine surjektive Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \bigcup_n M_n$ definiert.

□

Korollar 1.42. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, ist für jedes $n \geq 1$ die Menge $M_n := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$ abzählbar. Gemäß Proposition 1.41 ist also auch $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} M_n$ abzählbar. □

Satz 1.43. *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Beachte, dass darauf folgt, dass die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.*

Beweis. Beweis von Cantor.
Wir zeigen, dass $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ überabzählbar ist.
Angenommen, diese Menge wäre abzählbar. Schreibe $x_n := f(n)$ mit einer surjektiven Abbildung $f : \mathbb{N} \to \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.
Fixiere $4 \leq b \in \mathbb{N}$ und schreibe jedes x_n in seiner b-adischen Darstellung.

$$\begin{aligned}
x_0 &\sim n_{00}b^{-1} + n_{01}b^{-2} + n_{02}b^{-3} + \dots \\
x_1 &\sim n_{10}b^{-1} + n_{11}b^{-2} + n_{12}b^{-3} + \dots \\
x_2 &\sim n_{20}b^{-1} + n_{21}b^{-2} + n_{22}b^{-3} + \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definiere $m_0 := \begin{cases} 1 & \text{falls } n_{00} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } n_{00} = 1 \end{cases}$, $m_1 := \begin{cases} 1 & \text{falls } n_{11} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } n_{11} = 1 \end{cases}$, $m_2 := \dots$
Definiere $x \sim m_0 b^{-1} + m_1 b^{-2} + m_2 b^{-3} + \dots$ Dann ist $0 \leq x \leq 1$.
Da die Ziffern 0 und $b-1$ in der b-adischen Darstellung von x auftreten, ist diese eindeutig.
Wegen $x \neq x_n$ für alle n, ist das ein *Widerspruch.* □

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.1. Eine *Folge reller Zahlen* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_n \in \mathbb{R}$. Man schreibt dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allgemeiner kann man als Indexmenge auch eine Menge der Form $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ nut $k \in \mathbb{Z}$ zulassen. Man schreibt dann $(a_n)_{n\geq k}$.

Beispiel 2.2.
1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n := a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Konstante Folge* $(a, a, a, a, \ldots)$
2. Sei $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$
3. Sei $a_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $(-1, 1, -1, 1-1, \ldots)$
4. Sei $a_n := \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$
5. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := x^n$. $(x, x^2, x^3, x^4, \ldots)$
6. Fibonacci Zahlen: $f_0 := 0, f_1 := 1, f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$.
   $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$

Definition 2.3. Eine Folge (a_n) reeller Zaheln heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\left|a_n - a\right| < \epsilon$.

Lemma 2.4. *Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen. Dann ist a in **??** eindeutig bestimmt.*

Notation 2.5. a heißt „*Grenzwert*“ oder „*Limes*“ von (a_n). Man schreibt auch:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$
$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

Beweis. *Angenommen*, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq a$, dass der **??** genügt. Sei $\epsilon := \frac{|a-b|}{2}$. Dann gibt es $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$ und für alle $n \geq M$ gilt $|a_n - b| < \epsilon$.
Für $n \geq \max\{N, M\}$ ist dann

$$|\underbrace{a-b}_{=(a-a_n)+(a_n-b)}| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a - b|$$

Dies ist aber ein *Widerspruch*. □

Definition 2.6. Eine Folge (a_n) heißt *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (bzw. unten) beschränkt ist. Sie heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Proposition 2.7. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge und $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < 1$. Damit sit für alle $n \geq N : |a_n| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1$.

Damit ist $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ eine obere Schranke von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $-M$ eine untere. □

Beachte: Die Folge $((-1)^n)$ ist beschränkt, aber *nicht* konvergent.

Beispiel 2.8. Zurück zu den Folgen aus Beispiel 2.2.

1. Die konstante Folge $(a, a, a, \ldots)$ konvergiert gegen a.
2. Die Folgen $\left(\frac{1}{n}\right)$konvergiert gegen 0.

   Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Damit ist für $n \geq N$:
   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$
   □
3. Die Folge $((-1)^n)$ konvergiert nicht.

   Beweis. Angenommen, es gäbe ein a wie in **??**. Wähle $\epsilon = 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < 1$. Also ist für alle $n \geq N$:
   $$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2$$
   Dies ist offensichtlich ein *Widerspruch.* □
4. Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergiert gegen 1.

   Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Archimedischem Axiom ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. Damit gilt für $n \geq N$:
   $$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$$
   □
5. Für $|x| > 1$, konvergiert (x^n) nicht, da die Folge unbeschränkt ist.
   Für $x = -1$, konvergiert die Folge nicht, s.o. (3.).
   Für $x = 1$, konvergiert die Folge gegen 1, s.o. (1.).
   Für $|x| < 1$, konvergiert die Folge gegen 0.
6. Durch Induktion sieht man einfach, dass $f_n \geq n$ für alle $n \geq 5$. Also ist (f_n) nicht nach oben beschränkt und daher nicht konvergent.

Proposition 2.9. (Rechenregeln) *Seien* $(a_n), (b_n)$ *konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann gilt:*

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

3. *Ist* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, so gibt es ein* $N_0 \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $n \geq N_0$ *gilt* $b_n \neq 0$*, und*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Beachte, dass aus 1. und 2. für alle $c, d \in \mathbb{R}$ folgt (mit Hilfe einer konstanten Folge):

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n+db_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + d\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Beweis. Wir schreiben $a := \lim_{n\to\infty} a_n, b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $\left|a_n - a\right| < \frac{\epsilon}{2}$ und für $n \geq M$ gilt $\left|b_n - b\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für $n \geq \max\{N, M\}$:
$$\left|(a_n+b_n)-(a+b)\right| \leq \left|a_n - a\right| + \left|b_n - b\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

2. Nach Proposition 2.7 gibt es $K, L > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq K$ und $|b_n| \leq L$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2L}$ und für $n \geq M$ gilt $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}$. Dann ist für $n \geq \max\{N, M\}$,
$$\underbrace{|a_n b_n - ab|}_{=a_n(b_n-b)+(a_n-a)b} \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verwende} \\ |b|\leq L \text{ (s.u.)}}}{<} K \cdot \frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2L} \cdot L = \epsilon$$

3. Es genügt (wegen 2) den Fall $a_n = 1$ für alle n zu betrachten.
Es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N_0$ gilt $\left|b_n - b\right| < \frac{|b|}{2} = \epsilon$. Damit ist für $n \geq N_0$
$$\left|b_n\right| \geq \left|b\right| - \left|b_n - b\right| > \left|b\right| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0.$$
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N_1$ gilt $\left|b_n - b\right| < \frac{\epsilon|b|^2}{2}$. Für $n \geq \max\{N_0, N_1\}$ ist $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n|\cdot|b|} < \frac{\frac{\epsilon|b|^2}{2}}{\frac{|b|}{2}\cdot|b|} = \epsilon$.

□

Beispiel 2.10. Sei $a_n := \frac{3n^2+13n}{n^2-2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

Nach Beispiel 2 ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Damit ist nach den Rechenregeln $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{13}{n}\right) = 3$.
Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Damit ist nach den Rechenregeln $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right) = 1$.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{13}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3$.

Proposition 2.11. *Seien* $(a_n), (b_n)$ *konvergente Folgen reeller Zaheln mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Bemerkung:

1. Ist $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist *nicht* notwendigerweise $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$. (Bsp.: $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$.)
2. Aus Proposition 2.11 folgt, dass, falls $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B$.

Beweis. Indem man die Folge $(b_n - a_n)$ betrachet, können wir annehmen, dass $a_n = 0$ für alle n. D.h., es gelte $b_n \geq 0$ für alle n und es ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} b_n \geq 0$.

Angenommen, $-\epsilon := \lim_{n\to\infty} b_n < 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $|b_n - (-\epsilon)| < \epsilon$. Es ist aber $|b_n - (-\epsilon)| = b_n + \epsilon \geq \epsilon$. Folglich führt die Annahme zum *Widerspruch.* □

Beispiel 2.12. Zurück zu Beispiel 5.:

- Für $|x| > 1$ ist (x^n) nicht nach oben beschränkt, also nicht konvergent.

  Beweis. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist für alle $n \in \mathbb{N}$
  $$|x|^n = (1 + (|x| + 1))^n \geq 1 + n(|x| - 1)$$
  und nach dem Archimedischen Axiom gibt es für jedes vorgegegebenes $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N(|x| - 1) > K - 1$. Also gilt für alle $n \geq N$, $|x|^n \geq |x|^N \geq 1 + N(|x| - 1) > K$. □

- Für $|x| < 1$ konvergiert (x^n) gegen 0.

  Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wendet man obiges Argument auf $\frac{1}{|x|} > 1$ und $K := \frac{1}{\epsilon}$ an, so erhält man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{|x|}\right)^N > \frac{1}{\epsilon}$, d.h. $|x|^N < \epsilon$. Damit ist für alle $n \geq N$, $|x|^n \leq |x|^N < \epsilon$. □

Definition 2.13. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *monton wachsend* (bzw. *fallend*), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $\leq$). Sie heißt *monoton*, wenn sie entweder monton wachsend oder monoton fallend ist.

Proposition 2.14. *Jede beschränkte, monotone Folge konvergiert. Genauer: Eine monoton wachsende Folge* (a_n) *konvergiert gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *und eine monoton fallende gegen* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (wohldefiniert, da nichtleer und beschränkt). Da s die *kleinste* obere Schranke ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $s - \epsilon < a_N$. Wegen der Monotonie ist dann für alle $n \geq N$:
$$s - \epsilon < a_n \leq s < s + \epsilon.$$
□

Quadratwurzel

Satz 2.15. *Seien* $0 < x \in \mathbb{R}$ *und* $0 < a_0 \in \mathbb{R}$. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Dann konvergiert (a_n) *gegen* $\sqrt{x}$.

Beweis. Durch Induktion zeigt man, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Es gilt $a_n^2 \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn

$$a_{n+1}^2 - x = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)^2 - x = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2x + \frac{x^2}{a_n^2} - 4x\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 \geq 0$$

- Es gilt $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a^2 - x\right) \geq 0$$

- Nach Proposition 2.14 konvergiert (a_n) als beschränkte monotone Folge. Für den Grenzwert a gilt $a \geq 0$ und $a^2 \geq x$, also insbesondere $a > 0$. Geht man in der Rekursionsvorschrift zum Grenzwert über, so erhält man $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$, d.h. $\frac{x}{a} = a$, d.h. $a^2 = x$.
Da diese Gleichung die eindeutige positive Lösung $\sqrt{x}$ hat, gilt $a = \sqrt{x}$.

$\square$

2.2 Teilfolgen

Definition 2.16. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine *streng* monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n). Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge (a_n), falls es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel 2.17.

1. Die Folge $a_n := (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte -1 und $+1$, denn $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}) - 1$.
2. Die Folge $a_n := \begin{cases} -1 & \text{für } n = 4k+1 \\ 0 & \text{für } n = 4k+2 \\ 1 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}$ oder $4k$ besitzt die Häufungspunkte $-1, 0, +1$.
3. Die Folge $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ besitzt die Häufungspunkte -1 und $+1$, denn $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$ und analog $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = 1$.
4. Die Folge $a_n := n$ besitzt keine Häufungspunkte, da jede Teilfolge unbeschränkt ist und daher nicht konvergent.
5. Die Folge $a_n := \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ besitzt den Häufungspunkt 0, da $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$.
6. Ist (a_n) konvergent gegen a, so konvergiert auch jede Teilfoge gegen a und damit ist a der einzige Häufungspunkt.

Definition 2.18. Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge $\{a_n : n \geq k\}$ nichtleer und nach oben beschränkt, also gibt es $b_k := \sup\{a_n : n \geq k\}$. Außerdem ist b_k monoton fallend und beschränkt. Also existiert

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\} \text{ limes superior}$$

Analog,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \inf\{a_n : n \geq k\} \text{ limes inferior}$$

Beispiel 2.19.

1. Sei $a_n := (-1)^n$. Dann ist $\sup\{a_n : n \geq k\} = 1$ und $\inf\{a_n : n \geq k\} = -1$ für alle k, also ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
2. Sei a_n wie oben. Dann ist wieder $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
3. Sei $a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Dann ist $\sup\{a_n : n \geq k\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$, also $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$; entsprechend ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

Satz 2.20. *Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zaheln und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Dann ist H nichtleer, beschränkt und*

$$\sup H = \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \textit{und} \qquad \inf H = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Korollar 2.21. (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $b_k := \sup\{a_n : n \geq k\}$. Nach Definition 2.18 ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} b_k =: b$. Wir zeigen:

- $b \in H$
- $a \leq b$ für jedes $a \in H$

Das (plus entsprechende Argumente für $\inf\{a_n : n \geq k\}$) implizieren Korollar 2.21.

- Zeige $b \in H$: Wir zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ ein $n \geq N$ gibt mit $|a_n - b| < \epsilon$. (Wende das mit $\epsilon = \frac{1}{k}$ an, um eine Teilfolge zu konstruieren.)
  Wegen $\lim_{k\to\infty} b_k = b$ gibt es ein $K \geq N$ mit $|b_K - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Nach Definition von b_K gibt es ein $n \geq K$ mit $|a_n - b_K| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist $|a_n - b| \leq |a_n - b_K| + |b_K - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
- Zeige $a \leq b$ für jedes $a \in H$: Nach Definition von $a \in H$ gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{l\to\infty} a_{n_l} = a$. Wegen $b_{n_l} \geq a_{n_l}$ gilt $b = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{l\to\infty} b_{n_l} \geq \lim_{l\to\infty} a_{n_l} = a$.

□

Satz 2.22. *Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$.* Cauchy-Kriterium

Definition 2.23. Folgen, die das Cauchy-Kriterium erfüllen, heißen *Cauchy-Folgen*.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für $n, m \geq N : |a_n - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
„$\Leftarrow$“ Sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (a_n) beschränkt.

Beweis. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ gilt, dass $|a_n - a_m| < 1$, damit ist für $n \geq N : |a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ und damit ist $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ eine Schranke von $|a_n|$. □

Nach Korollar 2.21 gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Wir zeigen, dass auch (a_n) gegen $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ konvergiert.
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Außerdem gibt es ein k, so dass $n_k \geq N$ und $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für alle $n \geq N : |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

2.3 Bestimmte Divergenz

Manchmal fügen wir zu $\mathbb{R}$ zwei „ideelle“ Elemente $+\infty$ und $-\infty$ hinzu.

$$-\infty < x < +\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Ist $E \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge, die *nicht* nach oben beschränkt ist, so setzt man

$$\sup E := +\infty$$

Ensprechend $\inf E := -\infty$, falls E nichtleer und *nicht* nach unten beschränkt.
$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kann *keine* Körperstruktur gegeben werden. Trotzdem setzt man

$$x + \infty := +\infty, \qquad x - \infty = -\infty, \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad \text{für } x > 0 \text{ (entsprechend für } x < 0)$$

(Es ist nicht definiert: $+\infty - \infty, 0 \cdot (+\infty), 0 \cdot (-\infty)$.)

Definition 2.24. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent* (oder uneigentlich konvergent) gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \geq K$. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oder} \qquad a_n \to +\infty \text{ für } n \to \infty.$$

Entsprechend definiert man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiel 2.25.
1. Die Folge $a_n := n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.
2. Die Folge $a_n := (-1)^n n$ divergiert *nicht* bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
3. Die Folge (x^n) divergiert bestimmt gegen $+\infty$ für $x > 1$ und divergiert nicht bestimmt für $x < -1$.

Proposition 2.26. *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.*

1. *Divergiert die Folge bestimmt, so gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für $n \geq N_0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.*
2. *Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $<$), so divergiert $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).*

Definition 2.27. Für eine (nicht notwendigerweise beschränkte) Folge (a_n) reeller Zahlen setzt man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \inf\{a_n : n \geq k\}$$

Beispiel 2.28. 1. Für $a_n := n$ ist $\begin{array}{lll} \sup\{a_n : n \geq k\} = +\infty & \rightsquigarrow & \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \inf\{a_n : n \geq k\} = k & \rightsquigarrow & \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array}$.

2. Für $a_n := (-1)^n n$ ist $\begin{array}{l} \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \end{array}$.

2.4 Unendliche Reihen

Definition 2.29. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{m=1}^{n} a_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

definieren eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, genannt die *(unendliche) Reihe* mit den Gliedern a_n, und wir bezeichnen diese Folge mit $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$.
Konvergiert die Folge (s_n), so wird ihr Grenzwert auch mit $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ bezeichnet.
Entsprechendes gilt für Reihen $\sum_{m=k}^{\infty} a_m$ mit Indexmenge $\{m \in \mathbb{Z} : m \geq k\}$.

Beispiel 2.30. 1. *Unendliche geometrische Reihe*: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $| x |< 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} x^m$ gegen $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$.

Beweis. Bereits bewiesen: $s_n = \sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ und $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ wegen $| x |< 1$. □

Zusatz: Für $x \geq 1$ divergiert die unendliche geometrische Reihe bestimmt gegen $+\infty$. Für $x \leq -1$ konvergiert die Reihe nicht und divergert auch nicht bestimmt.
Beachte für $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. dyadische Blöcke: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

2. *Unendliche harmonische Reihe*: Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

   Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq 2^k$. Dann ist

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\substack{2 \text{ Terme,} \\ \text{jeder } \geq \frac{1}{4} \\ \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\substack{4 \text{ Terme,} \\ \text{jeder } \geq \frac{1}{8} \\ \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\substack{2^{k-1} \text{ Terme,} \\ \text{jeder } \geq \frac{1}{2^k} \\ \geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\ldots + \frac{1}{n}}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + k \cdot \frac{1}{2}, \text{ die Partialsummen sind nicht nach oben beschränkt und daher nicht konvergent}$$

   □

3. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1$

   Beweis. $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \Rightarrow s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ m+1=l}}{=} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teleskopsumme}}}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

   Verwende $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ □

Proposition 2.31. *Seien $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergente Reihen reeller Zahlen und seien $c, d \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} (ca_m + db_m)$ und es gilt $\sum_{m=1}^{\infty} (ca_m + db_m) = c \sum_{m=1}^{\infty} a_m + d \sum_{m=1}^{\infty} b_m$.*

Proposition 2.32. *Sei $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann konvergiert (a_n) gegen 0.*

Bemerkung: Die Umkehrung stimmt im Allgemeinen nicht (z.B. ist $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, aber $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = +\infty$.)

Beweis. Es ist $s_n - s_{n-1} = a_n$. Nach Vorraussetzung konvergiert (s_n), also nach den Rechenregeln für Folgen konvergiert (a_n) und es ist $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = 0$. □

Proposition 2.33. *Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle n. Dann konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Eine konvergente Folge ist beschränkt.
„$\Leftarrow$“: Eine monoton wachsende, beschränkte Folge ist konvergent. □

Beispiel 2.34. Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergent für $s > 1$ und bestimmt divergent gegen $+\infty$ für $s \leq 1$.

Beweis. Sei zunächst $s > 1$. Zeige: Partialsummen sind beschränkt.
Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein k mit $2^{k+1} \geq n+1$.

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} \leq \sum_{m=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{m^s} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right)}_{\leq 2\cdot 2^{-s}} + \dots + \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{m^s} \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j \frac{1}{(2^j)^s} = \sum_{j=0}^{k} \left(2^{-s+1}\right)^j$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-s+1}\right)^j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{1}{1-2^{-s+1}}$$

Sei jetzt $s \leq 1$. Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{m^s} \geq \frac{1}{m}$, also $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} \geq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$. Wie oben gezeigt, ist $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ nicht nach oben beschränkt. $\square$

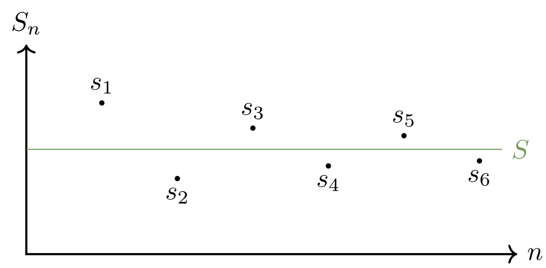
Bemerkung: $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ mit $s > 1$ heißt *Zetafunktion.*

Wir werden später sehen, dass $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Euler 1734)

Satz 2.35. (Leibnizsches Konvergenzkriterium) *Sei* (a_n) *eine monoton fallende Folge mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert* $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_m$.

Beispiel 2.36.
1. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$ konvergiert (gegen $\ln 2$, s. später).
2. Allgemeiner konvergiert $s > 0$ die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s}$.

Intuition zum Beweis: $s_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m a_m$.



Beweis. Wegen $s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$ gilt $s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \ldots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \ldots$
Wegen $s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0$ gilt $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2k-1} \leq s_{2k+1} \leq \ldots$
Außerdem ist wegen $s_{2k-1} - s_{2k} = -a_{2k} \leq 0$ auch $s_{2k-1} \leq s_{2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Die Folge (s_{2k}) ist monoton falllend und (durch s_1) nach unten beschränkt, also existiert $S := \lim_{k\to\infty} s_{2k}$.
Die Folge (s_{2k-1}) ist monoton wachsend und (durch s_2) nach oben beschränkt, also existiert $S' := \lim_{k\to\infty} s_{2k-1}$.
Wegen $S - S' = \lim_{k\to\infty} a_{2k} - \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{s_{2k} - s_{2k-1}}_{=a_{2k}}\right) = 0$ ist $S = S'$.
Noch zu zeigen: die *ganze* Folge konvergiert gegen S.
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $K, K' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt $|s_{2k} - S| < \epsilon$ und für alle $k' \geq K'$ gilt $|s_{2k-1} - S| < \epsilon$.
Damit ist für alle $n \geq \max\{2K, 2K'-1\} : |s_n - S| < \epsilon$. $\square$

Proposition 2.37. (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $l \geq k \geq N$ gilt*

$$\left|\sum_{m=k}^{l} a_m\right| < \epsilon.$$

Das ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für die Folge der Partialsummen.

Definition 2.38. Eine Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ konvergiert.

