Zusammenfassung zu Analysis I

Sara Adams

9. August 2004

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung
Analysis I
gehalten im Wintersemester 2002/03
von Prof. Dr. Thomas Bartsch
an der Justus-Liebig Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definitionen

- $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
  - $x^0 := 1,\ x^n := x \cdot x^{n-1}, n \geq 1$
  - $0! := 1,\ n! := n \cdot (n-1)!, n \geq 1$
  - $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$
- **Betrag** $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
- **Intervalle**: $x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$
  - $[x, y] := \{z \in \mathbb{R} :\ x \leq z \leq y\}$ geschlossenes Intervall
  - $[x, y) := \{z \in \mathbb{R} :\ x \leq z < y\}$ halboffenes Intervall
  - $(x, y] := \{z \in \mathbb{R} :\ x < z \leq y\}$ halboffenes Intervall
  - $(x, y) := \{z \in \mathbb{R} :\ x < z < y\}$ offenes Intervall
  - $[x, \infty) := \{z \in \mathbb{R} :\ x \leq z\}$
  - $(x, \infty) := \{z \in \mathbb{R} :\ x < z\}$
  - $(-\infty, y] := \{z \in \mathbb{R} :\ z \leq y\}$
  - $(-\infty, y) := \{z \in \mathbb{R} :\ z < y\}$
- $A \subset \mathbb{R}$ **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow\ \exists b \in \mathbb{R} :\ A \subset (-\infty, b]$ (b **obere Schranke**)
- $A \subset \mathbb{R}$ **nach unten beschränkt** $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R} :\ A \subset [c, \infty)$ (c **untere Schranke**)

Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow\ \exists! \sup A \in \mathbb{R} :\ a \leq \sup A\ \forall a \in A, [b \in \mathbb{R}$ obere Schranke von $A \Rightarrow\ b \geq \sup A]$ ($\sup A$ kleinste obere Schranke von A, **Supremum**)
- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt $\Rightarrow\ \exists! \inf A \in \mathbb{R} :\ a \geq \inf A\ \forall a \in A, [b \in \mathbb{R}$ untere Schranke von $A \Rightarrow\ b \leq \inf A]$ ($\inf A$ größte untere Schranke von A, **Infimum**)
- $\sup A \in A \Rightarrow\ \sup A = \max A$ (**Maximum** von A)
- $\inf A \in A \Rightarrow\ \inf A = \min A$ (**Minimum** von A)

Sätze

- $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Allgemeine binomische Formel: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

- $x, y \in \mathbb{R}$
  - $|x| \geq 0,\ x \leq |x|,\ |x| = 0 \Leftrightarrow\ x = 0$
  - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ |x + y| \leq |x| + |y|$
- $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt.
- $n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ a \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow\ \exists!\ b \in \mathbb{R}_0^+ :\ b^n = a \quad (b = \sqrt[n]{a}$ n-te Wurzel von $a)$
- $a \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists b \in \mathbb{Q} :\ |a - b| < \varepsilon$

2 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definitionen

- $i := \sqrt{-1}$
- $\mathbb{C} := \{x + yi :\ x, y \in \mathbb{R}\}$
- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
- $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + yi \mapsto x$ **Realteil**
- $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x_y i \mapsto y$ **Imaginärteil**
- $|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}$ **Betrag**
- $^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + yi \mapsto x - yi$ **komplexe Konjugation**

Sätze

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper, jedoch kein angeordneter Körper.
- $x + yi \neq 0 \Rightarrow\ (x + yi)^{-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i$
- $w, z \in \mathbb{C}$
  - $|z| \geq 0,\ |z| = 0 \Leftrightarrow\ z = 0$
  - $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|,\ |w + z| \leq |w| + |z|$
  - $|w - z| \geq \big||w| - |z|\big|$
  - $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z},\ \overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
  - $\overline{z} = z \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$