Bemerkung: Eine absolut konvergente Reihe konvergiert.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $l \geq k \geq N$ gilt $\sum_{m=k}^{l} |a_m| < \epsilon$.

Damit ist auch $\left|\sum_{m=k}^{l} a_m\right| \leq \sum_{m=k}^{l} |a_m| < \epsilon$. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ist also $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ konvergent. □

Satz 2.39. (Majoranten-Kriterium, Weierstraß'sches Konvergenzkriterium) *Sei $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern und (a_n) eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ absolut.

Definition 2.40. In der Situation von Satz 2.39 nennt man $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ eine *Majorante* von $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l \geq k \geq N$ gilt: $\sum_{m=k}^{l} c_m < \epsilon$. Damit ist auch $\sum_{m=k}^{l} |a_m| \leq \sum_{m=k}^{l} c_m < \epsilon$. Wieder nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium konvergiert daher $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$. □

Bemerkung: Falls $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ eine Reihe ist mit nicht-negativen Gliedern, die bestimmt divergiert, und (a_n) eine Folge ist mit $a_n \geq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ bestimmt.
(Denn andernfalls wäre $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ eine konvergente Majorante von $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$.)

Beispiel 2.41.
1. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m!}{m^m}$ konvergiert, da $\frac{m!}{m^m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{2}{m} \cdots \frac{m}{m} \leq \frac{2}{m^m}$ für alle $m \geq 2$ und daher $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{m^2}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m!}{m}$ ist.
2. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$, da

$$\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}m} \text{ für alle } m \geq 1 \quad \left(\Leftrightarrow \sqrt{m} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{m+1} \text{ für alle } m \geq 1\right)$$

und $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}m}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Satz 2.42. (Wurzelkriterium) *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $L := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Ist $L < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$. Ist $L > 1$, so konvergiert sie nicht.*

Bemerkung: Gilt $L = 1$, so kann sowohl Konvergenz als auch Nicht-Konvergenz auftreten.

Beispiel 2.43. $a_n := \frac{1}{n^s}$ mit $s = 1$ oder 2.
Für $s = 1$ gilt $\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = 1$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert bestimmt.
Für $s = 2$ gilt ebenfalls $\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{n}} = \left(\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}}\right)^2 = 1^2 = 1$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis. Sei $L < 1$ und wähle $L < x < 1$. Dann gibt es nach Definition des Limes superior ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für ale $n \geq N$ gilt $|a_n|^{\frac{1}{n}} < x$, d.h. $y\,|a_n| < x^n$. Damit ist $\sum_{m=N}^{\infty} x^m$ eine konvergente Majorante von $\sum_{m=N}^{\infty} |a_m|$.
Ist $L > 1$, so gibt es unendlich viele $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, d.h. $|a_n| > 1$. Damit konvergiert (a_n) nicht gegen 0 und die Reihe konvergiert nicht. □

Korollar 2.44. (Quotientenkriterium) *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle großen n und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ absolut.*

Beweis. Sei $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < x < 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < x$. Damit ist $|a_{n+1}| < x\,|a_n|\,, |a_{n+2}| < x\,|a_{n+1}| < x^2\,|a_n|\,, \ldots, |a_m| < x^{m-N}\,|a_N|$ für $m \geq N$.
$\Rightarrow |a_m|^{\frac{1}{m}} < x\left(\frac{|a_N|}{x^N}\right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} \leq x \limsup_{m\to\infty}\left(\frac{|a_N|}{x^N}\right)^{\frac{1}{m}} = x$. Wegen $x < 1$ folgt absolue Konvergenz aus dem Wurzelkriterium. □

Bemerkung: Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, so konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ nicht. (Denn es ist $a_N \neq 0$ und $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_N|$ für alle $n+1 \geq N$ und damit konvergiert (a_n) nicht gegen 0.)

Bemerkung: Gilt $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ kann Konvergenz oder Nicht-Konvergenz vorliegen. (Bsp.: $a_n = \frac{1}{n^s}$, $s = 1, 2$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^s}{(n+1)^s} \to 1$.)

Beispiel 2.45. $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \boxed{\frac{1}{3^k}, \frac{1}{2^{k+1}}}, \frac{1}{3^{k+1}}, \ldots\right)$.
Dann ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{!}{=} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k = +\infty$, also ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.
Andererseits ist $\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} \overset{!}{=} \limsup_{k\to\infty} \left(2^{-2k+1}\right)^{\frac{1}{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, also ist das Wurzelkriterium anwendbar.
$\rightsquigarrow$ Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ist konvergent.

2.5 Umordnung von Reihen

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.
Frage: Konvergiert $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)}$?
Im Allgemeinen ist die Antwort *nein*.

Beispiel 2.46. Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe und konstruieren $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(l)-1}}{l}$ bestimmmt gegen $+\infty$ divergiert.

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \\
&\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} \\
&\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}-1}\right) - \frac{1}{2k+2} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Wegen $\underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}-1}}_{2^{k-1} \text{ Terme, jeder } \geq \frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{1}{2^{k+1}}} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}$.

Für $k \geq 2$ ist $\frac{1}{2k+2} \leq \frac{1}{6}$, also $\left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}-1}\right) - \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Beispiel 2.47. Es gibt eine Umordnung der alternierenden harmonische Reihe, die gegen $\frac{1}{2}$-mal den ursprünglichen Grenzwert konvergiert. Sei S der ursprüngliche Grenzwert, also $S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$.

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&+\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\
&+\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\
&\vdots \\
&+\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$t_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} s_2$$

Seien s_n und t_n die Partialsummen der ursprünglichen und der ungeordneten Reihe.
Wegen $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ gilt $t_{3l} = \frac{1}{2} s_{2l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
Also gilt $\lim_{l\to\infty} t_{3l} = \frac{1}{2} \lim_{l\to\infty} s_{2l} = \frac{1}{2} S$. Weil die Reihenglieder gegen 0 konvergieren, folgt daraus schon dass $\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{2} S$.

Satz 2.48. *Sei* $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ *eine absolut konvergente Reihe und* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine bijektive Abbildung. Dann konvergiert* $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)}$ *absolut und ihr Grenzwert ist* $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$.

Beweis. Sei $A := \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ der Grenzwert. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{m=N}^{\infty} |a_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere ist

$$\left|\sum_{m=1}^{N-1} a_m - A\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{m=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Weil es für jedes $m = 1, \dots, N-1$ ein l gibt mit $\tau(l) = m$, gibt es ein $L \in \mathbb{N}$, so dass

$$\{1, \dots, N-1\} \subset \{\tau(1), \dots, \tau(l)\}$$

Für $M \geq L$ ist dann

$$\left|\sum_{m=1}^{M} a_{\tau(l)} - \sum_{m=1}^{N-1} a_m\right| \leq \sum_{m=N}^{\infty} |a_m| \overset{\text{s.o.}}{<} \frac{\epsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ für $M \geq L$:

$$\left|\sum_{m=1}^{M} a_{\tau(l)} - A\right| \leq \left|\sum_{m=1}^{M} a_{\tau(l)} - \sum_{m=1}^{N-1} a_m\right| + \left|\sum_{m=1}^{N-1} a_m - A\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Damit konvergiert $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)}$ gegen A.

Wendet man dasselbe Argument auf die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \mid a_m \mid$ an, so sieht man dass $\sum_{l=1}^{\infty} \mid a_{\tau(l)} \mid$ konvergiert gegen $\sum_{m=1}^{\infty} \mid a_m \mid$. Insbesondere konvergiert $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)}$ absolut. □

2.6 Cauchy-Produkt von Reihen

Definition 2.49. Für zwei Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ heißt die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ mit $c_m := \sum_{n=0}^{m} a_{m-n} b_n$ das *Cauchy-Produkt* von $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$.
Sind $\sum a_m$ und $\sum b_m$ *endliche* Summen, so ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Beispiel 2.50.

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) =& a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \\ &+ (\cancel{a_0 b_3} + a_1 b_2 + \cancel{a_3 b_0}) \\ &+ (\cancel{a_0 b_4} + \cancel{a_1 b_3} + a_2 b_2 + \cancel{a_3 b_1} + \cancel{a_4 b_0})\end{aligned}$$

Beispiel 2.51. Diese Identität gilt im Allgemeinen nicht für konvergente Reihen.

$a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n \in \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow \sum a_n, \sum b_n$ konvergieren nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium

Für das Cauchy-Produkt gilt $c_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{m-n+1}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = (-1)^m \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{m-n+1} \cdot \sqrt{n+1}}$.

Wir zeigen, dass $\mid c_m \mid$ nicht gegen 0 konvergiert.

$$(m-n+1)(n+1) = \left(\frac{m}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{m}{2}+1\right)^2 \leq \left(\frac{m}{2}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \mid c_m \mid \geq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\frac{m}{2}+1} = \frac{m+1}{\frac{m}{2}+1} \to 2 \text{ für } n \to \infty, \text{ also nicht } \mid c_m \mid \to 0.$$

Proposition 2.52. *Seien* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ *und* $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ absolut *konvergente Reihen. Dann ist das Cauchy-Produkt* $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ *absolut konvergent und es gilt* $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = (\sum_{m=0}^{\infty} a_m) \cdot (\sum_{m=0}^{\infty} a_m)$.

Anmerkung: Es gibt auch ähnlich Sätze, welche hier aber nicht bewiesen werden, z.B. $\sum a_m$ und $\sum b_m$ absolut konvergent und konvergent, so konvergiert das Cauchy-Produkt; wenn beide konvergieren und das Cauchy-Produkt konvergiert, so gilt die Produktformel.

Beweis. Seien $A_n := \sum_{m=0}^{n} a_m, B_n := \sum_{m=0}^{n} b_m$. Dann gilt

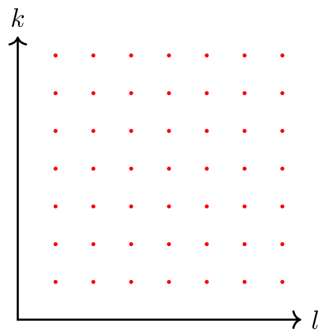
$$A_n B_n = \sum_{(k,l)\in Q_n} a_k b_{l-k} \qquad \text{mit } Q_n := \{(k,l) : 0 \leq k, l \leq n\}$$

Nach Definition gilt für $C_n := \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{l=0}^{n} c_l$

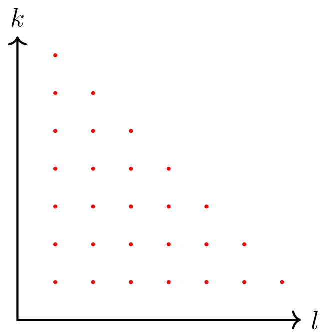
$$C_n = \sum_{(k,l)\in D_n} a_k b_{l-k} \qquad \text{mit } D_n := \{(k,l) : k+l \leq n\}$$

$$\Rightarrow A_n B_n - C_n = \sum_{(k,l)\in Q_n \setminus D_n} a_k b_{l-k}$$

Q_n :



D_n :



Für $A_n^* = \sum_{m=0}^{n} \mid a_m \mid, B_n^* = \sum_{m=0}^{n} \mid b_m \mid$ gilt entsprechend

$$A_n^* B_n^* = \sum_{(k,l)\in Q_n} \mid a_k \mid \cdot \mid b_{l-k} \mid$$

Wegen $Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subset D_N$ ist $Q_n \setminus D_n \subset Q_n \setminus Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ und damit $\mid A_n B_n - C_n \mid \leq \sum_{(k,l)\in Q_n \setminus Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \mid a_k \mid \cdot \mid b_{l-k} \mid = A_n^* B_n^* - A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^*$.

Weil (A_n^*) und (B_n^*) konvergieren, konvergiert auch $(A_n^* B_n^*)$ und $\left(A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^*\right)$ und die Grenzwerte sind dieselben. Daher konvergiert $(A_n B_n - C_n)$ gegen 0. Da (A_n) und (B_n) konvegieren, konvergiert auch $(A_n B_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$. Daher konvergiert C_n gegen $\lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$, wie behauptet.

Wendet man das bewiesene auf die Reihen $\sum \mid a_m \mid$ und $\sum \mid b_m \mid$ an, so erhält man, dass ihr Cauchy-Produkt $\sum d_m$ konvergiert mit $d_m := \sum_{n=0}^{m} \mid a_m \mid \cdot \mid b_{m-n} \mid$. Wegen $\mid c_m \mid \leq d_m$ für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum d_m$ eine konvergente Majorante für $\sum_{m=0}^{\infty} \mid c_m \mid$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher $\sum c_m$ absolut. □

2.7 Die Exponentialreihe

Behauptung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \qquad \textit{Exponentialreihe}$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt aus dem Quotientekriterium, da für alle $m \geq 2|x|$: $\left| \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{m!}{x^m} \right| = \frac{|x|}{m+1} \leq \frac{1}{2}$. □

Wir nennen $\mathrm{e} := \exp(1)$ die *Eulersche Zahl.*

Proposition 2.53. e *ist irrational.*

Beweis. 1. Für die n-te Partialsumme s_n von $\mathrm{e} = \exp(1)$ gilt

$$\mathrm{e} - s_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{(n+1)!}{m!}}_{=\underset{\substack{\uparrow \\ m-n-1 \text{ Faktoren,} \\ \text{jeder } > n+1}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot \ldots \cdot m}}} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{1}{n! \cdot n}$$

2. *Angenommen,* $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Nach 1. ist

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$$

Nach Annahme st $q!e = (q-1)!p \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$q!s_q = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{q!} \right) \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow q!(e - s_q) \in \mathbb{N}$. Das ist ein *Widerspruch* zu $0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1$.

□

$$\mathrm{e} = 2.7182818\ldots \qquad \text{(numerisch)}$$

Satz 2.54. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

Beweis. Das Cauchyprodukt von $\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ und $\exp(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$ hat Glieder

$$c_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^{m-n}}{(m-n)!} = \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \cdot x^n y^{m-n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{binom.} \\ \text{Lehrsatz}}}{=} \frac{1}{m!}(x+y)^m$$

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \exp(x+y)$. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz vom Cauchyprodukt. □

Proposition 2.55. *1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)$.*

2. Für alle $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$ und für alle $x < 0$ ist $\exp(x) < 1$.

3. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\exp(n) = e^n$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\exp(\frac{1}{n}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

Bemerkung: Wir werden später sehen/definieren $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Beweis. Nach Satz 2.54 ist $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$, also $\exp(x) \neq 0$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.
Für $x > 0$ ist $\exp(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} > 1$.
Für $x < 0$ ist $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Das ist > 0 und < 1.

Wir zeigen jetzt $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion in n.

Induktionsanfang: $\exp(0) = 1$. ✓

Induktionsschritt: $\exp(n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.54}}}{=} \exp(n)\exp(1) \overset{IV}{=} \mathrm{e}^n \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n+1}$.

Für $0 > n \in \mathbb{Z}$ ist $\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^n$.

Um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$ müssen wir zeigen, dass $\exp(\frac{1}{n}) > 0$ ✓ und dass $(\exp(\frac{1}{n}))^n = \mathrm{e}$. Letzteres folgt aus dem Satz. □

3 Stetige Funktionen

3.1 Funktionen und Stetigkeit

Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ werden typischerweise *Funktionen* genannt und D heißt der *Definitionsbereich* von f. Das *Bild* von f ist $f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D\}$, und der *Graph* von f ist $\{(x, f(x)) \in D \times \mathbb{R} : x \in D\}$.

In diesem Kapitel betrachten wir vor allem den Fall, dass $D \subseteq \mathbb{R}$.

Oft wird D ein *Intervall* sein. Bezeichnungen für $-\infty < a \le b < +\infty$:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}, \qquad [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

Im Fall von „(“ oder „)“ erlauben wir auch $a = -\infty, b = +\infty$; z.B. $(0, +\infty)$.

Alternative Notation, z.B. im Forster-Buch: „]“ statt „(“, „[“ statt „)“.

Beispiel 3.1. 1. $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, Dirichlet-Funktion

Definition 3.2. Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, so sind die Funktionen $f+g, fg : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) := f(x)g(x) \qquad \text{für alle } x \in D$$

Mit $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ ist die Funktion $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{für alle } x \in D'$$

Ist $h : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subset E$, so ist die Funktion $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(h \circ f)(x) := h(f(x)) \qquad \text{für alle } x \in D$$

Vorsicht: $f(x)$ ist eine Zahl, f eine Funktion!

Definition 3.3. Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *stetig* im Punkt x_0, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Bemerkung: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x_0)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei f stetig in x_0 und sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition von „stetig“ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Nach Definiton von „konvergent“ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$,so dass für alle $n \ge N$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$. Damit ist also für $n \ge N : |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$.

„$\Leftarrow$“ Es gelte die Folgenbedingung. *Angenommen*, f wäre nicht stetig in x_0. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(x_0)| \ge \epsilon_0$. Dann gilt $(x_n) \subseteq D$, $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Dies ist aber ein *Widerspruch* zur Folgenbedingung. $\square$

Beispiel 3.4. 1. Die Funktion sgn ist nicht stetig in $x_0 = 0$. (Z.B. $\operatorname{sgn}(\frac{1}{n}) = 1$, aber $\operatorname{sgn} 0 = 0$)

2. Die Funktion f aus Beispiel 3.1 (Dirichlet-Funktion) ist in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig. (Denn für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ (s.o.) und für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gibt es $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ (Übung).)

3. Für $x \in (0, 1]$ sei $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
Dann kann man zeigen, dass f in jedem Punkt $x_0 \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Rechenregeln:

Proposition 3.5. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann sind $f + g$ und fg stetig in x_0 und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch $\frac{f}{g}$.*

Beweis. Z.B. durch Folgenkriterien und Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen. □

Beispiel 3.6. Seien P, Q *Polynome*, d.h. $P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und entsprechend für Q, dann ist die *rationale Funktion* $\frac{P}{Q}$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $Q(x_0) \neq 0$.

Beweis. Nach Proposition 3.5 genügt es, die Stetigkeit der konstanten Funktion $x \mapsto a$ und der Identitätsfunktion $x \mapsto x$ zu zeigen. Das ist aber offensichtlich aus dem Folgenkriterium. □

Proposition 3.7. *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $h : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei f stetig in $x_0 \in D$ und h in $f(x_0) \in E$. Dann ist $h \circ f$ stetig in x_0.*

Beweis. Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von h gilt $h(f(x_n)) \to h(f(x_0))$, d.h. $(h \circ f)(x_n) \to (h \circ f)(x_0)$. □

Beispiel 3.8. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $|f| : D \to \mathbb{R}$, definiert durch $|f|(x) := |f(x)|$ für $x \in D$ stetig in x_0.
(Nach Proposition 3.7 genügt es, die Stetigkeit von $x \mapsto |x|$ zu zeigen. Diese folgt aber einfach aus dem Folgenkriterium.)

Beispiel 3.9. Die Funktion $x \mapsto \exp(x)$ ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Angenommen, wir haben das schon für $x_0 = 0$ gezeigt. Dann ist für $x_0 \neq 0$ und $x_n \to x_0$

$$\exp(x_n) = \exp(x_0) \underbrace{\exp(\underbrace{x_n - x_0}_{\to 0})}_{\substack{\to \exp(0)=1 \\ \text{(Annahme)}}} \to \exp(x_0)$$

Wir zeigen jetzt Stetigkeit in $x_0 = 0$. Wir zerlegen (für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$)

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} + R_n(x), \qquad R_n(x) := \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

Wie oben zeigt man, dass für $|x| < n+1$ gilt

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &< \frac{|x|^{n+1}}{n!\,(n+1-|x|)} && \text{(für } |x| = 1 \text{ haben wir das oben abgeschätzt.)} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} && \text{falls } |x| \leq \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Für $\epsilon > 0$ gibt es wegen Stetigkeit des Polynoms $\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}$ ein $\delta > 0$, so dass für $|x| < \delta$ gilt $\left|\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Außerdem gibt es ein $\delta' > 0$, so dass für $|x| < \delta'$ gilt $\frac{2}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Also für $|x| < \min\{\delta, \delta'\}$

$$|\exp(x) - 1| \leq \left|\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} - 1\right| + |R_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

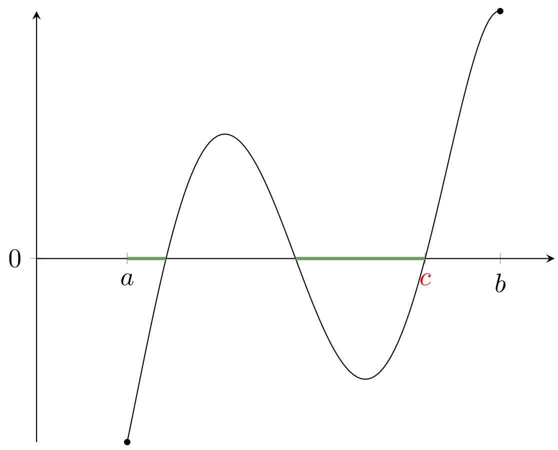
($n \in \mathbb{N}_0$ ist beliebig. Wir können z.B. $n = 0$ wählen.) □

3.2 Sätze über stetige Funktionen

Definition 3.10. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* (in D), wenn sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Satz 3.11. (Zwischenwertsatz) *Sei* $f : \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{abgeschlossenes} \\ \textit{Intervall,} \\ -\infty < a \leq b < +\infty}}{[a,b]} \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. *Dann gibt es ein* $c \in [a,b]$ *mit* $f(c) = 0$.

Beweis. Die Menge $M := \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$ ist nicht-leer ($a \in M$) und nach oben beschränkt (durch b). Also gibt es nach der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ $c := \sup M$.
Zu zeigen: $f(c) = 0$.



Zeige $f(c) \leq 0$: Nach Definition des Supremums gibt es $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to c$. Also $f(x_n) \leq 0$ und wegen der Stetigkeit, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$. (Rechenregeln für Folgen bei $\leq$.)
Zeige $f(c) \geq 0$: Falls $c = b$, so folgt das nach Voraussetzung. Andernfalls gilt für $x \in (c, b]$, dass $f(x) > 0$ (denn sonst wäre $x \in M$). Für $x_n := c + \frac{b-c}{n}$ gilt $x_n \to c$ und $x_n > c$, also $f(x_n) > 0$ und wegen Stetigkeit $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq 0$. (Rechenregeln für Folgen bei $\geq$.) □

Bemerkung: Für die Gültigkeit des Satzes ist es wesentlich, dass f auf einem Intervall definiert ist. Zum Beispiel für $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, gibt es kein $c \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ mit $f(c) = 0$.

Korollar 3.12. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

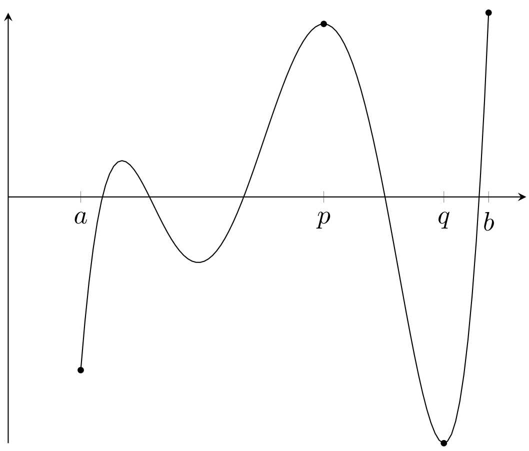
Beweis. Sei $B := \sup \{f(x) : x \in I\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $A := \inf \{f(x) : x \in I\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- Zeige $(A, B) \subset f(I)$: Sei $A < y < B$. Dann gibt es nach Definition von A und B $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$. Wende den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $f - y$ an und erhalte ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) - y = 0$, d.h. $y = f(c) \in f(I)$.
- Andererseits ist $f(I) \setminus (A, B) \in \{A, B\}$ falls A und B endlich (nach Definition von A und B), entsprechend wenn eines oder zwei von A und B unendlich sind.
- Damit ist $f(I)$ eines von $(A, B), [A, B], (A, B], [A, B)$ (wobei „[“ oder „]“ ausgeschlossen ist, falls der Endpunkt unendlich ist.)

□

Definition 3.13. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*, wenn $f(D)$ nach oben, bzw. nach unten beschränkt ist. Sie heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 3.14. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist sie beschränkt und es gibt $p, q \in [a, b]$ mit $f(p) = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $f(q) = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$.*



Bemerkung: Es ist wesentlich, dass f auf einem abgeschlossenen Intervall stetig ist. Als Beispiele betrachte:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist unbeschränkt.
- $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ ist beschränkt, aber nimmt nicht sein Supremum an.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist beschränkt, aber nimmt nicht sein Infimum an.
- $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist beschränkt, aber nimmt weder sein Supremum noch sein Infimum an.

Beweis. Wir zeigen „nach oben beschränkt“ und Existenz von p. (Rest: $f \to -f$)
Sei $B := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann gibt es nach Defintion des Supremums $(x_n) \in [a, b]$ mit $f(x_n) \to B$. Weil (x_n) beschränkt ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $p \in \{a, b]$ mit $x_{n_k} \to p$ für $k \to \infty$.
Wege Stetigkeit ist $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p)$. Damit ist $B < +\infty$ und $f(p) = B$. □

Gleichmäßige Stetigkeit

Erinnerung: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x_0 \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

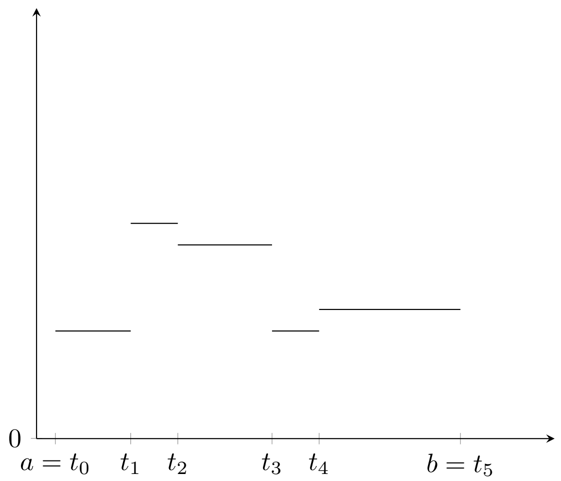
Definition 3.15. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, x_0 \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Im Gegensatz zu stetig muss man δ unabhängig von x_0 wählen können.

Beispiel 3.16. Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig.
Angenommen sie wäre es und sei δ wie in Definition 3.15 mit $\epsilon = 1$. Sei $n > \frac{1}{2\delta}$ und $n \geq 1$. Dann ist $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$, aber es ist $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = |n - 2n| = n \geq 1$. Dies ist aber ein *Widerspruch*.

Satz 3.17. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ und $(x_n), (y_n) \subset [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x \in [a, b]$ mit $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ konvergiert dann auch $y_{n_k} \to x$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x) - f(x) = 0$, im *Widerspruch* zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0$. □

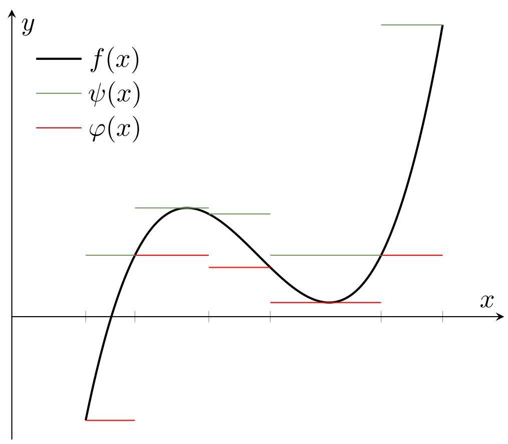
Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es $N \in \mathbb{N}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(t) = c_n$ für alle $t \in (t_{n-1}, t_n), n = 1, \ldots, N$.
Für $N = 5$:



Die Werte an den Stellen t_n sind beliebig.

Proposition 3.18. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\epsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad & \textit{für alle } x \in [a, b] \\ |\varphi(x) - \psi(x)| < \epsilon \qquad & \textit{für alle } x \in [a, b] \end{aligned}$$



Beweis. Nach Satz 3.17 ist f gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x_0 \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{N} < \delta$ (Archimedes!), und sei $t_n := a + n \cdot \frac{b-a}{N}, n = 0, \ldots, N$.
Dann ist $t_n - t_{n-1} = \frac{b-a}{N} < \delta$. Für $1 \leq n \leq N$ sei

$$c_n := \inf \{f(x) : x \in [t_{n-1}, t_n]\}, \qquad d_n := \sup \{f(x) : x \in [t_{n-1}, t_n]\}$$

Nach obigem Satz gibt es für jedes $1 \leq n \leq N, p_n, q_n \in [t_{n-1}, t_n]$ mit $f(p_n) = d_n$ und $f(q_n) = c_n$. Wegen $|p_n - q_n| \leq t_n - t_{n-1} < \delta$ ist $|d_n - c_n| = |f(p_n) - f(q_n)| < \epsilon$.
Wir definieren $\varphi(x) := c_n$ und $\psi(x) := d_n$ für $x \in [t_{n-1}, t_n], n = 1, \ldots, N, \varphi(a) := \psi(a) := f(a)$. □

3.3 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.19. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge $A \subset \mathbb{R}$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $a \in (A \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gibt.

Bemerkung:

1. x_0 ist ein Häufungspunkt von A genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Punkte in $A \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gibt.
2. Früher Häufungspunkt einer Folge: verwandter, aber verschiedener Begriff.

Beispiel 3.20.
1. Die Menge der Häufungspunkte von (a, b) mit $-\infty < a < b < +\infty$ ist $[a, b]$.
2. Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$.
3. Die Menge der Häufungspunkte von $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ist $\{0\}$.

Definition 3.21. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann sagt man, dass $f(x)$ für $x \to x_0$ gegen y_0 *konvergiert* und schreibt

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to y_0 \text{ für } x \to x_0,$$

falls für jede Folge $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to y_0$.

Beachte: Forster betrachtet $(x_n) \subset D$.

Beispiel 3.22. 1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$. (Hier $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
Nach dem binomischen Lehrsatz ist $(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m$, also

$$(1+x)^n - 1 = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} x^m = x \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} x^l, \text{ also z.z. } \lim_{x\to 0} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} x^l = n.$$

Das folgt aus der Stetigkeit von Polynomen.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
Nach der Restgliedabschätzung für exp ist $e^x = \exp(x) = 1 + x + R_1(x)$ mit $|R_1(x)| \le |x|^2$ für $|x| \le \frac{3}{2}$; also $\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| = \frac{|R_1(x)|}{|x|} \le |x|$ für $|x| \le \frac{3}{2}$.

Definition 3.23. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, sei x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ (bzw. von $D \cap (x_0, \infty)$) und sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann sagt man, dass f in x_0 den *links-* (bzw. *rechts-*)*seitigen Grenzwert* y_0 hat, falls für jede Folge $(x_n) \subset D \cap (-\infty, x_0)$ (bzw. $D \cap (x_0, \infty)$) mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to y$. Man schreibt dann

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0 \text{ (bzw. } \lim_{x \searrow x_0} f(x_0)) \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to y_0 \text{ für } x \nearrow x_0 \text{ (bzw. x} \searrow x_0)$$

(Auch gebräuchlich: $f(x_0-) = y_0$, bzw. $f(x_0+) = y_0$.)

Beispiel 3.24.

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn} x = -1, \lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn} x = +1$$

Man schreibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \to y_0 \text{ für } x \to \infty,$$

falls D nicht nach oben beschränkt ist und für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to y_0$. (Entsprechend für $-\infty$).
Man schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \to \infty \text{ für } x \to x_0,$$

falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist und für jede Folge $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to \infty$. (Entsprechend für $-\infty$.)
Man schreibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty,$$

falls D unbeschränkt ist und für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to \infty$. (Entsprechend für $-\infty/+\infty$ (3 Möglichkeiten)).

Beispiel 3.25. 1. Für $s > 0$ (evtl. rational, bzw. später sogar reell) ist $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0$.
Denn für (x_n) mit $x_n \to \infty$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \ge N$ gilt $x_n \ge \epsilon^{-1/s}$.
Für solche n ist dann $\left|\frac{1}{x_n^s}\right| \le \frac{1}{\left(\epsilon^{-1/s}\right)^s} = \epsilon$.

2. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0$.
Denn es ist $0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ nach 1.

3. Sei $P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ ein Polynom mit $n \geq 1$ und $a_n > 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Für $x \neq 0$ ist $P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$. Dann gilt für

$$x \geq \max\left\{\frac{2n\,|a_{n-1}|}{a_n}, \left(\frac{2n\,|a_{n-2}|}{a_n}\right)^{1/2}, \ldots, \left(\frac{2n\,|a_0|}{a_n}\right)^{1/n}\right\} =: C,$$

$$\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \geq |a_n| - \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{x}}_{\leq \frac{a_n}{2n}} - \ldots - \underbrace{\frac{|a_0|}{x^n}}_{\leq \frac{a_n}{2n}} \geq a_n - n \cdot \frac{a_n}{2n} = \frac{a_n}{2}$$

Damit ist für $x \geq C$ auch $P(x) \geq \frac{a_n}{2} x^n$, und daraus folgt $P(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.
Für die zweite Behauptung schreiben wir $P(-x) = (-1)^n Q(x)$ mit $Q(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-n} a_n x^m$ und wenden die erste Behauptung an. □

3.4 Monotone Funktionen

Definition 3.26. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$ gilt $f(x) \leq f(x')$ (bzw. $f(x) \geq f(x')$). Sie heißt *monton*, wenn sie entweder monoton wachsend oder fallend ist.
Sie heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$ gilt $f(x) < f(x')$ (bzw. $f(x) > f(x')$).

Proposition 3.27. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann existieren für jedes $x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ und es gilt*

$$\sup_{a<x<x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) \leq \lim_{x\searrow x_0} f(x) = \inf_{x_0<x<b} f(x).$$

Hier schreiben wir $\sup_{a<x<x_0} f(x) := \sup\{f(x) : a < x < x_0\}$ und entsprechend für inf.

Beweis. Die Menge $\{f(x) : a < x < x_0\}$ ist nichtleer und nach oben beschränkt (durch $f(x_0)$), daher hat sie ein Supremum A. Zu zeigen: $A = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$. (Daraus folgt dann die Proposition.)

Sei $(x_n) \subset (a, x_0)$ mit $x_n \to x_0$. Zu zeigen: $f(x_n) \to A$.

Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition des Supremums gibt es ein $\delta > 0$ (mit $x_0 - \delta > a$), so dass $f(x_0 - \delta) > A - \epsilon$. Wegen der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$. Für solche x_n ist also $f(x_n) \geq f(x_0 - \delta) > A - \epsilon$ (da $x_n > x_0 - \delta$). Wegen $f(x_n) \leq A$ ist also $|f(x_n) - A| < \epsilon$. □

Korollar 3.28. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $\{x_0 \in (a, b) : f \text{ ist nicht stetig in } x_0\}$ abzählbar.*

Beweis. Sei z.B. f monoton wachsend und E die Menge im Korollar. Für jedes $x_0 \in E$ ist $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) < \lim_{x\searrow x_0} f(x)$ (bei Gleichheit wäre f an dieser Stelle stetig), also gibt es ein $r(x_0) \in \mathbb{Q}$ mit $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) <$

$r(x_0) < \lim_{x \searrow x_0} f(x)$. Die Abbildung $E \ni x_0 \mapsto r(x_0) \in \mathbb{Q}$ ist injektiv, denn für $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 < x_2$ ist

$$r(x_1) < \lim_{x \searrow x_1} f(x) = \inf_{x_1 < x < b} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ monoton}}}{=} \inf_{x_1 < x < x_2} f(x) \leq \sup_{x_1 < x < x_2} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ monoton}}}{=} \sup_{a < x < x_2} f(x) = \lim_{x \nearrow x_2} f(x) < r(x_2).$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist $r(E)$ abzählbar, d.h. es gibt $\tau : \mathbb{N} \to r(E)$ surjektiv. Weil $r : E \to r(E)$ bijektiv ist, gibt es ein $\tilde{\tau} : \mathbb{N} \to E$ surjektiv, d.h. E ist abzählbar. □

Definition 3.29. Sind A, B Mengen und $f : A \to B$ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ definiert durch

$$f^{-1}(y) := x \quad \text{wo} \quad f(x) = y, \quad y \in B, x \in A.$$

Satz 3.30. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist $f : I \to f(I)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton.*

Beweis. f^{-1} streng monoton einfach. Wir zeigen, f^{-1} ist stetig. Sei z.B. f streng monoton wachsend und sei $y_0 \in f(I)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $x_0 := f^{-1}(y_0)$ kein Randpunkt von I ist. Sei $\epsilon > 0$. Nach eventueller Verkleinerung von ϵ können wir annehmen, dass

$$[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$$

Wegen strenger Monotonie ist $f(x_0 - \epsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \epsilon)$. Mit

$$\delta := \min\{f(x_0) - f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\} > 0$$

gilt für $|y - y_0| < \delta$, dass $y < y_0 + \delta \leq f(x_0) + (f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)) = f(x_0 + \epsilon)$.
Wegen der Monotonie folgt daraus $f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon = f^{-1}(y_0) + \epsilon$.
Genauso: $f^{-1}(y) > f^{-1}(y_0) - \epsilon$, also $\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \epsilon$. Der Fall, dass x_0 ein Randpunkt ist, geht ähnlich (man lässt beispielsweise beim rechten Randpunkt Argumentationsschritt mit $x_0 + \epsilon$ einfach weg). □

Korollar 3.31. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $[0, \infty) \ni x \mapsto x^{1/n}$ stetig.*

Beweis. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto y^n$ ist streng monoton wachsend und bildet $[0, \infty)$ bijektiv auf $[0, \infty)$ ab (folgt z.B. aus der Stetigkeit von f und dem Satz, dass $f([0, \infty))$ ein Intervall ist.)
Nach dem vorherigen Satz ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. □

Bemerkung: Ist n ungerade, so ist $\mathbb{R} \ni y \mapsto y^n$ streng monoton wachsend und daher kann die n-te Wurzel auf $\mathbb{R}$ und nicht nur auf $[0, \infty)$ definiert werden.

3.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist treng monoton wachsend, stetig und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, \infty)$ ab.

Beweis. Für $x < x'$ ist $\exp(x) = \underbrace{\exp(\underbrace{x - x'}_{<0})}_{<1} \underbrace{\exp(x')}_{>0} < \exp(x')$.

Stetig: s.o.

Bild: Wegen Stetigkeit ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall. Wegen $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$. Wegen $\exp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \geq 1 + x$ für $x \geq 0$ ist $\exp(\mathbb{R})$ nicht nach oben beschränkt. Außerdem folgt aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{1+x}$ für $x \geq 0$, dass $\inf \exp(\mathbb{R}) \leq 0$. ☐

Definition 3.32. Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Nach dem vorherigen Satz ist ln streng monoton wachsend, stetig und bildet $(0, \infty)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Außerdem folgt aus der Funktionalgleichung für exp, dass

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \text{ für alle } x, y > 0.$$

Bemerkung: Es gilt $\exp\left(\frac{p}{q} \ln a\right) = (a^p)^{\frac{1}{q}}$ für $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a \in (0, \infty)$.

Beweis. Aus der Funktionalgleichung für den Logarithmus folgt $p \ln a = \ln(a^p)$ (zunächst für $p \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion mit der vorherigen Formel für Produkte als Argument, dann für $p = -1$ mit $\ln 1 = 0$ und $1 = aa^{-1}$, dann für alle p durch Induktion).

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q} \ln a\right) = \exp\left(\frac{1}{q} \ln(a^p)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.o.}}}{=} (\exp(\ln(a^p)))^{1/q} = (a^p)^{1/q}.$$

☐

Wir definieren jetzt *allgemeine Potenzen*

$$a^x := \exp(x \ln a) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, a \in (0, \infty)$$

Nach der Bemerkung steht das nicht im Konflikt mit bestehender Notation für Potenzen und Wurzeln. Als Komposition stetiger Funktionen sind folgende Funktionen stetig:

$$x \mapsto a^x, \qquad a \mapsto a^x$$

Korollar 3.33. *Für alle* $a \in (0, \infty)$ *gilt* $\lim_{x\to\infty} a^{1/x} = 1$.

Beweis.

$$\lim_{x\to\infty} a^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \ln a\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln a\right) = \exp(0) = 1.$$

☐

Rechenregeln: Für alle $a, b \in (0, \infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^x b^x = (ab)^x$
4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

Beweis. 1. Aus Funktionalgleichung von exp.

2. Aus $a^x = \exp(x \ln a)$ folgt $\ln(a^x) = x \ln(a)$ und damit $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(xy \ln a) = a^{xy}$.
3. $a^x b^x = \exp(x \ln a) \exp(x \ln b) = \exp(x \ln a + x \ln b) = (\exp(\ln a) \exp(\ln b))^x = (ab)^x$.
4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x \ln \frac{1}{a}\right) = \exp(x(-\ln a)) = (\exp(\ln a))^{-x} = a^{-x}$.

☐

Satz 3.34. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dass $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Dann ist entweder $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder es ist $a := f(1) > 0$ und $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Es ist $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

- Sei zunächst $a := f(1) > 0$. Wegen $a = f(1+0) = f(1) \cdot f(0) = a \cdot f(0)$ ist $f(0) = 1$. Wie in der Bemerkung oben zeigt man jetzt $f\left(\frac{p}{q}\right) = (a^p)^{1/q}$ für alle $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. D.h. es gilt $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Wegen Stetigkeit folgt daraus $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Sei jetzt $f(1) = 0$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R} : f(x) = f((x-1)+1) = f(x-1) \cdot \underbrace{f(1)}_{=0} = 0$.

□

Asymptotisches Verhalten des Logarithmus und der allgemeinen Potenzen

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$. „Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz." Außerdem ist $\lim_{x\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} x^n \mathrm{e}^{1/x} = \infty$.

   Beweis. Für alle $x > 0$ ist $\mathrm{e}^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$.
   Die zweite Aussage folgt wegen $x^n \mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}\right)^{-1}$.
   Die dritte Aussagen folgt wegen $x^n \mathrm{e}^{1/x} = \frac{\mathrm{e}^y}{y}$ mit $y = \frac{1}{x}$. □

2. $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

   Beweis. Folgt, da das Bild von ln gleich $\mathbb{R}$ ist und ln monoton ist. □

3. Für $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} x^{-\alpha} = +\infty$.

   Beweis. Sei $(x_n) \subset (0,\infty)$ mit $x_n \to 0$. Nach 2. ist $\lim_{n\to\infty} \alpha \ln x_n = -\infty$, also wegen 1. (mit $n = 0$) $\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha \ln x_n} = 0$.
   Zweite Aussage: $x^{-\alpha} = (x^\alpha)^{-1}$. □

Man definiert $0^\alpha := 0$ für $\alpha > 0$. Nach 3. ist $[0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$ stetig.

Für alle $\alpha > 0$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. „Der Logarithmus wächst langsamer als jede positive Potenz von x."