3 Folgen

Definitionen

- $(\cdot_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto a_n$ **Folge** komplexer Zahlen
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent** $:\Leftrightarrow\ \exists\, a \in \mathbb{C}: \ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq N$ ($a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, a **Grenzwert bzw. Limes** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$)
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergent** $:\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton wachsend** $:\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **streng monoton wachsend** $:\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend** $:\Leftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **streng monoton fallend** $:\Leftrightarrow$ $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_n$ Folge reeller Zahlen
  - $\lim(a_n) = \infty \ :\Leftrightarrow\ \forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \ a_n \geq c \quad \forall n \geq N$
  - $\lim(a_n) = -\infty \ :\Leftrightarrow\ \forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \ a_n \leq c \quad \forall n \geq N$
- $(a_{n_k})_k$ **Teilfolge** von $(a_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $(a_n)_n$ Folge, $n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $a \in \mathbb{C} \cup \{-\infty, \infty\}$ **Häufungspunkt** von $(a_n)_n$ $:\Leftrightarrow\ \exists\ (a_{n_k})_k : \ a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$
- $M \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
  - $\sup(M) := \begin{cases} \text{kleinste obere Schr.} & \text{falls } M \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{falls } M \text{ nicht nach oben beschr. od. } \infty \in M \\ -\infty & \text{falls } M = \{-\infty\} \end{cases}$
  - $\inf(M) := \begin{cases} \text{größte untere Schr.} & \text{falls } M \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{falls } M \text{ nicht nach unten beschr. od. } -\infty \in M \\ \infty & \text{falls } M = \{\infty\} \end{cases}$
- $(a_n)_n$ Folge reeller Zahlen, $H \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ Menge aller Häufungspunkte
  - $\limsup = \overline{\lim} := \sup(H)$ **Limes superior**
  - $\liminf = \underline{\lim} := \inf(H)$ **Limes inferior**
- $(a_n)_n$ **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \ |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$

Sätze

- (a_n) Folge in $\mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $a_n \to b \Rightarrow\ a = b$
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow\ |a_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$
- $|z| > 1 \Rightarrow\ (|z|^n)_n$ divergent
- $(|z|^n)_n$ divergent $\Rightarrow$ $(z_n)_n$ divergent
- $|z| < 1 \Rightarrow\ |z^n| = |z|^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $(a_n)_n$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ beschränkt
- $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergent
  - $(a_n + b_n)_n$ konvergent, $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$
  - $(a_n \cdot b_n)_n$ konvergent, $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
  - $\lim(b_n) \neq 0 \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N} : \ b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ konvergent, $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$
- $(a_n)_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Re(a) \\ \Im(a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Im(a) \end{cases}$
- $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergent, $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow\ \lim(a_n) \leq \lim(b_n)$
- $(a_n)_n$ monoton und beschränkt $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ konvergent
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow\ a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$
- Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.
- **Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.
- Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge bzw. hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$.
- $(a_n)_n$ Folge reeller Zahlen $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ besitzt einen Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
- $(a_n)_n$ reelle Folge, $S := \limsup(a_n), s := \liminf(a_n), a \in \mathbb{R}$ Dann sind äquivalent:
  1. a ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$
  2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists I \subset \mathbb{N}, |I| = \infty : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in I$
  3. $\forall \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}, m \geq N : |a_m - a| < \varepsilon$
- $(a_n)_n$ reelle Folge: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ \Leftrightarrow\ \limsup(a_n) = \liminf(a_n) = a$
- $(a_n)_n$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ $(a_n)_n$ konvergent

4 Reihen

Definitionen

- $(A_n)_{n\geq n_0}$ **Reihe** $:\Leftrightarrow$ $(a_k)_k$ Folge, $A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ $\quad (\sum_{k=n_0}^\infty a_k := (A_n)_{n\geq n_0})$
- $(A_n)_{n\geq n_0}$ konvergent: $\sum_{k=n_0}^\infty a_k := \lim(A_n)$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **absolut konvergent** $:\Leftrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ konvergent
- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ **Exponentialfunktion**
- $e := \exp(1) \in \mathbb{R}$ **Eulersche Zahl**