Beweis. Sei $(x_n) \subset (0,\infty)$mit $x_n \to \infty$ und $y_n := \alpha \ln x$. Dann gilt nach 2. $y_n \to \infty$ und damit $\frac{\ln x_n}{x_n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{y_n}{\mathrm{e}^{y_n}} \xrightarrow[1.]{} 0$. □

5. Für alle $\alpha > 0$ ist $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$.

   Beweis. Folgt aus 4., da $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} \to 0$. □

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   Beweis. Wir wissen $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \dfrac{\mathrm{e}^y - 1}{y} = 1$. Mit $y = \ln(1+x)$ ist $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} \to \frac{1}{1} = 1$ für $x \to 0$. □

Korollar 3.35. *Für $x \in \mathbb{R}$ ist* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von exp genügt es, zu zeigen, dass $\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, d.h. $\frac{\ln(1+x/n)}{x/n} \to 1$. Das gilt nach 6. □

3.6 Komplexe Zahlen

Auf der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ führen wir zwei Abbildungen („Addition“ und „Multiplikation“) ein durch

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &:= (x_1+x_2, y_1+y_2)\,,\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) &:= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)\,.\end{aligned}$$

Zusammen mit dem *Nullelement* $(0,0)$, dem *Einselement* $(1,0)$, dem *additiv Inversem*

$$-(x_1,y_1) := (-x_1,-y_1)$$

und dem *multiplikativ Inversem*

$$(x_1,y_1)^{-1} := \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \qquad \text{für } (x_1,y_1)\neq(0,0)$$

erfüllt das die Körperaxiome. Der entstandene Körper heißt *Körper der komplexen Zahlen* und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.
Z.B. Nachweis des Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\cdot((x_2,y_2)+(x_3,y_3)) &= (x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3,y_2+y_3)\\ &= (x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3))\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)+(x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3) &= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)+(x_1x_3-y_1y_3, x_1y_3+y_1x_3)\\ &= (x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3, x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3)\end{aligned}$$

Für spezielle komplexe Zahlen der Gestalt $(x,0)\,, x\in\mathbb{R}$ gilt

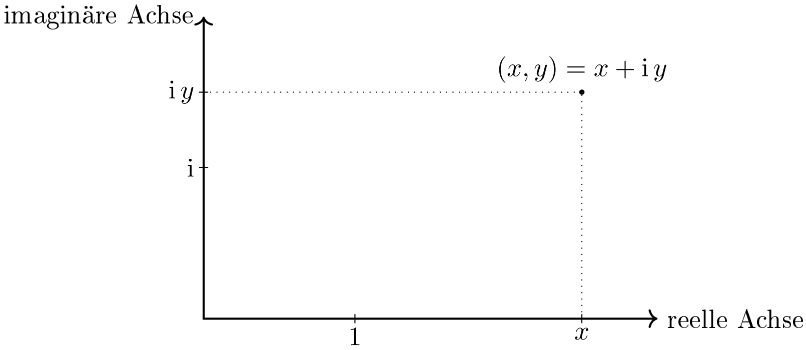
$$\begin{aligned}(x_1,0)+(x_2,0) &= (x_1+x_2,0)\,,\\ (x_1,0)\cdot(x_2,0) &= (x_1x_2,0)\,,\end{aligned}$$

d.h. sie werden wie reelle Zahlen addiert und multipliziert. Man identifiziert daher oft $(x,0)$ mit x und betrachtet $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Eine wichtige komplexe Zahl ist $\mathrm{i} := (0,1)$. Es gilt

$$\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1,0+0) = (-1,0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Identifikation}}}{=} -1.$$

Mit Hilfe von i können wir schreiben:

$$(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{=x}\underbrace{(1,0)}_{=1} + \underbrace{(y,0)}_{=y}\underbrace{(0,1)}_{=\mathrm{i}} = x+\mathrm{i}\,y \quad \text{für } x,y\in\mathbb{R}.$$



Addition ist Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$, für Multiplikation: s.u.

Bemerkung: Es gibt keine Anordnung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht. (Denn in jedem angeordneten Körper gilt $x^2 \geq 0$ für alle x, aber es ist $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.)

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}\, y$, $x, y \in \mathbb{R}$ werden *Real-* und *Imaginärteil* definiert durch

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y,$$

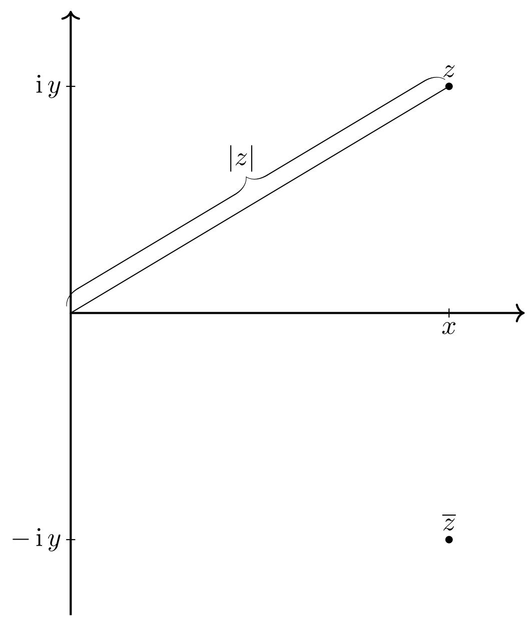
und die *komplex konjugierte Zahl* durch

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y.$$

Der *Betrag* von z ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - \mathrm{i}\, y)\,(x + \mathrm{i}\, y)} = \sqrt{\overline{z} z}.$$

Das ist die euklidische Länge des Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Rechenregeln: Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

Real- und Imaginärteil:

- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z})$
- $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\,(z - \overline{z})$

Komplexe Konjugation:

- $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Betrag:

- $|z_1| \geq 0$ und $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$.
- $|\operatorname{Re} z_1| \leq |z_1|$ und $|\operatorname{Im} z_1| \leq |z_1|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. 5.) $|z_1 z_2|^2 = \overline{(z_1 z_2)}\,(z_1 z_2) = (\overline{z_1} z_1)\,(\overline{z_2} z_2) = |z_1|^2\,|z_2|^2$.
6.) $|z_1 + z_2|^2 = \overline{(z_1 + z_2)}\,(z_1 + z_2) = |z_1|^2 + \underbrace{\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_1}_{\substack{=2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) \\ \leq 2|\overline{z_1} z_2| \\ =2|z_1||z_2|}} + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$.

□

Konvergenz im Komplexen

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt *konvergent* gegen ein $z \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|z_n - z| < \epsilon$. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \text{oder} \qquad z_n \to z \text{ für } n \to \infty.$$

Proposition 3.36. *Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Dann konvergiert (z_n) genau dann, wenn $(\mathrm{Re}\, z_n)$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)$ konvergieren, und in diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $z := \lim_{n\to\infty} z_n$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $|z_n - z| < \epsilon$. Damit ist für $n \geq N$ auch $|\mathrm{Re}\, z_n - \mathrm{Re}\, z| < \epsilon$ und $|\mathrm{Im}\, z_n - \mathrm{Im}\, z| < \epsilon$.
„$\Leftarrow$“: Seien $x := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n, y := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $|\mathrm{Re}\, z_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und für $n \geq M$ gilt $|\mathrm{Im}\, z_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist für $n \geq \max\{N, M\}$:

$$|z_n - (x + \mathrm{i}\, y)| = |(\mathrm{Re}\, z_n - x) + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}\, z_n - y)| \leq |\mathrm{Re}\, z_n - x| + |\mathrm{Im}\, z_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Insbesondere folgt aus der Konvergenz von (z_n) die von $(\overline{z_n})$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}.$$

Definition 3.37. Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls $\{|z| : z \in A\}$ beschränkt ist. Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt *beschränkt*, falls $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Definition einer Teilfolge wie im Reellen.
Bemerkung: Eine beschränkte Folge komplexer Zahlen hat eine konvergente Teilfolge. *(Bolzano-Weierstraß)*

Definition 3.38. Eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n, m \geq N$ gilt $|z_n - z_m| < \epsilon$.

Eine Folge (z_n) ist Cauchy genau dann, wenn $(\mathrm{Re}\, z_n)$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)$ Cauchy sind. Insbesondere ist eine Folge komplexer Zahlen konvergent, genau dann, wenn sie Cauchy ist.

Rechenregeln

Seien $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$ konvergent. Dann konvergieren auch $(z_n + w_n)$ und $(z_n w_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Ist $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, so gilt $w_n \neq 0$ für alle genügend großen n (d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt...) und $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}.$$

Definition 3.39. Sei $(c_n) \subset \mathbb{C}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ *konvergent*, falls die Folge $\left(\sum_{m=1}^{n} c_m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sie heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|$ konvergiert.

Bemerkung: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Satz 3.40. *Majorantenkriterium: Sei $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ eine konvergente Reihe nicht-negativer Zahlen und sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ absolut konvergent.*

Entsprechend gelten das Wurzel- und Quotientekriterium (mit $\limsup |c_n|^{1/n}$ und $\limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$).

Definition 3.41. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* in z_0, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein δ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Bemerkung: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \in D$ genau dann, wenn für jede Folge $(z_n) \subset D$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ gilt, dass $f(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$.

Rechenregeln:

Summe, Produkt, Quotient und Komposition stetiger Funktionen sind stetig.

Insbesondere sind *Polynome* stetig (d.h. $P(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ mit $a_m \in \mathbb{C}$) und auch rationale Funktionen (d.h. Quotienten von zwei Polynomen).

Die Funktion $z \mapsto |z|$ ist stetig (denn $z \mapsto z$ und $z \mapsto \overline{z}$ ist stetig, also ist $z \mapsto |z|^2 = \overline{z}z$ stetig und damit auch $z \mapsto |z| = \left(|z|^2\right)^{1/2}$).

Definition 3.42. Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig*, falls sie stetig in jedem $z_0 \in D$ ist.

Definition 3.43. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Menge $A \subset \mathbb{K}$ heißt *abgeschlossen* (in $\mathbb{K}$), falls für jede konvergente Folge $(z_n) \subset A$ gilt $\lim_{n\to\infty} z_n \in A$.

Beispiele:

1. $\mathbb{K}$ ist abgeschlossen.
2. Sei $-\infty < a \leq b < \infty$. Dann ist $[a, b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen.
3. Sei $w \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < \infty$. Dann ist $\{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$ abgeschlossen.
4. Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Dann ist $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *nicht* abgeschlossen. (Z.B.: $z_n := a + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \notin (a, b)$.)

Definition 3.44. Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls $\{f(z) : z \in D\}$ beschränkt ist.

Satz 3.45. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es gibt $v, w \in K$ mit $f(v) = \inf\limits_{z \in K} f(z), f(w) = \sup\limits_{z \in K} f(z)$.*

Beweis. Wir zeigen „nach oben beschränkt“ und die Existenz von w.
Sei $B := \sup\limits_{z \in K} f(z)$. Dann gibt es nach der Definition des Supremums eine Folge $(z_n) \subset K$ mit $f(z_n) \to B$ für $n \to \infty$. Wegen K beschränkt ist (z_n) beschränkt und nach Bolzano-Weierstraß gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $(z_{n_k}) \to w$ für $k \to \infty$. Wegen K abgeschlossen ist $w \in K$. Wegen f stetig gilt $f(z_{n_k}) \to f(w)$. Damit ist $B = f(w) < \infty$. □

Fundamentalsatz der Algebra

Polynom $\sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ mit $a_m \in \mathbb{C}$; ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von P.

Satz 3.46. *Sei $P(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ ein Polynom von Grad n. Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Behauptung: Ist P ein Polynom von Grad ≥ 1, so gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.
Zeige: Behauptung $\Rightarrow$ Satz. Durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $n \geq 1$ und der Satz gelte für alle kleineren n. Nach der Behauptung gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.
Mit dem binomischen Lehrsatz sieht man, dass $\tilde{P}(w) := P(w + z_0)$ wieder ein Polynom von Grad n ist, d.h. $\tilde{P}(w) = \sum_{m=0}^{n} b_m w^m$ mit $b_n = a_n \neq 0$. Außerdem ist $b_0 = \tilde{P}(0) = P(z_0) = 0$. Daraus folgt, dass $\tilde{P}(w) = wQ(w)$ mit $Q(w) = \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-1} w^m$. Nach IV ist

$$Q(w) = a_n (w - w_1) \cdot \ldots \cdot (w - w_{n-1}) \text{ für alle } w \in \mathbb{C}.$$

Also ist

$$P(z) = \tilde{P}(z - z_0) = (z - z_0) Q(z - z_0) = (z - z_0) a_n (z - z_0 - w_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_0 - w_{n-1}).$$

Mit $z_m := z_0 + w_m,\ m = 1, \ldots, n-1$ und $z_n := z_0$ ist das die behauptete Gestalt.
Jetzt Beweis der Behauptung.
Schritt 1. $|P|$ nimmt sein Minimum auf $\mathbb{C}$ ein.
Sei $\mu := \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. Es gilt für

$$|z| \geq \max \left\{ \frac{2n\,|a_{n-1}|}{|a_n|}, \left(\frac{2n\,|a_{n-2}|}{|a_n|} \right)^{1/2}, \ldots, \left(\frac{2n\,|a_0|}{|a_n|} \right)^{1/n} \right\} =: R_0,$$

dass

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n|\,|z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \\ &\geq |a_n|\,|z|^n \left(1 - \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \frac{1}{|z|}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \underbrace{\frac{|a_{n-2}|}{|a_n|} \frac{1}{|z|^2}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \ldots - \underbrace{\frac{|a_0|}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n}}_{\leq \frac{1}{2n}} \right) \\ &\geq |a_n|\,|z|^n \left(1 - n \cdot \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} |a_n|\,|z|^n. \end{aligned}$$

Ist $|z| > \left(\frac{\mu 2}{|a_n|}\right)^{1/n} =: R_1$, so ist die Rechte Seite $> \mu$. Also ist

$$\mu = \inf_{|z| \leq \max\{R_0, R_1\}} |P(z)|\,.$$

Weil $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \max\{R_0, R_1\}\}$ beschränkt und abgeschlossen ist, gibt es nach Satz 3.45 ein z_0 in dieser Menge mit $|P(z_0)| = \mu$.

Schritt 2. Wir zeigen $P(z_0) = 0$.

Angenommen, es wäre $P(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$Q(w) := \frac{P(z_0 + w)}{P(z_0)}$$

ein Polynom von Grad n (der höchste Term ist $\frac{a_n}{P(z_0)} w^n$) mit $Q(0) = 1$ und $|Q(w)| \geq 1$ für alle $w \in \mathbb{C}$ (wegen $\mu = |P(z_0)|$). Es gibt ein $K \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$Q(w) = 1 + b_K w^K + \ldots + b_n w^n \quad \text{und } b_K \neq 0.$$

Wir verwenden jetzt die Tatsache, dass es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ gibt mit $\zeta^K = -\frac{|b_K|}{b_K}$. (Beweis in Kürze).

Dann gilt für $0 \leq r \leq |b_K|^{1/K}$:

$$\left|1 + b_K (r\zeta)^K\right| = \left|1 + b_K r^K \left(-\frac{|b_K|}{b_K}\right)\right| = \left|1 - |b_K|\, r^K\right| = \underbrace{1 - |b_K|\, r^K}_{\text{Das ist } <1.}.$$

Also gilt für $0 \leq r < |b_K|^{1/K}$:

$$\begin{aligned} |Q(r\zeta)| &\leq \underbrace{\left|1 + b_K (r\zeta)^K\right|}_{=1-|b_K| r^K} + \underbrace{\left|b_{K+1} (r\zeta)^{K+1}\right|}_{\overset{(*)}{=} |b_{K+1}| r^{K+1}} + \ldots + \underbrace{|b_n (r\zeta)^n|}_{\overset{(*)}{=} |b_n| r^n} \\ &= 1 - |b_K|\, r^K \left(1 - \frac{|b_{K+1}|}{|b_K|} r - \ldots - \frac{|b_n|}{|b_K|} r^{n-K}\right). \end{aligned}$$

Bei $(*)$ wurde verwendet, dass $\zeta^K = -\frac{|b_K|}{b_K} \Rightarrow |\zeta|^K = \left|-\frac{|b_K|}{b_K}\right| = 1 \Rightarrow |\zeta| = 1$. Ist nun

$$r < \min\left\{\frac{|b_K|}{(n-K)\,|b_{K+1}|}, \ldots, \left(\frac{|b_K|}{(n-K)\,|b_n|}\right)^{\frac{1}{n-K}}\right\},$$

so ist

$$1 - \frac{|b_{K+1}|}{|b_K|} r - \ldots - \frac{|b_n|}{|b_K|} r^{n-K} > 1 - \frac{1}{n-K} - \ldots - \frac{1}{n-K} = 0,$$

also

$$|Q(r\zeta)| < 1,$$

im *Widerspruch* zu $Q(w) \geq 1$ für alle $w \in \mathbb{C}$. □

3.7 Die Exponentialfunktion im Komplexen und die trigonometrischen Funktionen

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} =: \exp(z)$$

absolut konvergent. (Denn $\sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{z^m}{m!}\right| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} = \exp(|z|)$) und damit konvergent.

Abschätzung des Restglieds

$$\exp(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{m!} + R_n(z)$$

mit $|R_n(z)| \leq 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ für alle $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$.
Funktionalgleichung: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. (Denn: $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1 \neq 0$).
Bemerkung: $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Mit $s_n(z) := \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{m!}$ ist $\overline{s_n(z)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\overline{z}^m}{m!} = s_n(\overline{z})$, also

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \lim_{n\to\infty} s_n(\overline{z}) = \exp(\overline{z})$$

□

Insbesondere ist $|\exp(\mathrm{i}\,x)| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. $|\exp(\mathrm{i}\,x)|^2 = \overline{\exp(\mathrm{i}\,x)}\exp(\mathrm{i}\,x) = \exp\left(\overline{\mathrm{i}\,x}\right)\exp(\mathrm{i}\,x) = \exp(-\mathrm{i}\,x + \mathrm{i}\,x) = \exp(0) = 1$. □

Proposition 3.47. exp *ist stetig in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Wie im Reellen genügt es wegen der Funktionalgleichung die Stetigkeit in $z = 0$ zu zeigen. Wegen der Restgliedabschätzung ist $|\exp(z) - 1| \leq 2|z|$ für $|z| \leq 1$ und für $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit $z_n \to 0$ folgt $|\exp(z_n) - 1| \leq 2|z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung: $\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$.

Beweis. Wie im Reellen, verwende Restgliedabschätzung mit $n = 1$. □

Wir schreiben im Folgenden oft auch $\mathrm{e}^z := \exp(z)$.

Definition 3.48. Die *Sinus-* und *Kosinusfunktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

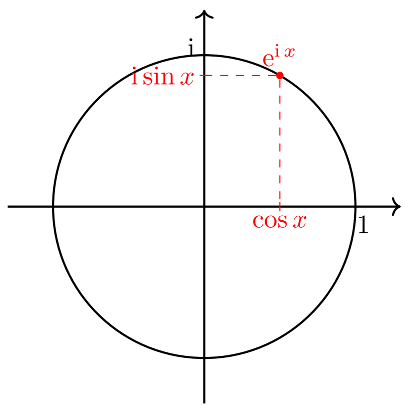
$$\sin(x) := \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}, \qquad \cos(x) := \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

(Wir schreiben oft $\sin x$ und $\cos x$ statt $\sin(x)$ und $\cos(x)$.)

Nach Definition gilt die sogenannte *Eulersche Formel*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geometrische Deutung:



Aus der Definition folgt sofort:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right) \quad \sin x = \tfrac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right)$$

$$\cos x = \cos(-x) \qquad \sin x = -\sin(-x) \qquad \cos\text{„gerade“},\ \sin\text{„ungerade“}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\text{wobei} \qquad \cos^2 x = (\cos x)^2 \qquad \sin^2 x = (\sin x)^2$$

Proposition 3.49. (Additionstheoreme) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Beweis. Nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\\ &= (\cos x\cos y - \sin x \sin y) + \mathrm{i}(\cos x \sin y + \sin x \cos y)\end{aligned}$$

Setzt man hier $x + y = u, x - y = v$, also $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$, so erhält man

$$\cos u + \mathrm{i}\sin u = \left(\cos\tfrac{u+v}{2}\cos\tfrac{u-v}{2} - \sin\tfrac{u+v}{2}\sin\tfrac{u-v}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\cos\tfrac{u+v}{2}\sin\tfrac{u-v}{2} + \sin\tfrac{u+v}{2}\cos\tfrac{u-v}{2}\right)$$

Vertauscht man die Rollen von u und v, erhält man

$$\cos v + \mathrm{i}\sin v = \left(\cos\tfrac{u+v}{2}\cos\tfrac{u-v}{2} + \sin\tfrac{u+v}{2}\sin\tfrac{u-v}{2}\right) + \mathrm{i}\left(-\cos\tfrac{u+v}{2}\sin\tfrac{u-v}{2} + \sin\tfrac{u+v}{2}\cos\tfrac{u-v}{2}\right)$$

Durch Subtraktion erhält man

$$(\cos u - \cos v) + \mathrm{i}(\sin u - \sin v) = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} + \mathrm{i}\,2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

□

Insbesondere ist:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x\end{aligned}$$

Proposition 3.50. *Die Funktionen* cos *und* sin *sind auf* $\mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn $\operatorname{Re} f : D \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ stetig sind. Weil die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ stetig ist, sind daher $\operatorname{Re}\exp$ und $\operatorname{Im}\exp$ auf $\mathbb{C}$ stetig und daher ihre Restriktionen auf $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ cos und sin auf $\mathbb{R}$ stetig. □

Bemerkung: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. $\frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x} = \operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-1}{x} = \operatorname{Im}\mathrm{i}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-1}{\mathrm{i}\,x}}_{\to 1} \to \operatorname{Im} i = 1.$ □

Satz 3.51. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Die beiden Reihen sind absolut konvergent. Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x), \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(x)$$

mit

$$|r_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \le 2n+3, \qquad |r_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \le 2n+4.$$

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt sofort aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Wir verwenden

$$\mathrm{i}^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 4l \\ \mathrm{i} & \text{falls } m = 4l+1 \\ -1 & \text{falls } m = 4l+2 \\ -\mathrm{i} & \text{falls } m = 4l+3 \end{cases}$$

Damit ist

$$\exp(\mathrm{i}\,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\,x)^m}{m!} = \underset{\substack{\uparrow \\ m=2k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}} + \mathrm{i} \underset{\substack{\uparrow \\ m=2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

Jetzt nehme Real- und Imaginärteil.

$$r_{2n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underset{\substack{\uparrow \\ k=n+1+l}}{=} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \underbrace{\frac{(2n+2)!}{(2n+2+2l)!} x^{2l}}_{=a_l}$$

Behauptung: (a_l) ist monton fallend und konvergiert gegen Null.

$$\frac{a_{l+1}}{a_l} = \frac{(2n+2+2l)!}{(2n+2+2l+2)!} \frac{x^{2l+2}}{x^{2l}} = \frac{x^2}{(2n+2+2l+2)(2n+2+2l+1)}$$

Für $|x| \le 2n+3$ ist

$$x^2 \le (2n+3)^2 < (2n+3)(2n+4) \le (2n+2+2l+1)(2n+2+2l+2) \text{ für alle } l \in \mathbb{N}_0$$
$$\Rightarrow \frac{a_{l+1}}{a_l} \le \text{const.} < 1 \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Aus dem Beweis des Leibnizschen Konvergenzkriteriums folgt

$$0 \le \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l a_l \le a_0 = 1$$

Also ist

$$|r_{2n}(x)| = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l a_l \right| \le \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \le 2n+3$$

Entsprechend für r_{2n+1}. □

Satz 3.52. (und Definition) *Die Kosinusfunktion hat in* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle. Diese bezeichnet man mit* $\frac{\pi}{2}$ *und es gilt* $\cos\frac{\pi}{2}=0$ *und* $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Beweis. Nach den Restgliedabschätzungen gilt

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^4}{24} \text{ für } |x| \leq 5,$$
$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \text{ für } |x| \leq 4.$$

Aus ersterem folgt, dass\cos $2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$.
Wegen $\cos 0 = 1$ und Stetigkeit hat cos nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $(0,2)$.
Um die Eindeutigkeit zu zeigen, zeigen wir, dass cos in $[0,2]$ streng monton fallend ist.
Seien $0 \leq x < y \leq 2$. Dann ist nach dem Additionstheorem

$$\cos y - \cos x = -2\sin\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in(0,2)}\sin\underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in(0,2]}$$

Also genügt es zu zeigen, dass $\sin u > 0$ für $u \in (0,2]$.

$$\sin u \geq u - \frac{u^3}{6} = u\left(1 - \underbrace{\frac{u^2}{6}}_{\leq\frac{2^2}{6}=\frac{2}{3}}\right) \geq \frac{1}{3}n > 0.$$

Wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$ gilt $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$. Wegen $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ ist daher $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. □

Numerisch ist

$$\pi = 3.14159\ldots$$

Korollar 3.53. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1.$

Beweis. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}$. Die übrigen Aussagen folgen durch Potenzieren. □

Korollar 3.54. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$. *„$2\pi$-Periodizität"*
- $\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$.
- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Beweis. Additionstheorem und vorheriges Korollar. □

Korollar 3.55.

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1\right\} = \{k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. Nach Definition von $\frac{\pi}{2}$, wegen $\cos 0 = 1 > 0$ und wegen $\cos(-x) = \cos x$ gilt $\cos x > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Wegen $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ folgt daraus $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$.
Wegen $\sin(x + \pi) = -\sin x$ folgt daraus $\sin x < 0$ für $\pi < x < 2\pi$.
Also haben wir gezeigt, dass $0, \pi$ die einzigen Nullstellen von sin in $[0, 2\pi)$ sind. Wegen der 2π-Periodizität folgt daraus die erste Behauptung.
Die zweite Behauptung folgt aus der ersten wegen $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
Wegen $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1\right)$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} \neq 0$ gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$ genau dann, wenn $\sin\frac{x}{2} = 0$. Damit folgt die dritte Behauptung aus der ersten. □

Definition 3.56. Die Tangens- und Kotangensfunktion $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Satz 3.57. (und Definition)

1. $\cos$ *ist in* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die Umkehrfunktion* $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *heißt* Arcus-Kosinus.
2. $\sin$ *ist in* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die Umkehrfunktion* $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *heißt* Arcus.Sinus.
3. $\tan$ *ist in* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die Umkehrfunktion* $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* Arcus-Tangens.

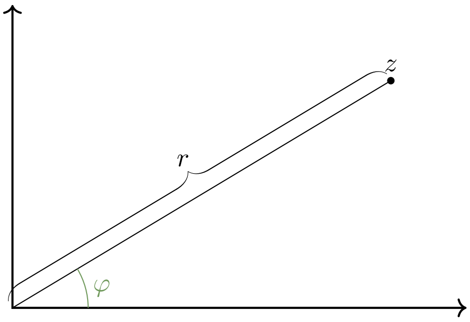
Wegen $\cot x : \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ *behandeln wir den* cot *nicht gesondert.*
Nach dem Satz von der Umkehrfunktion sind $\arccos, \arcsin$ *und* $\arctan$ *stetig.*

Beweis.
1. Wie im letzten Satz gezeigt ist cos in $[0, 2]$ und insbesondere in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend. Wegen $\cos x = -\cos(\pi - x)$ für alle x ist cos auch in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ streng monoton fallend. Außerdem ist $\cos 0 = 1$ und, nach einem Korollar oben, $\cos\pi = -1$.
Wegen Stetigkeit folgt daraus die Behauptung.
2. Wegen $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ für alle x folgt 2. aus 1.
3. Monotonie: Seien $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt nach 1. und 2. $\cos x > \cos y$ und $\sin x < \sin y$, also $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y$.
Damit gilt die strenge Monotonie in $[0, \frac{\pi}{2})$ und wegen $\tan x = -\tan -x$ auch in $(-\frac{\pi}{2}, 0]$.
   (a) Bild: Wegen Stetigkeit ist $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ ein Intervall. Wir zeigen $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$. Wegen der Ungeradheit folgt daraus auch $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, und damit $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$.
   Sei $(x_n) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $x_n \to \frac{\pi}{2}$. Dann gilt für alle genügend großen n, dass $x_n > 0$ und damit $y_n := \frac{\cos x_n}{\sin x_n} > 0$. Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0$. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \tan x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$.

□

Polarkoordinaten

Satz 3.58. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $r \in [0, \infty)$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$. Es gilt $r = |z|$ und für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.*



φ ist der Winkel (im Bogenmaß) zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor von z in der komplexen Ebene. Man nennt φ das *Argument* (genauer: ein Argument) von z.

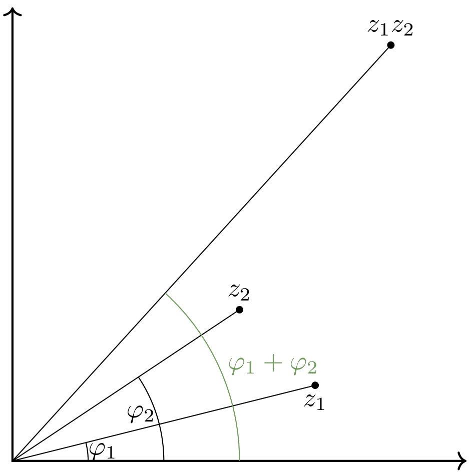
Beweis. Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Sei jetzt $z \neq 0$ und $r := |z|$ und $\zeta := \frac{z}{r}$. Dann ist $|\zeta| = 1$ und insbesondere ist $\operatorname{Re}\zeta \in [-1, 1]$. Damit ist $\alpha := \arccos \operatorname{Re}\zeta$ definiert und es gilt $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\operatorname{Re}\zeta)^2 = (\operatorname{Im}\zeta)^2$, also $\sin\alpha$ ist entweder $+\operatorname{Im}\zeta$ oder $-\operatorname{Im}\zeta$. Wir setzen

$$\varphi := \begin{cases} \alpha & \text{falls } \sin\alpha = \operatorname{Im}\zeta, \\ -\alpha & \text{falls } \sin\alpha = -\operatorname{Im}\zeta. \end{cases}$$

Damit ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \operatorname{Re}\zeta + \mathrm{i}\operatorname{Im}\zeta = \zeta$, also $z = r\zeta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
Gilt $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi'}$, so ist $r = |z| = r'$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi - \varphi')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi'}\right)^{-1} = \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{-1} = 1$. Nach Korollar 3.55 ist dann $\varphi - \varphi' = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. □

Geometrische Deutung der komplexen Multiplikation

$$z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_2} \qquad \rightsquigarrow \qquad z_1 z_2 = (r_1 r_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



Korollar 3.59. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^N = c$ und*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z^N = c\right\} = \left\{w\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi n}{N}} : n = 0, \ldots, N-1\right\}.$$

Die Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi n}{N}}, n = 0, \ldots, N-1$, erfüllen $z^N = 1$ und heißen N-te Einheitswurzeln.

Dieses Korollar wurde im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra verwendet.

Beweis. Sei $c = |c| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}$. Dann erfüllt $w := |c|^{1/N} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma/N}$ die Gleichung $w^N = c$. Dasselbe gilt für $w \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi n}{N}}$ mit $n = 0, 1, \ldots, N-1$.
Es bleibt also zu zeigen, dass jede Lösung von $z^N = c$ von dieser Gestalt ist. Wir können außerdem $c \neq 0$ annehmen.
Nach dem Satz können wir schreiben

$$\frac{z}{w} = r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \quad \text{mit } r \in [0, \infty) \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Es ist $r^N \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,N\varphi} = \left(\frac{z}{w}\right)^N = \frac{c}{c} = 1$, also

$$r^N = \left| r^N \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,N\varphi} \right| = 1, \;\text{d.h.} r = 1$$

und damit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,N\varphi} = 1$. Nach Korollar 3.55 ist $N\varphi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\varphi = \frac{2\pi k}{N}$. Wegen $0 \leq \varphi < 2\pi$ ist $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, d.h. $z = wr \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = w \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{N}}$. □

Einschub

Die Cantor-Menge und die Cantor-Funktion

Es sei
$$C_0 := [0,1]\,.$$
Aus C_0 entfernen wir das mittlere Drittelintervall und erhalten
$$C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$
Aus C_1 entfernen wir die beiden mittleren Drittelintervalle und erhalten
$$C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$
So fortfahrend erhalten wir Mengen
$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots$$
Wir definieren die *Cantor-Menge*
$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Satz 3.60.
1. *C ist beschränkt, abgeschlossen und jeder Punkt von C ist ein Häufungspunkt von C.*
2. *C enthält kein (nicht-triviales) Intervall und für jedes $\epsilon > 0$ ist C enthalten in einer endlichen Vereinigung von Intervallen der Gesamtlänge $< \epsilon$.*
3. *C ist überabzählbar.*

Beweis. 1. Wegen $C \subset C_0 = [0,1]$ ist C beschränkt.
Wir haben gesehen, dass $[a,b]$ abgeschlossen ist. Daher folgt die Abgeschlossenheit von C aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3.61. *Eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen und ein (beliebiger) Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

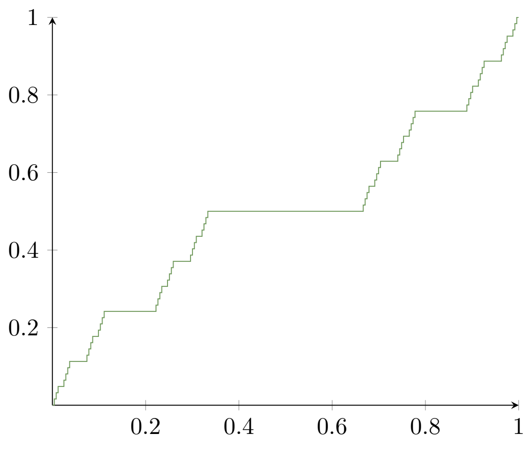
Aus dem ersten Teil folgt dann die Abgeschlossenheit von C_n, aus dem zweiten Teil die Abgeschlossenheit von C.
Bemerkung: Das Lemma gilt nur für endliche Vereinigungen, z.B. ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1\right]}_{\text{abgeschlossen}} = (0,1]$ *nicht* abgeschlossen.

Beweis. 1.) Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen und $A := \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Sei $(x_j) \subset A$ eine Folge mit $x_j \to x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \{1, \ldots, N\}$, so dass unendlich viele x_j in A_{n_0} liegen, d.h. $(x_{j_k}) \subset A_{n_0}$ für eine Teilfolge. Wegen A_{n_0} abgeschlossen, ist $x = \lim_{k\to\infty} x_{j_k} \in A_{n_0} \subset A$.
2.) Seien A_α abgeschlossen und $\bigcap_\alpha A_\alpha$. Sei $(x_j) \subset A$ eine Folge mit $x_j \to x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes α, $(x_j) \subset A_\alpha$, also wegen A_α abgeschlossen $x \in A_\alpha$. Also $x \in \bigcap_\alpha A_\alpha = A$. □

Wir zeigen jetzt, dass jeder Punkt von C ein Häufungspunkt von C ist.
Sei P die Menge aller Randpunkte aller Mengen C_n. Dann ist $P \subset C$. Wir zeigen, dass jeder Punkt in C ein Häufungspunkt von P ist. Ist $x \in C$, so gibt es für jedes n einen Randpunkt p_n von C_n mit $|p_n - x| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. (denn C_n besteht aus Teilintervallen der Länge $\left(\frac{1}{3}\right)^n$). Damit gilt $(p_n) \subset P$ und $p_n \to x$.

2. Sei $\epsilon > 0$ und n so, dass $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \epsilon$. Dann enthält C_n kein Intervall der Länge ϵ. Also enthält auch $C \subset C_n$ kein solches Intervall.
   Ist umgekehrt $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$, so ist C_n erhalten in einer Vereinigung von 2^n Intervallen der Länge $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, also der Gesamtlänge $2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$.

3. Wir zeigen
   $$C = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m} : a_m \in \{0,2\} \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \right\},$$
   d.h. C besteht gerade aus solchen Zahlen, die eine triadische Entwicklung haben, in der die Ziffer 1 nicht vorkommt. Genauer zeigen wir
   $$C_n := \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m} : a_m \in \{0,2\} \text{ für } m \leq n \text{ und } a_m \in \{0,1,2\} \text{ für } m > n \right\}.$$
   Beweis durch Induktion nach n: $n = 0$ ist trivial. Sei jetzt $n \geq 1$. Dann gilt
   $$C_n = \left\{ \frac{x}{3} : x \in C_{n-1} \right\} \cup \left\{ \frac{x+2}{3} : x \in C_{n-1} \right\}$$
   Die Elemente in der ersten Teilmenge haben $a_1 = 0$, die in der zweiten $a_1 = 2$. Die restlichen a_n kommen aus der Induktion.
   Wir definieren jetzt eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die *Cantor-Funktion*.
   Wir definieren zunächst f nur auf C. Ist $x \in C$, so besitzt, wie gezeigt, x eine 3-adische Entwicklung $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m}$ mit $a_m \in \{0,2\}$ und wir definieren
   $$f(x) := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2^m}.$$
   Das ist eine binäre Entwicklung, da $\frac{a_m}{2} \in \{0,1\}$. Das ist wohldefiniert, denn ist $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a'_m}{3^m}$ mit $a'_m \in \{0,1,2\}$ eine andere triadische Entwicklung von x, so gilt (s. Übung) $a_m = a'_m$ für $m < N$ und $a_N = a'_N \pm 1$. Damit ist $a'_N = 1$, d.h. die triadische Entwicklung von $x \in C$ mit Ziffern $x \in \{0,2\}$ ist eindeutig.
   Bsp.: $f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{7}{9}\right) = f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{4}.$



Behauptung: $f(C) = [0,1]$.

Beweis. Klar ist $0 \leq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2^m} \leq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{2^m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} 1$. Ist $y \in [0,1]$, so besitzt y eine binäre Entwicklung $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{2^m}$ mit $b_m \in \{0,1\}$. Mit $a_m := 2b_m$ist dann $x := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m} \in C$ und $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{2^m} = y$.
Als Folgerung der Surjektivität von $f : C \to [0,1]$ und der Überabzählbarkeit von $[0,1]$ erhalten wir die Überabzählbarkeit von C. □

□

Behauptung: $f : C \to [0,1]$ ist monoton wachsend.

Beweis. Sei $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m} = x < x' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a'_m}{3^m}$. Dann gibt es ein maximales K mit $a_m = a'_m$ für $m \leq K-1$. Es ist dann $a_K < a'_K$, denn wäre $a_K \geq a'_K$, so wäre

$$x - x' = \frac{a_K - a'_K}{3^K} + \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{a_m - a'_m}{3^m} \geq \frac{1}{3^K} - \underbrace{\sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{2}{3^m}}_{\substack{= \frac{2}{3^{K+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^l \\ = \frac{2}{3^{K+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^K}}} = 0.$$

Damit ist $a_K = a'_K - 2$, also

$$f(x') - f(x) = \frac{1}{2} \frac{a'_K - a_K}{2^K} + \frac{1}{2} \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{a'_m - a_m}{2^m} \geq \frac{1}{2} \frac{2}{2^K} - \frac{1}{2} \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{2}{2^m} \overset{\text{vgl. o.}}{=} 0.$$

□

Wir setzten f jetzt auf $[0,1]$ fort durch

$$f(x) := \sup\{f(y) : y \in C \cap [0,x]\} \text{ für } y \in [0,1] \setminus C$$

Nach Definition ist f monoton wachsend.

Bemerkung: f ist stetig.

Beweis. Denn als monotone Funktion hat f links- und rechtsseitige Grenzwerte. Würden diese nicht übereinstimmen, so wäre dass Bild von f nicht $[0,1]$. □

4 Differentiation

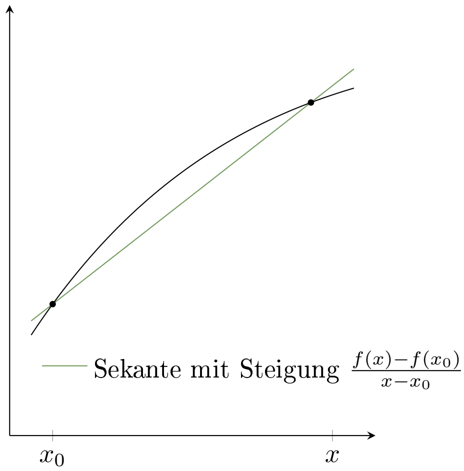
4.1 Ableitung

Definition 4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann heißt f *differenzierbar* in $x_0 \in D$, wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist und der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser heißt die *Ableitung* von f an x_0. Alternative Bezeichnung: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Geometrische Interpretation:



Bemerkung: Eine Funktion f ist in x_0 differenzierbar genau dann, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + c\,(x - x_0)}_{\text{affin-lineare Approximation}} + \varphi(x) \text{ für } x \in D \text{ und } \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Es ist dann $c = f'(x_0)$.
Insbesondere sieht man, dass aus „f differenzierbar in x_0" „f stetig in x_0" folgt. Die Umkehrung gilt aber nicht.

Wichtige Ableitungen:

Die folgenden Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar und es gilt:

1. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_0,$ $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{cx}, c \in \mathbb{R},$ $\quad f'(x) = c\,\mathrm{e}^{cx}$
3. $f(x) = \ln x,$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \cos x,$ $\quad f'(x) = -\sin x$
5. $f(x) = \sin x,$ $\quad f'(x) = \cos x$

Beweis. 1. $\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}}_{n \text{ Terme, jeder}\to x_0^{n-1} \text{ für } x\to x_0} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}$

2. $\frac{\mathrm{e}^{cx}-\mathrm{e}^{cx_0}}{x-x_0} = c\,\mathrm{e}^{cx_0}\frac{\mathrm{e}^{c(x-x_0)}-1}{c(x-x_0)} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} c\,\mathrm{e}^{cx_0}$ (da $\frac{\mathrm{e}^y-1}{y} \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, s.o.)

3. $\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0} = \frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{x_0}\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{x_0}$ (da $\frac{\ln(1+y)}{y} \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, s.o.)

4. $\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0} = -\sin\frac{x+x_0}{2}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\sin x_0$ (da $\frac{\sin y}{y} \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, s.o.)

5. wie 4.

□

Beispiel 4.2. Sei $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f nicht in 0 differenzierbar. Denn für $x_n = (-1)^n\frac{1}{n}$ ist $x_n \to 0$, aber $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{n}} = (-1)^n$ konvergiert nicht.

Rechenregeln

Proposition 4.3. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen. Dann sind $f+g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) && \textit{Produktregel} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} && \textit{Quotientenregel} \end{aligned}$$

Beweis. (Produktregel)

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\substack{\to g(x_0),\\ \text{da } g \text{ stetig in } x_0}} + f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

□

Beispiel 4.4. 1. Jede rationale Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar.

2. $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ $\left(\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}\right)$

Proposition 4.5. *Seien $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei f in $x_0 \in D$ differenzierbar und g in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \qquad \text{Kettenregel}$$

Beweis. Sei $y_0 := f(x_0)$ und sei $h : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \in E \setminus \{y_0\}, \\ g\prime(y_0) & \text{für } y = y_0. \end{cases}$$

Wegen g differenzierbar in y_0 ist h stetig in y_0.

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \underbrace{h(f(x))}_{\substack{\to h(f(x_0)) \\ = g'(f(x_0)), \\ \text{da } f \text{ stetig in } x_0 \\ \text{und } h \text{ stetig in } y_0}} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\to f'(x_0), \\ \text{da } f \text{ differenzierbar} \\ \text{in } x_0}} \to g'(f(x_0)) f'(x_0) \end{aligned}$$

□

Proposition 4.6. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dass aus mehr als einem Punkt besteht. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion, die in einem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Sei $y_0 := f(x_0)$ und sei $(y_n) \subset f(I) \setminus \{y_0\}$ eine Folge mit $y_n \to y_0$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$. Wie bereits bewiesen, ist f^{-1} stetig und daher ist $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Weil f streng monoton ist, ist $x_n \neq x_0$ für alle n. Damit ist

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} \longrightarrow (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

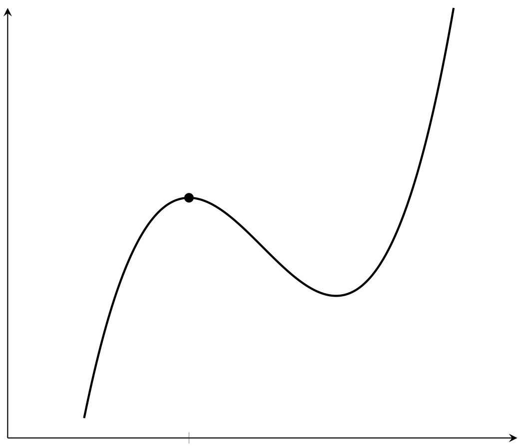
□

Beispiel 4.7.