Sätze

- $\sum_{k=n_0}^\infty a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- **Geometrische Reihe**: $|z| < 1 \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$
- $|z| \geq 1 \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^\infty z^n$ divergent
- $\sum_{n\geq n_0} a_n, \sum_{n\geq n_0} b_n$ konvergent, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\sum_{n\geq n_0}(a_n \pm b_n),$ $\sum_{n\geq n_0} \lambda a_n$ konvergent, $\sum_{n\geq n_0}(a_n \pm b_n) = \sum_{n\geq n_0} a_n \pm \sum_{n\geq n_0} b_n,$ $\sum_{n\geq n_0} \lambda a_n = \lambda \sum_{n\geq n_0} a_n$
- **Cauchy'sches Konvergenzkriterium** $\sum_{n\geq n_0} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :$ $\left|\sum_{k=m}^n a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$
- **Majorantenkriterium** (1. Version) $b_n \geq a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0 :$ $\sum_{n\geq n_0} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} a_n$ konvergent ($\sum b_n$ **Majorante** von $\sum a_n$)
- **Quotientenkriterium** (1. Version) $a_n > 0\ \forall n \geq n_0,\ \exists 0 < \alpha < 1 :$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash I,\ |I| < \infty$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq n_0}$ konvergent
- **Leibnitzkriterium** $a_n \geq a_{n+1} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $\sum a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent, $\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$
- $\exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent
- **Majorantenkriterium** (2. Version) $|a_n| \leq b_n,$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n < \infty \Rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent
- **Quotientenkriterium** (2. Version) $a_n \neq 0\ \forall n \geq n_0, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \alpha < 1\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent
- **Umordnungsgesetz** $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ jede Umordnung der Reihe konvergiert gegen A
- $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ absolut konvergent, $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, n \mapsto \big(\sigma_1(n), \sigma_2(n)\big)$ Bijektion $\Rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\big(a_{\sigma_1(n)} \cdot b_{\sigma_2(n)}\big) = \big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{\sigma_1(n)}\big) \cdot \big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_{\sigma_2(n)}\big)$ absolut konvergent
- **Funktionalgleichung von exp** $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

  - $\exp(0) = 1,\ \exp(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$
  - $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}$
  - $x \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \exp(x) \in \mathbb{R}^+$
  - $x < y \Rightarrow\ \exp(x) < \exp(y),\ x, y \in \mathbb{R}$
- $e = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

5 Stetige Funktionen

Definitionen

- $f : D \to \mathbb{C}$ **stetig an der Stelle** $z \in D$ $:\Leftrightarrow$ $\forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D :$ $[z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z \Rightarrow$ $f(z_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z)]$
- $f : D \to \mathbb{C}$ **stetig** $:\Leftrightarrow$ f stetig in $z \quad \forall z \in D$
- $\ln := (\exp_{\mathbb{R}})^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ **logaritmus naturalis**
- $a \in (0, \infty) :$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ **Exponentialfunktion zur Basis** a
- $A \subset B \subset \mathbb{C}$
  - A **offen** in B $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in A \exists \varepsilon > 0 :$ $U_\varepsilon(a) \cap B = \{z \in B :\ |z - a| < \varepsilon\} \subset A$
  - A **abgeschlossen** in B $:\Leftrightarrow$ $B\backslash A$ offen in B
  - A **kompakt** $:\Leftrightarrow$ jede Folge in A hat einen Häufungspunkt in A
- $r > 0, a \in \mathbb{C} :$
  - $U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a| < r\}$ offene r-Umgebung um a
  - $B_r(a) := \overline{U_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a| \leq r\}$ abgeschlossener Ball vom Radius r um a
- $f : D \to \mathbb{C}$ **gleichmässig stetig** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $[\forall a, z \in D :\ |a - z| < \delta \Rightarrow$ $|f(a) - f(z)| < \varepsilon]$

Sätze

- $f, g : D \to C,\ f, g$ stetig in $z_0 \in D$:
  - $f \pm g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \pm g(z)$ stetig in z_0
  - $f \cdot g : D \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ stetig in z_0
  - $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{f}{g} : \{z \in D :\ g(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ stetig in z_0
- $f : D_f \to \mathbb{C}, g : D_g \to \mathbb{C}, f(D_f) \subseteq D_g,$ f stetig in $z_0,$ g stetig in $f(z_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f : D_f \to \mathbb{C}, z \mapsto g\big(f(z)\big)$ stetig in z_0
- $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ stetig
- **Zwischenwertsatz**: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\ \exists x \in [a, b] :$ $f(x) = y$