1. $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
   (Denn mit $f = \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist $\arctan'(\tan x_0) = \cos^2 x_0$ und $\frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0$.)
2. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$.

4.2 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

Definition 4.8. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $\geq$). Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder Minimum.



Proposition 4.9. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei dort differenzierbar. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall eines lokalen Maximums. Nach Voraussetzung gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$ und $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Daher ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \epsilon) \\ \geq 0 & \text{für } x \in (x_0 - \epsilon, x_0) \end{cases}$$

Wegen f differenzierbar in x_0 ist $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und es ist

$$\underbrace{\lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0}}_{\geq 0} \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$$

□

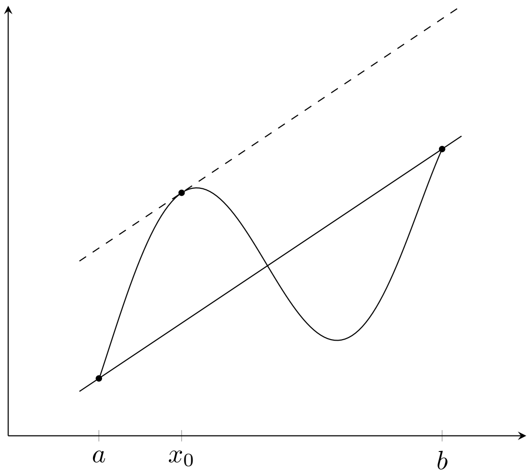
Bemerkung:

1. $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für ein lokales Extremum. Z.B. $f(x) = x^3$ hat $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokales Extremum (falls 0 im Inneren des Definitionsbereiches).
2. Liegt ein lokales Extremum am Rand von I muss dort nicht $f'(x_0) = 0$ gelten. Z.B. $f(x) = x$ hat lokale Extrema a und b im Intervall $I = [a, b]$, aber dort verschwindet f'nicht.

Definition 4.10. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einer Menge $E \subset D$, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Satz 4.11. (Mittelwertsatz) *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$



Verallgemeinerung:

Satz 4.12. *Sei $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in (a, b) differenzierbar sind. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0).$$

Der Mittelwertsatz oben entspricht genau dem Fall $g(x) = x$.

Beweis. Sei $h(x) := (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$. Dann ist h stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Es ist zu zeigen, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ gibt mit $h'(x_0) = 0$. Ist h konstant, so ist das klar. Andernfalls gibt es ein $x_1 \in (a, b)$ mit $h(x_1) \neq h(a)$. Ist $h(x_1) > h(a)$, so nimmt h als stetige Funktion auf $[a, b]$ in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ sein (globales) Maximum an. Es ist $x_0 \neq a$ (wegen $h(x_1) > h(a)$) und $x_0 \neq b$ (wegen $h(b) = h(a) < h(x_1)$), also ist $x_0 \in (a, b)$. Nach Proposition 4.9 ist $h'(x_0) = 0$. Ist $h(x_1) < h(a)$, so argumentiert man entsprechend mit einem (globalen) Minimum statt Maximum.

□

Korollar 4.13. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

1. *Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.*
2. *Gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton wachsend (bzw. fallend).*
3. *Gilt $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

Beweis. Für $a < x_1 < x_2 < b$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $x_1 < x < x_2$mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1).$$

Daraus folgt das Korollar. □

Bemerkung:

1. Ist f monoton wachsend (bzw. fallend) und differenzierbar, so ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ (bzw. $\leq$). (Folgt sofort aus der Definition von f'.)

2. Ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend) und differenzierbar, so gilt *nicht* notwendigerweise $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ (bzw. $<$). Z.B. ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Satz 4.14. (L'Hospitalsche Regel) *Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es existiere der Grenzwert*

$$C := \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

und es gelte

$$\text{entweder } \lim_{x \nearrow b} g(x) = \lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty.$$

Dann gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ genügend nahe an b und es ist

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Entsprechende Aussage bei $x \searrow a$.

Einfach, falls $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$ und $\lim_{x \nearrow b} f'(x)$ und $\lim_{x \nearrow b} g'(x)$ existieren.

Beispiel 4.15. $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ (wegen Restgliedabschätzung). Mit L'Hospital:

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1, g(x) = x : \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\mathrm{e}^x}{1} \to 1.$$

Beispiel 4.16. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}, \qquad \begin{aligned} & f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = x \sin x \\ & f'(x) = 1 - \cos x, g'(x) = \sin x + x \cos x \\ & \text{Existiert } \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\text{? unklar, wieder „}\frac{0}{0}\text{“} \\ & f''(x) = \sin x, \quad g''(x) = 2 \cos x - x \sin x \\ & \text{Existiert } \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}\text{? Ja! } \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen, dass es im Fall $-\infty \leq C < \infty$ für jedes $C' \in \mathbb{R}$ mit $C' > C$ ein $c \in (a,b)$ gibt, so dass für alle $x \in (c,b)$ gilt $\frac{f(x)}{g(x)} < C'$.

Entsprechend kann man zeigen, dass es im Fall $-\infty < C \leq +\infty$ für jedes $C' \in \mathbb{R}$ mit $C' < C$ ein $c \in (a,b)$ gibt, so dass für alle $x \in (c,b)$ gilt $\frac{f(x)}{g(x)} > C'$.

Diese beiden Aussagen zusammen implizieren die Behauptung.

Sei jetzt also $C' \in \mathbb{R}$ mit $C' > C$. Wähle $C'' \in (C, C')$. Nach Voraussetzung gibt es ein $c_1 \in [a,b)$ mit $\frac{f'(x)}{g'(x)} < C''$ für alle $c_1 < x < b$. $(*)$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es für alle $c_1 < x < y < b$ ein $x_0 \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \overset{(*)}{<} C'' \qquad (**)$$

Im Fall, dass $\lim_{x\nearrow b} f(x) = \lim_{x\nearrow b} g(x) = 0$, können wir in $(**)$ $y \nearrow b$ gehen lassen und erhalten $\frac{f(x)}{g(x)} \leq C''$. Wegen $C'' < C'$ ist das die Behauptung.
Es gelte jetzt $\lim_{x\nearrow b} g(x) = \pm\infty$. Für festes $x \in (c_1, b)$ wählen wir ein $c_2 \in [c_1, b)$, so dass für $y \in (c_2, b)$ gilt $\pm g(y) > \pm g(x)$ und $\pm g(y) > 0$. Indem wir $(**)$ mit $\frac{g(y)-g(x)}{g(y)} > 0$ multiplizieren, erhalten wir für $c_2 < x < y < b$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)} \leq C'' \frac{g(y)-g(x)}{g(y)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(y)}{g(y)} < C'' - C''\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}$$

Für $y \nearrow b$ konvergiert die rechte Seite gegen C''. Wegen $C'' < C'$ gibt es also ein $c_3 \in [c_2, b)$, so dass für $c_3 < y < b$ gilt $C'' - C''\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} < C'$, daher gilt für solche y auch $\frac{f(y)}{g(y)} < C'$, wie behauptet. □

4.3 Ableitungen höherer Ordnung

Definition 4.17. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in $E \subset D$ differenzierbar, Falls die Ableitung $f' : E \to \mathbb{R}$ ihrerseits in einem Punkt $x_0 \in E$ differenzierbar ist, so heißt

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die zweite Ableitung von f in x_0. Andere Bezeichnung: $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$.
Analog definiert man höhere Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$.

Beispiel 4.18. Sei $n \in \mathbb{N}$. Durch Induktion zeigt man, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ in jedem Punkt beliebig oft differenzierbar ist mit

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

Definition 4.19. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_0 \in D$ ein *strenges* (oder striktes) *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x_0 \in D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $>$).

Proposition 4.20. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 zweimal differenzierbar mit $f'(x_0)$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $>$). Dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. Minimum).*

Bemerkung: Die Bedingungen in der Proposition sind hinreichend, aber nicht notwendig für ein strenges lokales Extremum. Z.B. hat $f(x) = x^4$ in $x = 0$ ein strenges lokales Minimum, aber es ist $f''(0) = 0$.

Beweis. Sei $f''(x_0) > 0$ (sonst betrachte $-f$). Wegen $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f'' > 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ für alle $0 < |x - x_0| < \epsilon$.
Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt daraus

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \epsilon) \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \epsilon, x_0)\,.$$

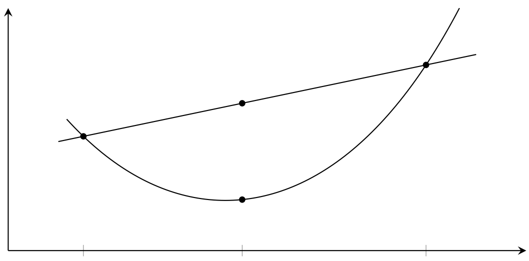
Nach Korollar 4.13 ist daher f in $[x_0, x_0 + \epsilon]$ streng monoton wachsend und in $[x_0 - \epsilon, x_0]$ streng monoton fallend. Also hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum. □

Konvexität

Definition 4.21. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* (bzw. *konkav*), wenn für alle $x_0, x_1 \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f\left((1-\lambda)\,x_0 + \lambda x_1\right) \leq (1-\lambda)\,f(x_0) + \lambda f(x_1) \qquad (\text{bzw. } \geq).$$

Ist die Ungleichung strikt für $x_0 \neq x_1$ und $\lambda \in (0,1)$, so heißt f *streng konvex* (bzw. *konkav*).



Geometrisch wird auch deutlich, dass konvex≙linksgekrümmt, konkav≙rechtsgekrümmt. Außerdem gilt f konvex $\Leftrightarrow -f$ konkav.

Satz 4.22. *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann existieren für alle $x_0 \in I$ die beiden Grenzwerte $(D^\pm f)(x) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{f(x_0 \pm \epsilon) - f(x_0)}{\pm\epsilon}$ und es gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$*

$$\left(D^- f\right)(x) \leq \left(D^+ f\right)(x) \leq \left(D^- f\right)(y) \leq \left(D^+ f\right)(y).$$

Korollar 4.23. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig und $\{x_0 \in I : f \text{ ist nicht differenzierbar in } x_0\}$ ist abzählbar.*

Beweis. Aus der Existenz von $D^{\pm}f(x_0)$ folgt $\lim_{\epsilon\searrow 0} f(x_0 \pm \epsilon) = f(x_0)$, also ist f stetig in x_0.

- Sei $-\infty < a < b < \infty$ mit $[a,b] \subset I$ und für $\epsilon > 0$ sei

$$E_\epsilon := \left\{x \in [a,b] : D^+ f(x) - D^- f(x) \geq \epsilon\right\}.$$

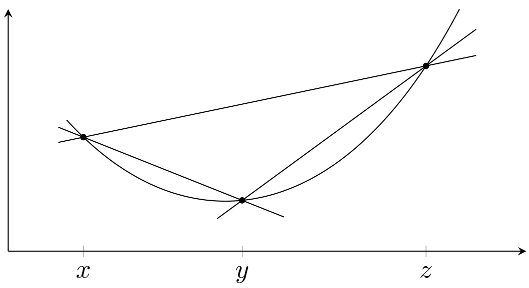
  Für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E_\epsilon$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ gilt

$$\begin{aligned} D^+ f(b) &\geq D^+ f(x_m) \geq D^- f(x_m) + \epsilon \geq D^+ f(x_{m-1}) + \epsilon \geq D^- f(x_{m-1}) + 2\epsilon \geq \ldots \\ &\geq D^- f(x_1) + m\epsilon \geq D^- f(a) + m\epsilon \\ \Rightarrow m &\leq \frac{1}{\epsilon}\left(D^+ f(b) - D^- f(a)\right), \text{ d.h. } E_\epsilon \text{ ist endlich.} \\ &\Rightarrow \left\{x \in [a,b] : D^+ f(x) - D^- f(x) > 0\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{E_{\frac{1}{n}}}_{\text{endlich}} \quad \text{ist abzählbar.} \end{aligned}$$

Indem wir I als abzählbare Vereinigung von Menge $[a_n, b_n]$ schreibt, erhält man die Behauptung. □

Lemma 4.24. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y < z$*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$



Beweis. Die Definition von konvex mit $\lambda = \frac{y-x}{z-x} \in (0,1)$ gibt

$$f(y) = f\left(\frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z\right) = f\left(\left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right)x + \frac{y-x}{z-x}z\right) \leq \left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right)f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z)$$

$$\Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{z-x}\left(f(z) - f(x)\right); \text{ das ist die linke Ungleichung.}$$

Die rechte wird ebenso bewiesen. □

Beweis. (Satz) Sei $x_0 \in I$. Für alle $\epsilon > 0$ mit $x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \in I$ sei

$$\left(D_\epsilon^{\pm} f\right)(x_0) := \frac{f(x_0 \pm \epsilon) - f(x_0)}{\pm\epsilon}.$$

Nach Lemma 4.24 ist:

1. $\pm\left(D_{\epsilon_1}^{\pm} f\right)(x_0) \leq \pm\left(D_{\epsilon_2}^{\pm} f\right)(x_0)$ für alle $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$
2. $\left(D_\epsilon^- f\right)(x_0) \leq \left(D_{\tilde\epsilon}^+ f\right)(x_0)$ für alle $0 < \epsilon, \tilde\epsilon$
3. $\left(D_\epsilon^+ f\right)(x_0) \leq \left(D_\epsilon^- f\right)(y_0)$ für $x_0 < y_0$ und $\epsilon \leq y_0 - x_0$

Wegen 1. ist $\epsilon \mapsto \left(D_\epsilon^{\pm} f\right)(x_0)$ monoton und wegen 2. ist es beschränkt. Also existieren $\left(D^{\pm} f\right)(x_0) := \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(D_\epsilon^{\pm} f\right)(x_0)$.
Aus 2. folgt $\left(D^- f\right)(x_0) \leq \left(D^+ f\right)(x_0)$, und aus 3. folgt $\left(D^+ f\right)(x_0) \leq \left(D^- f\right)(y_0)$. □

Satz 4.25. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn f' monoton wachsend ist und f ist streng konvex genau dann, wenn f' streng monoton wachsend ist.*

Beweis. „⇒“ Nach Satz 4.22 sind $D^{\pm}f$ monoton wachsend und nach Voraussetzung ist $D^+f = D^-f = f'$. Aussage für streng konvex als Übung.

„⇐“ Ist f' monoton wachsend und sind $x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$ und $\lambda \in (0,1)$, so gibt es für $x_\lambda := (1-\lambda)\, x_0 + \lambda x_1$ nach dem Mittelwertsatz $\xi_0 \in (x_0, x_\lambda)\,, \xi_1 \in (x_\lambda, x_0)$ mit

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} = f'(\xi_0)\,, \quad \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda} = f'(\xi_1)\\
\Rightarrow &\underbrace{\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0}}_{\frac{f(x_\lambda)-f(x_0)}{\lambda(x_1-x_0)}} = f'(\xi_0) \le f'(\xi_1) = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}}_{=\frac{f(x_1)-f(x_\lambda)}{(1-\lambda)(x_1-x_0)}}\\
\Rightarrow &\frac{1}{\lambda}\left(f(x_\lambda) - f(x_0)\right) \le \frac{1}{1-\lambda}\left(f(x_1) - f(x_\lambda)\right)\\
\Leftrightarrow &f(x_\lambda) \le (1-\lambda)\, f(x_0) + \lambda f(x_1)\,.
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.26. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:*

1. *f ist konvex genau dann, wenn $f'' \ge 0$, d.h. $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$.*
2. *Ist $f'' > 0$, so ist f streng konvex.*

Beweis. Kombiniere Satz 4.25 mit Satz 4.25 und der darauffolgenden Bemerkung. □

Bemerkung: Für eine streng konvexe Funktion f kann $f''(x_0) = 0$ gelten (Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$, $f''(0) = 0$.)

Beispiel 4.27. exp ist konvex, ln ist konkav und $(0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$ ist konvex $\Leftrightarrow \alpha \le 0$ oder $\alpha \ge 1$ und konkav $\Leftrightarrow 0 \le \alpha \le 1$.

5 Integration

5.1 Das Riemannsche Integral

Seien $-\infty < a < b < +\infty$. Erinnerung: *Treppenfunktion* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$N \in \mathbb{N}, \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < b, \qquad c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R},$$

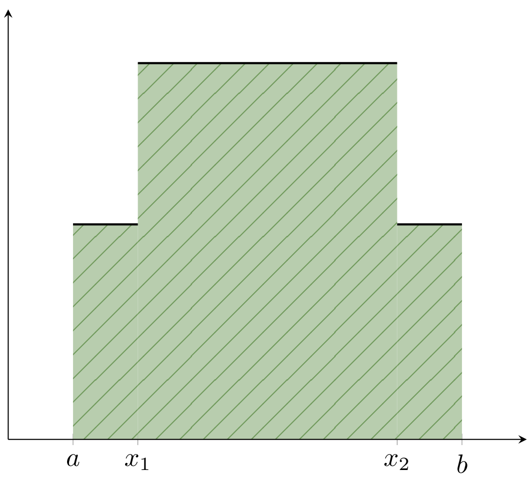
so dass $\varphi(x) = c_n$ für $x \in (c_{n-1}, c_n)$, $n = 1, \ldots, N$.

Klar ist ein skalares Vielfaches einer Treppenfunktion ist eine Treppenfunktion und außerdem ist die Summe von Treppenfunktionen eine Treppenfunktion ($\rightsquigarrow$ gemeinsame Verfeinerung).

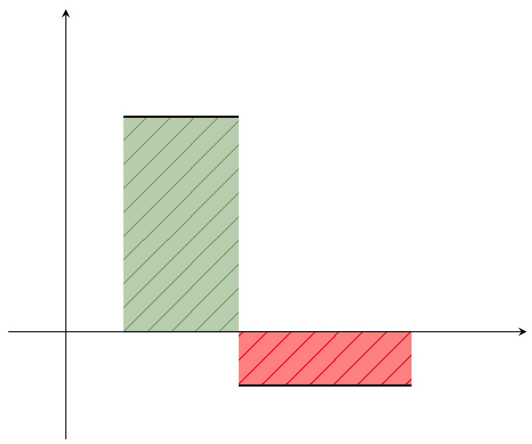
Das *Integral* einer Treppenfunktion wie oben ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{n=1}^{N} c_n\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Geometrische Interpretation:



Falls alle $c_n \geq 0$: Summe der Flächeninhalte der Rechtecke.



Im Falle von $c_n < 0$ für einige n, werden die entsprechenden Flächeninhalte negativ eingebracht.

Bemerkung:

- Man sieht einfach, dass die Definition des Integrals nur von φ und nicht von den Stützpunkten x_n abhängt. ($\rightsquigarrow$ gemeinsame Verfeinerung)
- Sind $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b (\lambda\varphi)(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b (\varphi + \psi)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \text{Linearität}$$

  Ist außerdem $\varphi \leq \psi$, so ist

$$\left.\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x. \quad\right\} \text{Monotonie}$$

Definition 5.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \text{ Treppenfunktion}, \varphi \geq f \right\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \text{ Treppenfunktion}, \varphi \leq f \right\}.$$

Gilt $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, so heißt f *Riemann-integrierbar* und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung:

1. Das ist wohldefiniert, denn für jede Treppenfunktion ist

$$\overline{\int_a^b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{wie oben def.}} = \underline{\int_a^b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Es gilt stets $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Dann gilt $\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und $\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, also ist f nicht Riemann-integrierbar.
4. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon$.

Satz 5.2. *1. Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.*

2. Jede monotone Funktion ist Riemann-integrierbar.

Beweis. 1. Früher haben wir aus der gleichmäßigen Stetigkeit für jedes $\epsilon > 0$ die Existenz von Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ hergeleitet mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. Daraus folgt wegen Linearität und Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen, dass

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \epsilon.$$

Also nach Bemerkung 4. oben ist f Riemann-integrierbar.

2. Sei z.B. f monoton wachsend und $N \in \mathbb{N}$. Setze $x_n = a + \frac{b-a}{N} n,\ n = 0, \dots, N$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{n-1}) \\ \psi(x) &:= f(x_n) \end{aligned} \quad \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n) \text{ und } \varphi(b) := \psi(b) := f(b).$$

Wegen Monotonie von f ist dann $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^N f(x_n) \frac{b-a}{N} - \sum_{n=1}^N f(x_{n-1}) \frac{b-a}{N} \\ &= \frac{b-a}{N} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N f(x_n) - \sum_{n=1}^N f(x_{n-1}) \right)}_{=f(x_N)-f(x_0)=f(b)-f(a)} \\ &= \frac{b-a}{N} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Für $N > \frac{1}{\epsilon}(b-a)(f(b)-f(a))$ ist das $< \epsilon$.

□

Proposition 5.3. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$ und λf Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \textit{Linearität}$$

Ist $f \leq g$, so ist

$$\left.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \quad\right\} \textit{Monotonie}$$

Beweis. Der ersten Aussage: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, so dass $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1, \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und $\int_a^b \psi_j(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_j(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2}$, $j = 1, 2$.
Damit ist $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ und

$$\begin{aligned} &\int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\left(\int_a^b \psi_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left(\int_a^b \psi_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{<\frac{\epsilon}{2}} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $f+g$ Riemann-integrierbar. Außerdem folgt

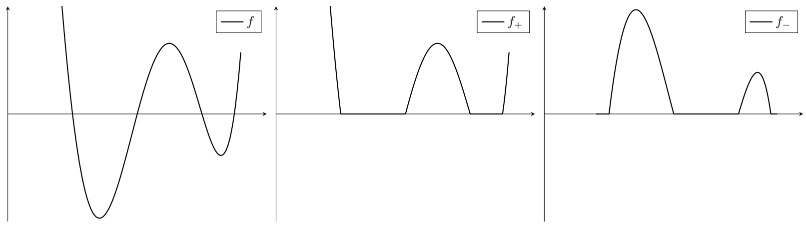
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b (\psi_1+\psi_2)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Und entsprechend $> -\epsilon$. Daraus folgt die erste Behauptung. □

Definition 5.4. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir zwei Funktionen $f_\pm : D \to \mathbb{R}$,

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.



Proposition 5.5. *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

1. *Die Funktionen $f_+, f_-, |f|$ sind Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
2. *Für jedes $p \in [1,\infty)$ ist die Funktion $|f|^p$ Riemann-integrierbar.*
3. *Die Funktion fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. 1. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon$. Dann sind ψ_+ und φ_+ Treppenfunktionen und es gilt $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$. Außerdem ist $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$ ($\Leftrightarrow 0 \leq -\psi_- + \varphi_- \Leftrightarrow \psi_- \leq \varphi_-$), also $\int_a^b (\psi_+ - \varphi_+)(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon$. Damit ist f_+ Riemann-integrierbar. f_-ebenso (betrachte $-f$: $(-f)_+ = f_-$), also auch $|f| = f_+ + f_-$.
Wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt aus der Monotonie des Integrals die behauptete Ungleichung.

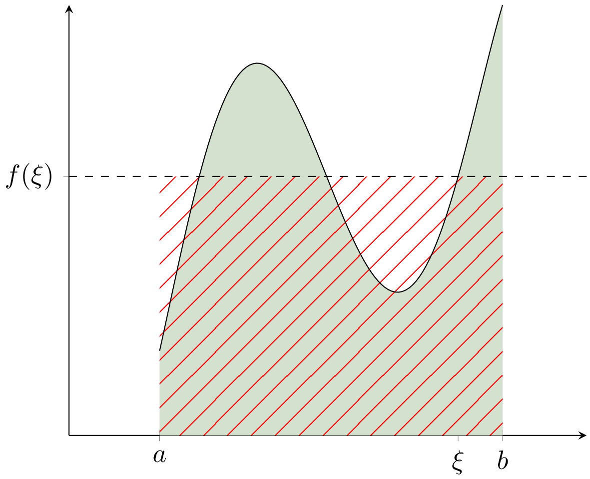
2. Wegen 1. genügt es den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. o.B.d.A. $f \neq 0$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen φ, ψ mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M$ und $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{pM^{p-1}}$ mit $M := \sup f$. (Ersetze φ und ψ durch φ_+ und $\min\{\psi, M\}$.) Dann sind φ^p und ψ^p Treppenfunktionen und $\varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$. Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^p = px^{p-1}$ folgt aus dem Mittelwertsatz
$$\psi^p - \varphi^p \leq pM^{p-1}(\psi - \varphi)$$
und damit
$$\int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x)\,\mathrm{d}x \leq pM^{p-1}\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon.$$

3. $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$. Nach 2. sind $(f+g)^2$ und $(f-g)^2$ Riemann-integrierbar.

□

Satz 5.6. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, Riemann-integrierbare und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$



Insbesondere $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Beweis. Nach dem vorherigen Satz ist fw Riemann-integrierbar. Außerdem ist $mw \leq fw \leq Mw$ mit $m := \inf f$ und $M := \sup f$, also

$$m\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b (fw)(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x,$$

also $\int_a^b (fw)(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x$ für ein $\mu \in [m,M]$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. □

Bezeichnung: Sei $f : D \to \mathbb{R}, E \subset D$. Definiere $f|_E : E \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Bemerkung: Seien $a < c < b$ und $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f Riemann-integrierbar genau dann, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind und es ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bezeichnung:

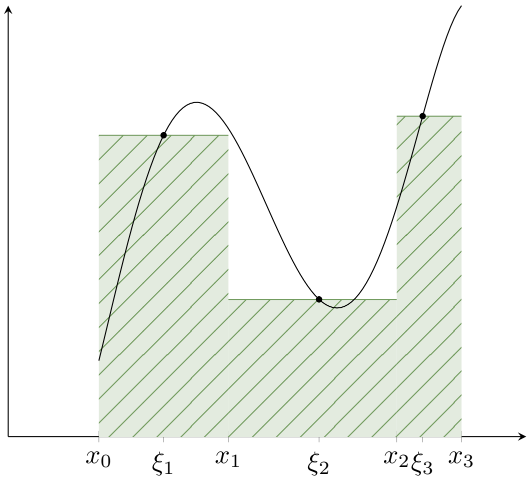
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0, \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir betrachten Tupel $Z = \left((x_n)_{n=0,\dots,N}, (\xi_n)_{n=1,\dots,N}\right)$ mit $N \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ und $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ für $n = 1,\dots,N$. Es sei

$$\mu(z) := \max_{n=1,\dots,N}(x_n - x_{n-1}).$$

Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$S_Z(f) := \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \qquad \textit{Riemann-Summe.}$$



Proposition 5.7. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes Z mit $\mu(Z) < \delta$ gilt*

$$\left| S_Z(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \epsilon.$$

Beweis. Es genügt, denn Satz für Treppenfunktionen zu beweisen.
Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = b$ die „Unterteilung" der Treppenfunktion f.
Sei Z wie oben und definiere eine Treppenfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := f(\xi_n), x \in (x_{n-1}, x_n]$ und $F(a) := f(a)$. Dann ist $S_Z(f) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$, also

$$\left| S_Z(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b (F(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |F(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Wenn ein Teilintervall $[x_{n-1}, x_n]$ keinen der Punkte t_m enthält, so stimmen f und F auf (x_{n-1}, x_n) überein. Also ist $F - f$ auf höchsten $2M$ Teilintervallen (x_{n-1}, x_n) von Null verschieden. Die Gesamtlänge dieser Intervalle ist $\le 2M\mu(Z)$, und es gilt dort $|F(x) - f(x)| \le 2\sigma$ mit $\sigma := \sup |f|$.

$$\Rightarrow \int_a^b |F(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le 2M\mu(Z) \cdot 2\sigma$$

Für $\mu(Z) < \frac{\epsilon}{4\sigma M} =: \delta$ ist das $< \epsilon$. □

Beispiel 5.8. $\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$.
Betrachte $Z = \left((x_n)_{n=0,\ldots,N}, (\xi_n)_{n=1,\ldots,N} \right)$ mit $x_n = \frac{na}{N}, \xi_n = x_n$. Dann ist $\mu(Z) = \frac{a}{N}$ und

$$S_Z(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{na}{N} \cdot \frac{a}{N} = \frac{a^2}{N^2} \sum_{n=1}^{N} n = \frac{a^2}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) \to \frac{a^2}{2} \text{ für } N \to \infty.$$

5.2 Integration und Differentiation

Satz 5.9. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei*

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [a,b]\,.$$

Dann ist F stetig und, falls f in $x_0 \in [a,b]$ stetig ist, so ist F dort differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis. Als Riemann-integrierbare Funktion ist f beschränkt, also $M := \sup|f| < \infty$. Für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ist

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq M(x_2 - x_1)\,.$$

Für $\epsilon > 0$ und $|x_2 - x_1| < \frac{\epsilon}{M}$ ist also $|F(x_2) - F(x_1)| < \epsilon$, d.h. F ist (gleichmäßig) stetig.
Ist f in x_0 stetig, so gibt es für gegebenes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $y \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$. Also ist für $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(y) - f(x_0))\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(y) - f(x_0)|}_{<\epsilon}\,\mathrm{d}y\right| < \epsilon,\end{aligned}$$

d.h. $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$ für $x \to x_0$. □

Satz 5.10. (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und F' Riemann-integrierbar. Dann ist*

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Notation $F|_a^b := F(x)|_{x=a}^b := F(b) - F(a)$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Proposition 5.7 oben gibt es ein $\delta > 0$, so dass für Z mit $\mu(Z) < \delta$ gilt $\left|S_Z(F') - \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon$. Seien $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ Punkte mit $\max\limits_{n=1,\ldots,N}(x_n - x_{n-1}) < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ mit

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\,, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Dann ist $Z := ((x_n), (\xi_n))$

$$S_Z(F') = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})}_{=F(x_n)-F(x_{n-1})} = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Also ist

$$\left|(F(b) - F(a)) - \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|S_Z(F') - \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon.$$

□

Definition 5.11. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt $F : I \to \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$.

Bemerkung:

1. Nach dem ersten Satz besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion.
2. Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ und damit, wie oben gezeigt, $F - G =$const. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f und c eine Konstante, so ist $F + c$ auch eine Stammfunktion von f.
3. Die Formel im letzten Satz kann man schreiben als
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ mit einer Stammfunktion } F \text{ von } f.$$

Beispiel 5.12. Es gilt
$$\int_a^b x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \ln \frac{b}{a} & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$$
und $0 < a \leq b < \infty$. Für $\alpha \geq 0$ ist $a = 0$ zugelassen und für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ auch $-\infty < a \leq b < \infty$. (Denn $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha \\ \ln x \end{cases}$ ist differenzierbar mit $F'(x) = x^\alpha$.)

Satz 5.13. (Substitutionsregel) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit φ' Riemann-integrierbar und $\varphi([a, b]) \subset D$. Dann ist*
$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Schreibweise: $x = \varphi(t),\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Beweis. Wie früher gezeigt ist $J := \varphi([a, b])$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall. Sei $A := \inf J$ und $F(x) := \int_A^x f(y)\,\mathrm{d}y$. Dann ist, wie oben gezeigt, F differenzierbar mit $F' = f$. Also ist nach der Kettenregel $F \circ \varphi$ differenzierbar mit $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\,\varphi'$, also nach dem Fundamentalsatz
$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F \cdot \varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$
□

Beispiel 5.14.
1. $\int_a^b f(x + c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y.$
2. $\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(y)\,\mathrm{d}y.$
3. Ist φ differenzierbar mit φ' Riemann-integrierbar und $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist
$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right| \qquad \text{(wende Satz an auf } f(x) = \frac{1}{x}\text{.)}$$

z.B. $\int_a^b \tan t \,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\ln\left|\frac{\cos(b)}{\cos(a)}\right|$.

4. $\int_a^b \frac{Dx+E}{x^2+2Bx+C}\,\mathrm{d}x$ mit konstanten $B, C, D, E \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir erhalten für das Integral:

$$\frac{D}{2}\int_a^b \frac{2x+2B}{x^2+2Bx+C}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{E-BD}{x^2+2Bx+C}\,\mathrm{d}x = \frac{D}{2}\ln\left|x^2+2Bx+C\right|\Big|_a^b + \int_a^b \frac{E-BD}{(x+B)^2+(C-B^2)}\,\mathrm{d}x$$

Fall $C > B^2$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+B)^2+(C-B^2)} = \frac{1}{C-B^2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+B}{\sqrt{C-B^2}}\right)^2+1} \overset{1.,2.}{=} \frac{1}{\sqrt{C-B^2}}\arctan\frac{x+B}{\sqrt{C-B^2}}\Big|_a^b$$

Fall $C = B^2$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+B)^2} = -\frac{1}{x+B}\Big|_a^b \qquad \text{falls } [a,b] \text{ nicht } -B \text{ enthält}$$

Fall $C < B^2$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+B)^2+(C-B^2)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Partialbruch-}\\ \text{zerlegung}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{B^2-C}}\int_a^b\left(\frac{1}{x+B-\sqrt{B^2-C}} - \frac{1}{x+B+\sqrt{B^2-C}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{falls } [a,b]\\ \text{weder } -B\pm\sqrt{B^2-C}\\ \text{enthält}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{B^2-C}}\ln\left|\frac{x+b-\sqrt{B^2-C}}{x+B+\sqrt{B^2-C}}\right|\Bigg|_a^b$$

Satz 5.15. (Partielle Integration) *Seien $F, G : [a, b \to \mathbb{R}]$ differenzierbar mit F', G' Riemann-integrierbar. Dann ist*

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,\mathrm{d}x = FG|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. $H := FG$ ist differenzierbar mit $H' = F'G + G'F$, was Riemann-integrierbar ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Fundamentalsatz. □

Beispiel 5.16. 1. $\displaystyle\int_a^b x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1}\left((\alpha+1)\ln x - 1\right)\Big|_a^b & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_a^b & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases}$

(Denn für $\alpha \neq -1$ ist

$$\int_a^b \underbrace{x^\alpha}_{=\frac{1}{\alpha+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\alpha+1}} \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha \ln x\Big|_a^b - \frac{1}{\alpha+1}\int_a^b x^{\alpha+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.)$$

2. $I_n := \int_a^b x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$.

$$I_n := \int_a^b x^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^n\,\mathrm{e}^x|_a^b - n\underbrace{\int_a^b x^{n-1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}_{=I_{n-1}}$$

Damit kann I_n rekursiv auf $I_0 = \int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x|_a^b$ zurückgeführt werden.

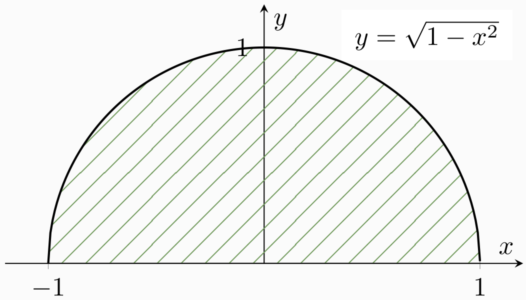
3. Sei $-1 < a \leq b < 1$.

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b + \int_a^b \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\Big|_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_a^b \text{ bleibt gültig für } -1 = a \text{ und/oder } b = 1$$

Naiv interpretieren wir $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$ als den Flächeninhalt des Halbkreises mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.



4. $I_m := \int_a^b \sin^m x\,\mathrm{d}x$. Für $m \geq 2$

$$I_m = -\int_a^b \sin^{m-1} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\,\mathrm{d}x = -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_a^b + (m-1)\int_a^b \sin^{m-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_a^b + (m-1)\left(I_{m-2} - I_m\right)$$

$$\Rightarrow I_m = -\frac{1}{m}\cos x\sin^{m-1} x\Big|_a^b + \frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

Wegen $I_0 = 1\big|_a^b, I_1 = -\cos x\big|_a^b$ erhalten wir Formeln für I_m.
Spezialfall $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$. Dann ist $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$ und $I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}$.

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$$

Wallis'sche Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

Beweis. Aus obiger Formel folgt $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$ für $n \to \infty$.
Wegen $\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$ für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$ und es folgt auch $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \to 1$ für $n \to \infty$. Nach obiger Formel ist

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n}{2n-1}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\cdot\frac{2}{\pi}$$

□

5.3 Uneigentliche Integrale

Definition 5.17. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten a, b mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ mit $[\alpha, \beta] \subset I$ die Funktion $f|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integrierbar ist.

1. Ist $a \in \mathbb{R}, I = [a, b)$ und existiert
$$\lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$
so heißt das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent.*
2. Analog im Fall $b \in \mathbb{R}, I = (a, b]$.
3. Ist $I = (a, b)$ und sind für ein $c \in (a, b)$ (und damit jedes $c \in (a, b)$) beide Integrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, so heißt das Integral
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
konvergent.

Beispiel 5.18.

1. Für $s > 0$ und $0 < \alpha < \beta < \infty$ ist $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_\alpha^\beta & \text{für } s \neq 1 \\ \ln x|_\alpha^\beta & \text{für } s = 1 \end{cases}$.
Für $a > 0$ konvergiert $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ genau dann, wenn $s > 1$, und es ist $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{a^{s-1}}$.
Für $b < \infty$ konvergiert $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ genau dann, wenn $s < 1$ und es ist $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{1-s} b^{1-s}$.
2. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}$ für $c > 0$.
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.

Proposition 5.19. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f|_{[\alpha,\beta]}, g|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integrierbar sind für alle $-\infty < a < b < +\infty$ mit $[\alpha, \beta] \subset I$.*

1. *Ist $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent, so auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*
2. *Ist $|f| \leq g$ und ist $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, so auch $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.*

Lemma 5.20. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} f(x)$ existiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ gilt $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.*

Beweis. (Lemma) „$\Rightarrow$“ ist einfach (!)

„$\Leftarrow$“ Sei $\epsilon > 0$. Nach Vorraussetzung gibt es ein $\delta > 0$, wie im Lemma, aber mit $\frac{\epsilon}{2}$ statt ϵ. Sei $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$. Für $n, m \geq N$ gilt dann $|f(x_m) - f(x_n)| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge und daher konvergent. Sei $a := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Für ein beliebiges $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_N)|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_N) - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \epsilon.$$

Das zeigt, dass $a = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D\setminus\{x_0\}}} f(x)$. $\square$

Beweis. (Proposition). Wir zeigen 2. (1. geht analog). Wir nehmen an, dass $f|_{[\alpha,\beta]}$ für alle $\beta < b$ Riemann-integrierbar ist (übrige Fälle analog).

Sei $F(x) := \int_a^x |f(y)| \,\mathrm{d}y$ für $x \in [a, b)$ und $G(x) := \int_a^x g(y) \,\mathrm{d}y$. Dann ist für $a \leq u \leq v < b$

$$F(v) - F(u) = \int_u^v |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq \int_u^v g(y) \,\mathrm{d}y = G(v) - G(u). \tag{$*$}$$

Nach Voraussetzung existiert $\lim_{x\nearrow b} G(x)$, erfüllt also die Cauchy-Bedingungen in Lemma 5.20. Also wegen $(*)$ erfüllt auch F die Cauchy-Bedingung, also existiert nach Lemma 5.20 $\lim_{x\nearrow b} F(x)$. $\square$

Beispiel 5.21. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$ konvergiert. (Analogie: $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert.)

Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ lässt sich stetig durch 1 nach $x = 0$ fortsetzen, das Integral $\int_0^\beta \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$ existiert also als „Standard“ Riemann-Integral.

$$\int_{\pi/2}^\beta \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^\beta \frac{1}{x}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\right) \mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi/2}^\beta - \int_{\pi/2}^\beta \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x$$

Das rechte Integral konvergiert nach Proposition 5.19 für $\beta \to \infty$, denn $\int_{\pi/2}^\infty \frac{|\cos x|}{x^2} \,\mathrm{d}x \leq \int_{\pi/2}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konvergiert.

Der erste Summand ist $-\frac{\cos\beta}{\beta} \to 0$ für $\beta \to \infty$.

Daraus folgt Konvergenz.

Zusatz: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Wir zeigen die Konvergenz von $\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \underset{x=(2n+1)t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \,\mathrm{d}t$ gegen $\frac{\pi}{2}$ für $n \to \infty$.

Es ist

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{k=1}^n \cos 2kt &= \sum_{k=-n}^n \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kt} = \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,nt} \sum_{l=0}^{2n} \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,lt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,nt} \frac{1 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}(2n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}(2n+1)t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,t}} = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{2}} + 2\sum_{k=1}^n \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2kt \,\mathrm{d}t}_{=0} = \frac{\pi}{2}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\int_0^{\pi/2} g(t) \sin\lambda t \,\mathrm{d}t \to 0 \text{ für } \lambda \to \infty, \quad g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}.$$

Klar ist g stetig differenzierbar in $(0, \frac{\pi}{2}]$. Mit Hilfe von L'Hospital haben wir früher gezeigt, dass sich g und g' stetig durch 0 nach 0 fortsetzen lassen.
Also ist nach partieller Integration

$$\int_0^{\pi/2} g(t) \underbrace{\sin \lambda t}_{=-\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\lambda t} \,\mathrm{d}t = \underbrace{-\left.\frac{g(t)\cos\lambda t}{t}\right|_0^{\pi/2}}_{=-\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t}_{|\,|\leq\int_0^{\pi/2}|g'(t)|\,\mathrm{d}t\leq(\sup|g'|)\frac{\pi}{2}}$$

Daher ist $\left|\int_0^{\pi/2} g(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\text{const.}}{\lambda} \to 0$ für $\lambda \to \infty$.

Satz 5.22. (Integralvergleichskriterium) *Sei $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ monton fallend und nicht-negativ. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} f(m)$ konvergiert genau dann, wenn das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.*

Z.B. folgt, dass $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$ genau dann konvergiert, wenn $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ konvergiert. Wir haben früher schon gesehen, dass beides genau dann gilt, wenn $s > 1$.

Beweis. Wir definieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{matrix} \psi(x) := f(n) \\ \varphi(x) := f(n+1) \end{matrix} \quad \text{für } x \in [n, n+1)$$

Wegen f monton fallend, ist $\varphi \leq f \leq \psi$, also

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^N \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Falls $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, so ist $\sum_{n=2}^{N} f(n)$ beschränkt, also konvergent.
Falls $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$ konvergent, so ist $\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$ beschränkt, also konvergent. □

Lemma 5.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Beweis. Wir wissen schon, dass die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} - 2\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2m} = \sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n}.$$

Wegen $\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ ist

$$\underbrace{\int_{N+1}^{2N+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}}_{=\ln\frac{2N+1}{N+1}=\ln\frac{2+\frac{1}{N}}{1+\frac{1}{N}}\xrightarrow{N\to\infty}\ln 2} \leq \sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n} \leq \int_N^{2N}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_N^{2N} = \ln\frac{2N}{N} = \ln 2$$

□

5.4 Die Gammafunktion

Definition 5.24. Für $x > 0$ setzt man $\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. *Gammafunktion.*
Das uneigentliche Integral konvergiert bei $t = 0$, denn es ist $0 \leq \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \leq t^{x-1}$, und bei $t = \infty$, denn es ist $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} = 0$, also $0 \leq \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \leq t^{-2}$ für $t \geq t_0$.