- $n \in 2\mathbb{Z}+1, a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ surjektiv
- $D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig: f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton
- **Satz von der Umkehrfunktion**: $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv $\Rightarrow$ $f(D)$ Intervall, f streng monoton, f besitzt stetige, streng monotone Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \to D \subset \mathbb{R}$
- Einige Eigenschaften vom Logarithmus
  - $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x \quad \forall x > 0$
  - $\ln(1) = 0, ln(e) = 1$
  - $0 < x < y \Rightarrow\ \ln(x) < \ln(y)$
  - ln stetig
  - $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ (**Funktionalgleichung von ln**)
- $a^z = e^{z \cdot \ln a}, \quad a^{w+z} = a^w \cdot a^z \quad \forall w, z \in \mathbb{C},\ a \in (0, \infty)$
- $\mathbb{R} \to (0, \infty), x \mapsto a^x$ bijektiv, Umkehrfunktion $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ **Logaritmus zur Basis** a
- $A \subset B \subset \mathbb{C}$:
  - A abgeschlossen in $B \Leftrightarrow\ [(a_n)_n \subset A, a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow\ a \in A]$
  - A kompakt $\Leftrightarrow$ A beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{C}$
- $D \subset \mathbb{C},\ f: D \to \mathbb{C}$:
  f stetig
  $\Leftrightarrow$ $[A \subset \mathbb{C}$ offen $\Rightarrow\ f(A)^{-1}$ abgeschlossen in $D]$
  $\Leftrightarrow$ $[A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen $\Rightarrow\ f(A)^{-1}$ abgeschlossen in $D]$
- $\emptyset \neq D$ kompakt, $f: D \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ $f(D)$ kompakt, $\exists z_0, z_1 \in D: \quad f(z_0) = \inf f(D), f(z_1) = \sup f(D)$
- $D \subset \mathbb{C}, f: D \to \mathbb{C}:\ f$ stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ [z \in D, |z-a| < \delta \Rightarrow\ |f(z) - f(a)| < \varepsilon]$
- $f: D \to \mathbb{C}$ gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f stetig
- $D \subset \mathbb{C}$ kompakt, $f: D \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ f gleichmässig stetig

6 Winkelfunktionen

Definitionen

- $\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$
- $\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
- **Cosinus**: $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- **Sinus**: $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

- **Pi**: $\alpha \in [0, 2] :\ \cos(\alpha) = 0 :\ \pi := 2\alpha = 2 \cdot \inf\{x > 0 :\ \cos(x) = 0\}$
- **Polarkoordinaten** von $z \in \mathbb{C} :\ (r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} : z = r \cdot e^{i\varphi}$
- **Argument** von $z \in \mathbb{C} :\ \arg(z) = \varphi$, falls $\varphi \in [0, 2\pi),\ \exists r \geq 0 :\ z = r \cdot e^{\varphi i}$
  (Oft wird statt $[0, 2\pi)$ das Intervall $[-\pi, \pi)$ verwendet.)
- **n-te Einheitswurzeln**: $e^{\frac{2k\pi i}{n}},\ k = 0, ..., n-1$
- **Tangens**: $\tan: \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ (stetig)
- **Cotangens**: $\tan: \mathbb{C}\backslash\{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ (stetig)

Sätze

- $\forall z \in \mathbb{C} :\ \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow\ |\exp(ix)| = |e^{ix}| = 1$
- **Eulersche Formel**: $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\forall z \in \mathbb{C} :\ \cos(-z) = \cos(z)$, cos ist gerade Funktion
- $\forall z \in \mathbb{C} :\ \sin(-z) = -\sin(z)$, sin ist ungerade Funktion
- $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- **Additionstheoreme**: $\forall w, z \in \mathbb{C}$:
  - $\cos(w + z) = \cos(w) \cdot \cos(z) - \sin(w) \cdot \sin(z)$
  - $\sin(w + z) = \sin(w) \cdot \cos(z) + \cos(w) \cdot \sin(z)$
- $\forall w, z \in \mathbb{C}$:
  - $\cos(w) - \cos(z) = -2\sin(\frac{w+z}{2}) \cdot \sin(\frac{w-z}{2})$
  - $\sin(w) - \sin(z) = 2\cos(\frac{w+z}{2}) \cdot \sin(\frac{w-z}{2})$
- $\sin, \cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig
- $\forall z \in \mathbb{C} :\ \cos(z) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},\ \sin(z) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (absolut konvergent)
- $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$
- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$ stetig
- $[0, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ streng monoton fallend
- $\cos(0) = 1,\ \cos(2) < 0$ ($\Rightarrow$ π wohldefiniert)
- $0 < x \leq 2$:
  - $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