Proposition 5.25. *Für alle $x > 0$ ist $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.* Funktionalgleichung

Wegen $\Gamma(1) = 1$ folgt aus der Proposition durch Induktion

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Für $0 < \epsilon < R < \infty$ ist wegen partieller Integration

$$\underbrace{\int_\epsilon^R \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-t}} t^x\,\mathrm{d}x}_{\substack{\longrightarrow \\ \epsilon\to 0 \\ R\to\infty}\Gamma(x+1)} = \underbrace{-\,\mathrm{e}^{-t}\, t^x\Big|_\epsilon^R}_{=\underbrace{\mathrm{e}^{-R}\, t^R}_{\substack{\longrightarrow \\ R\to\infty}0} - \underbrace{\mathrm{e}^{-\epsilon}\,\epsilon^x}_{\substack{\longrightarrow \\ \epsilon\to 0}0}} + \underbrace{x\int_\epsilon^R \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\longrightarrow \\ \epsilon\to 0 \\ R\to\infty}\Gamma(x)}$$

□

Lemma 5.26. *Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $x, y \geq 0$ gilt*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \qquad \text{Young'sche Ungleichung.}$$

Beweis. $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} \leq 0$, d.h. ln konkav, d.h. $\ln\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \geq \frac{1}{p}\ln u + \frac{1}{q}\ln v$ für alle $u, v > 0$. $\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v \geq \exp\left(\frac{1}{p}\ln u + \frac{1}{q}\ln v\right) = u^{1/p}v^{1/q}$, setze $x = u^{1/p}, y = v^{1/q}$. □

Satz 5.27. *Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar gilt*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \qquad \text{Hölder'sche Ungleichung}$$

Beweis. Ersetzen wir f durch $\frac{f}{\left(\int_a^b |f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}}$ und entsprechend für g, so können wir o.B.d.A $\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = 1$ annehmen. Nach Young ist $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{q}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$. Integration über $[a, b]$ liefert die Behauptung. □

Satz 5.28. $\ln\Gamma$ *ist konvex.*

Daraus folgt, dass $\ln\Gamma$ stetig in $(0, \infty)$ ist, also ist auch $\Gamma = \mathrm{e}^{\ln\Gamma}$ dort stetig.

Beweis. Für $0 < \epsilon < R < \infty, 1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y > 0$ ist

$$\int_\epsilon^R \mathrm{e}^{-t}\, t^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y - t}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hölder}}}{=} \int_\epsilon^R \left(\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathrm{e}^{-t}\, t^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}t$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hölder}}}{\leq} \left(\int_\epsilon^R \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\epsilon^R \mathrm{e}^{-t}\, t^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

Damit folgt für $\epsilon \to 0, R \to \infty$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\, \Gamma(y)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow \ln\Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}\Gamma(x) + \frac{1}{q}\Gamma(y)\,.$$

□

Satz 5.29. *Für $x > 0$ ist $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.*

Beweis. Sei zunächst $0 < x < 1$. Wegen der log-Konvexität folgt aus $n + x = (1-x)\,n + x\,(n+1)$

$$\Gamma(n+x) \leq \Gamma(n)^{1-x}\,\Gamma(n+1)^x = ((n-1)!)^{1-x}\,(n!)^x = (n-1)!n^x$$

und aus $n + 1 = x\,(n+x) + (1-x)\,(n+1+x)$

$$n! = \Gamma(n+1) \leq \Gamma(n+x)^x\,\Gamma(n+1+x)^{1-x} \underset{\substack{\text{Funktional-}\\ \text{gleichung}}}{=} \Gamma(n+x)\,(n+x)^{1-x}$$

Zusammen:

$$n!\,(n+x)^{-1+x} \leq \underset{\substack{\text{Funktional-}\\ \text{gleichung}}}{=} \underbrace{\Gamma(n+x)}_{x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)} \leq (n-1)!n^x$$

$$\Leftrightarrow a_n(x) := \frac{n!\,(n+x)^{-1+x}}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq \Gamma(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} =: b_n(x)$$

Wegen

$$\frac{a_n(x)}{\frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} = \frac{(n+x)^x}{n^x} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^x \to 1$$

und

$$\frac{b_n(x)}{\frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} = \frac{x+n}{n} = 1 + \frac{x}{n} \to 1$$

folgt daraus die Behauptung für $0 < x < 1$. Die Behauptung für $x = 1$ ist trivial.
Die Formel für $x > 1$ folgt aus der für $x - 1$ (die wir nach Induktion als bewiesen ansehen dürfen.)

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Behauptung}\\ \text{für } x-1}}{=} (x-1)\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{x-1}}{(x-1)\,x\cdots(x-1+n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \underbrace{\frac{x+n}{n}}_{=1+\frac{x}{n}\to 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

□

Korollar 5.30. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Beweis. Nach Satz 5.29 ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 n}{\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}$. Für den Nenner gilt

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(2-\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(n+1-\tfrac{1}{2}\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{=\left(1-\frac{1}{4}\right)}\cdot\underbrace{\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}_{=\left(4-\frac{1}{4}\right)}\cdots\underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)}_{=\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\right]\left(n+1-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^n\left(k^2-\tfrac{1}{4}\right)\right)\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{(n!)^2 n}{\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}=\underbrace{\frac{2n}{n+\frac{1}{2}}}_{\to 2}\underbrace{\prod_{k=1}^n\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}}_{\overset{\text{Wallis}}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}\text{ für }n\to\infty}\to\pi.$$

□

Korollar 5.31. $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

Beweis.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\underset{\substack{x^2=t\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}}{=}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

□

6 Funktionenfolgen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 6.1. Sei K eine Menge und $f_n : K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : K \to \mathbb{C}$ Funktionen.

1. Die Folge (f_n) *konvergiert punktweise* gegen f, falls für jedes $x \in K$ die Folge $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

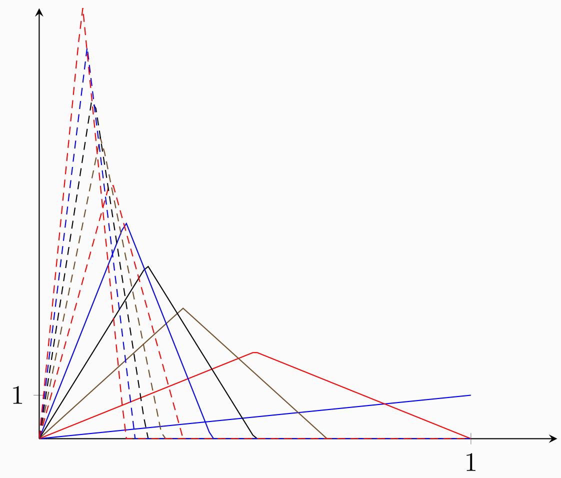
   Zu jedem $\epsilon > 0$ und $x \in K$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

2. Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, falls gilt:

   Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle in $x \in K$ und alle $n \geq N$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Offensichtlich gilt gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

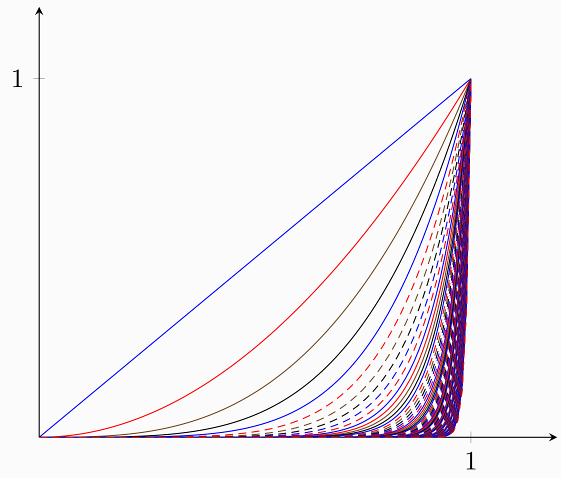
Beispiel 6.2. Für $n \geq 2$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\left\{n - n^2\left|x - \frac{1}{n}\right|, 0\right\}$.



Dann konvergiert f_n punktweise gegen 0, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.

Satz 6.3. *Sei $K \subset \mathbb{C}$, seien $f_n : K \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen und sei $f : K \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann ist f stetig.*

Beispiel 6.4. Für $n \geq 1$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$.



Dann gilt $f_n \to f$ punktweise mit $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig und f ist nicht stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in K$ und $\epsilon > 0$. Wegen gleichmäßiger Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und $x \in K$ gilt $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Wegen f_N stetig gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in K$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Daher gilt für alle $x \in K$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon.$$

□

Proposition 6.5. (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) *Seien $f_n : K \to \mathbb{C}$ Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ und $x \in K$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und $x \in K$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist für alle $n, m \geq N$ und $x \in K$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon.$$

„$\Leftarrow$“ Es gelte die Cauchy-Bedingung. Dann ist für jedes $x \in K$ $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, also konvergent. Sei $f(x)$ der Grenzwert. Für $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ wie in der Cauchy-Bedingung. Lässt man dort $m \to \infty$, so erhält man für $n \geq N$ und $x \in K$, dass $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. D.h. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f. □

Definition 6.6. Sei K eine Menge und $f : K \to \mathbb{C}$. Dann setzt man

$$\|f\|_K := \sup\{|f(x)| : x \in K\} \qquad \textit{Supremumsnorm}$$

Bemerkung: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f (in K) genau dann, wenn $\|f_n - f\|_K \to 0$.

Satz 6.7. (Weierstraßsches Konvergenzkriterium) *Seien $f_n : K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Funktionen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig.*

Beweis. Sei $x \in K$. Wegen $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_K$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium die Reihe $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut.
Sei $F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$. Wir zeigen $F_N \to F$ gleichmäßig. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_K < \epsilon$. Dann ist für $M \geq N$ und $x \in K$

$$|F_M(x) - F(x)| = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_K < \epsilon.$$

□

Vertauschung von Grenzübergängen

Erinnerung: Konvention $[a, b]$ nur mit $-\infty < a < b < +\infty$.

Satz 6.8. *Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist*

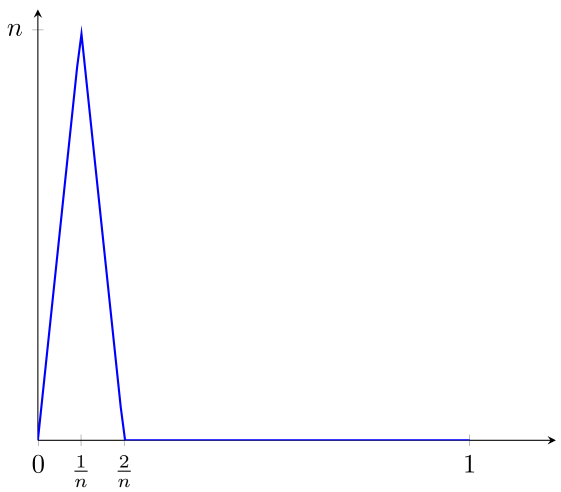
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Wie gezeigt ist f stetig, also Riemann-integrierbar. Außerdem ist

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0.$$

□

Bemerkung: Die Aussage gilt im Allgemeinen nicht, wenn (f_n) nur punktweise konvergiert. Z.B. im ersten Beispiel oben ist $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, aber $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$.



Satz 6.9. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, so dass für ein $c \in [a,b]$ $(f_n(c))$ konvergiert und (f_n') gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig und die Grenzfunktion f ist differenzierbar in $[a,b]$ und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für $x \in [a,b]$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und für alle } x \in [a,b]: \ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, y \in [a,b]$ und $n, m \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| < \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}\,|x-y| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{$*$}$$

Daraus folgt (mit $y = c$) für $x \in [a,b]$, $n, m \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_m(x) - f_n(c) + f_m(c)|}_{\overset{(*)}{<}\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon.$$

D.h. die gleichmäßige Cauchy-Bedingung ist erfüllt und nach Proposition 6.5 konvergiert (f_n) gleichmäßig.
Sei $x_0 \in [a,b]$. Sei für $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \qquad \varphi(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die erste Ungleichung in $(*)$ (mit $y = x_0$) liefert für alle $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ und $n, m \geq N$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}. \tag{$**$}$$

D.h. die gleichmäßige Cauchy-Bedingung ist erfüllt für (φ_n) auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ und nach Proposition 6.5 konvergiert (φ_n) dort gleichmäßig.

Andererseits konvergiert (φ_n) punktweise in $[a,b] \setminus \{x_0\}$ gegen φ. Es folgt, dass $\varphi_n \to \varphi$ gleichmäßig in $[a,b] \setminus \{x_0\}$.

Sei jetzt $\epsilon' > 0$. Dann gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ und $n \geq N'$ gilt $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\epsilon'}{3}$. Wegen Konvergenz von $(f_n'(x_0))$ gibt es ein $N'' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N''$ gilt $|f_n'(x_0) - A| < \frac{\epsilon}{3}$ mit $A := \lim_{m\to\infty} f_m'(x_0)$. Wegen f_n differenzierbar gilt $\lim_{x\to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt $|\varphi_M(x) - f_M'(x_0)| < \frac{\epsilon'}{3}$ mit $M := \max\{N', N''\}$. Damit ist für $x \in [a,b]$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|\varphi(x) - A| \leq \underbrace{|\varphi(x) - \varphi_M(x)|}_{<\frac{\epsilon'}{3}} + \underbrace{|\varphi_M(x) - f_M'(x_0)|}_{<\frac{\epsilon'}{3}} + \underbrace{|f_M'(x_0) - A|}_{<\frac{\epsilon'}{3}} < \epsilon'.$$

□

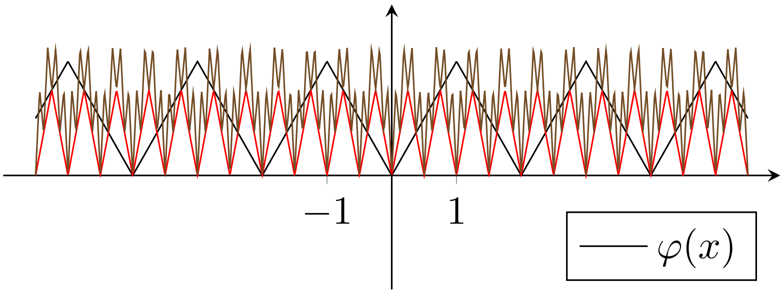
Bemerkung: Die Aussage stimmt im Allgemeinen nicht, wenn (f_n') nicht konvergiert. Z.B. sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig, aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert *nicht* gegen $0' = 0$.

Beispiel: Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar ist.
Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) := |x| \text{ für } -1 \leq x \leq 1, \qquad \varphi(x+2) = \varphi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

und sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi\left(4^n x\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}. \qquad \textit{Weierstraß-Funktion}$$



Beweis. Wegen $0 \leq \varphi \leq 1$ konvergiert die Reihe gleichmäßig nach dem Weierstraß'schen Konvergenzkriterium, also ist f stetig.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 nicht differenzierbar ist. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann enthält mindestens eines der Intervalle $\left(4^N x_0 - \frac{1}{2}, 4^N x_0\right)$ und $\left(4^N x_0, 4^N x_0 + \frac{1}{2}\right)$ keine ganze Zahl. Wir setzen

$$\delta_N := +\frac{1}{2} 4^{-N} \text{ im ersten Fall und } \delta_N := -\frac{1}{2} 4^{-N} \text{ im zweiten Fall.}$$

Sei $y_n := \frac{\varphi(4^n(x_0+\delta_N)) - \varphi(4^n x_0)}{4^n \delta_N}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Ist $n > N$, so ist $4^n \delta_N = \pm\frac{1}{2} 4^{n-N} = \pm 2 \cdot 4^{n-N-1}$ eine gerade ganze Zahl, und damit $\gamma_n = 0$.
Für $n = N$ ist $|\gamma_n| = 1$, denn zwischen $4^N\left(x_0 + \delta_N\right)$ und $4^N x_0$ liegt keine ganze Zahl, φ ist dort also affin-linear.
Für $n < N$ verwenden wir, dass $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das gibt $|\gamma_n| \leq 1$.

$$\left|\frac{f\left(x_0 + \delta_N\right) - f\left(x_0\right)}{\delta_N}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n 3^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \gamma_n 3^n\right| \geq 3^N \underbrace{|\gamma_N|}_{=1} - \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{|\gamma_n|}_{\leq 1} 3^n$$

$$\geq 3^N - \sum_{n=0}^{N-1} 3^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{1}{2}\left(3^N + 1\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Daher ist f in x_0 nicht differenzierbar. □

6.2 Potenzreihen und Tayloreihen

Satz 6.10. *Seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Setzte*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}. \qquad \text{Konvergenzradius}$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{Potenzreihe}$$

absolut und gleichmäßig in $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$ für alle $r < R$, und konvergiert nicht für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$.

Bemerkung: Der Satz macht keine Aussage über z mit $|z-a| = R$.

Beweis. Die absolute Konvergenz für $|z-a|<R$ sowie die Nichtkonvergenz für $|z-a|>r$ folgt aus dem Wurzelkriterium. Dessen Beweis zeigt auch, dass die Konvergenz gleichmäßig ist für $|z-a| \leq r < R$. $\square$

Beispiel 6.11. 1. $\exp(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Hier: $R = +\infty$.

2. Nach der geometrischen Reihe ist $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Hier: $R = 1$.
   Beachte, dass die Reihe für *kein* z mit $|z| = 1$ konvergiert.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ für } |z-a| < R$$

eine in $\{z : |z-a| < R\}$ stetige Funktion.

Korollar 6.12. *Seien $(c_n), (\tilde{c_n}) \subset \mathbb{C}$ mit entsprechenden Konvergenzradien $R > 0$ und $\tilde{R} > 0$. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ und $\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c_n} (z-a)^n$.*
Es gebe eine Folge $(z_j) \subset \mathbb{C}$ mit $0 < |z_j - a| < \min\{R, R'\}$, $z_j \to a$ und $f(z_j) = \tilde{f}(z_j)$ für alle j. Dann gilt $c_n = \tilde{c_n}$ für alle n.

Beweis. O.B.d.A. seien alle $\tilde{c_n} = 0$. (sonst betrachte $c_n - \tilde{c_n}$ und $f - \tilde{f}$.)
Dann ist $f(z_j) = 0$ für alle j und wir müssen zeigen, dass $c_n = 0$ für alle n.
Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $c_N \neq 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < N$. Sei

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^N} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{N+m} (z-a)^m .$$

Nach dem Satz konvergiert g in $\{z : |z-a| < R\}$ und ist dort stetig. Nach Voraussetzung ist $g(z_j) = \frac{f(z_j)}{(z_j-a)^N} = 0$ für alle j. Nach Stetigkeit von g ist also $g(a) = 0$.
Andererseits ist $g(a) = c_N \neq 0$, *Widerspruch.* $\square$

Im Folgenden seine alle $c_n \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Satz 6.13. *Sei $(c_n) \subset \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist die Reihe*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

im Intervall $(a-R, a+R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k} \text{ für } x \in (a-R, a+R).$$

Insbesondere ist $f^{(k)}(a) = k! c_k$. („Termweises Differenzieren ist erlaubt.“)

Beweis. Es genügt $k = 1$ zu betrachten (sonst wiederholte Anwendung). Wegen $n^{1/n} \to 1$ ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^n$ gleich R. Daher konvergiert nach obigem Satz die Folge der Ableitungen der Partialsummen gleichmäßig in $[a-r, a+r]$ für jedes $r < R$ und die Differentiation darf mit dem Grenzwert vertauscht werden. $\square$

Beispiel 6.14. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1,1)$. (Das stimmt auch für $x=-1$, aber das folgt nicht aus dem Argument hier.)

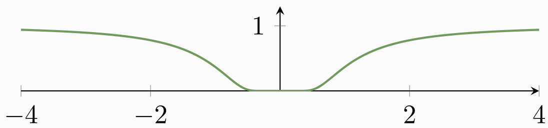
Beweis. Sei $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1,1)$. Nach dem Satz ist das eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe), d.h. f ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{1-x}$, d.h. $f(x) = -\ln(1-x) + C$ für $C \in \mathbb{R}$. Auswertung bei $x=0$ liefert $C=0$. □

Umgekehrtes Problem: Gegeben sei eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und ein $a \in D$. Kann f als Potenzreihe dargestellt werden? Gilt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$?
Notwendig:

- f beliebig oft differenzierbar und $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$.
- Für $R > 0$ brauchen wir $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\right)^{1/n} < \infty$.

Das ist aber nicht hinreichend.

Beispiel 6.15. *(Cauchy, 1826)* Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$ ist beliebig oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.



Die (triviale) Konvergenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$ konvergiert in ganz $\mathbb{R}$, stimmt aber nur in $x = 0$ mit f überein.

Hier: vor allem *endliche* Entwicklungen.

Proposition 6.16. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \to \mathbb{R}$ $(N-1)$-mal stetig differenzierbar und in $a \in I$ existiere die N-te Ableitung. Dann ist*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^N} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n \right] = 0.$$

Beweis.

$$\frac{1}{(x-a)^N} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n \right] = \frac{1}{(x-a)^N} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n \right] - \frac{1}{N!} f^{(N)}(a)$$

Wir erhalten weiterhin nach L'Hospital:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^N} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n \right] = \lim_{x\to a} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(a)}{N!(x-a)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Existenz von} \\ N\text{-ter Ableitung}}}{=} \frac{1}{N!} f^{(N)}(a).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 6.17. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion mit $f^{(N+1)}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{N!} \int_a^x (x-y)^N f^{(N+1)}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Wir verwenden Induktion über N. $N = 0$: Fundamentalsatz.
Für $N \geq 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n &= \frac{1}{(N-1)!} \int_a^x \underbrace{(x-y)^{N-1}}_{=-\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x-y)^N} f^{(N)}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{N!} \underbrace{(x-y)^N f^{(N)}(y)\Big|_a^x}_{=-(x-a)^N f^{(N)}(a)} + \frac{1}{N!} \int_a^x (x-y)^N f^{(N+1)}(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

□

Korollar 6.18. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, x \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in I$ zwischen a und x mit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x-a)^{N+1}.$$

Bemerkung: Für $N = 0$ ist das der Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung ($f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$).

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in I$ zwischen a und x mit

$$\int_a^x (x-y)^N f^{(N+1)}(y)\,\mathrm{d}y = f^{(N+1)}(\xi) \int_a^x (x-y)^N \,\mathrm{d}y = f^{(N+1)}(\xi) \frac{1}{N}(x-a)^{N+1}.$$

□

Bemerkung: Restgliedabschätzung von sin und cos. Für *alle* $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2K+3}}{(2K+3)!},$$
$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2K+2}}{(2K+2)!}.$$

(Denn nach dem Korollar ist die linke Seite

$$\underbrace{\left| f(\xi) \cdot \frac{1}{(2K+3)!} x^{2K+3} \right|}_{\leq \frac{1}{(2K+3)!}|x|^{2K+3}} \text{ bzw. } \underbrace{\left| f(\xi) \cdot \frac{1}{(2K+2)!} x^{2K+2} \right|}_{\leq \frac{1}{(2K+2)!}|x|^{2K+2}}$$

mit $f(x) = \sin x$ oder $f(x) = \cos x$.)