  - $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$, insb. $\sin(x) > 0$

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0, \quad \cos(2\pi i) = 1$
- $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1, \quad \sin(2\pi i) = 0$
- $z \in \mathbb{C}: \quad e^{z+\frac{\pi}{2}i} = i \cdot e^z \; e^{z+\pi i} = - \cdot e^z \; e^{z+\frac{3\pi}{2}i} = -i \cdot e^z, \; e^{z+2\pi i} = e^z$
- $z \in \mathbb{C}:$
  - $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z), \quad \cos(z+\pi) = -\cos(z), \quad \cos(z+2\pi) = \cos(z)$
  - $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z), \quad \sin(z+\pi) = -\sin(z), \quad \sin(z+2\pi) = \sin(z)$
- $z \in \mathbb{R}:$
  - $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \; \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\pi} \in \mathbb{Z}$
  - $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; z = k\pi \Leftrightarrow \; \frac{z}{\pi} \in \mathbb{Z}$
- $\forall z \in \mathbb{Z}: \; [e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; z = 2k\pi i]$
- $\cos: [0,\pi] \to \mathbb{R}, \; \sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig, streng monoton (cos fallend, sin wachsend)
- $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, (r,\varphi) \mapsto r \cdot e^{i\varphi}$ stetig, surjektiv, 2π-periodisch in φ
- $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, (r,\varphi) \mapsto r \cdot e^{i\varphi}$ bijektiv
- $n \in \mathbb{N}: \quad z^n = 1 \Leftrightarrow \; z \in \{e^{\frac{2k\pi i}{n}} : \; k = 0, ..., n-1\}$
- $\forall z \in \mathbb{C}: \; \tan(z+\pi) = \tan(z), \; \tan(-z) = -\tan(z)$
- $\tan_{|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ streng monoton wachsend, Umkehrfunktion **arctan**: $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

7 Folgen und Reihen von Funktionen

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}, \; f_n : D \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

Definitionen

- $(f_n)_n$ **konvergiert punktweise** gegen $f: D \to \mathbb{C} \;\; :\Leftrightarrow \;\; f_n(z) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z) \; \forall z \in D \Leftrightarrow \forall z \in D, \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_z \in \mathbb{N}: \; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_z$
- **Supremumsnorm**: $f: D \to \mathbb{C}: \; ||f||_\infty := \sup\{|f(x)| : \; x \in D\} \in [0, \infty]$
- $f: D \to \mathbb{C}$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow \; ||f||_\infty < \infty$
- $(f_n)_n$ **konvergiert gleichmässig** gegen $f: D \to \mathbb{C} \;\; :\Leftrightarrow \;\; ||f_n - f||_\infty \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, z \in D$
- n**-te Partialsumme**: $F_n := \sum_{k=1}^n f_k$
- $\sum_{k=1}^\infty f_k$ **pkt.weise bzw. gl.m. konvergent** $:\Leftrightarrow \; (F_n)_n$ pkt.weise bzw. gl.m. konvergent

- **Potenzreihe**: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad (a_i \in \mathbb{C})$
- **Konvergenzradius** von $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n: \;\; R := \sup\{r \geq 0: \; \sum_{n=0}^\infty a_n r^n \text{ konvergent}\} \in [0, \infty]$
- **Konvergenzkreis** von $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n: \; U_R(0) := \{z \in \mathbb{C}: \; |z| < R\}$
- **trigonometrisches Polynom** vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \; c_i \in \mathbb{C}$

Sätze

- $f: D \to \mathbb{C}$ stetig, D kompakt $\Rightarrow \; f$ beschränkt
- $B := \{f: D \to \mathbb{C}: \; f \text{ beschränkt}\} \Rightarrow$
  - $||f||_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$
  - $\lambda \in \mathbb{C}, f \in B: \; ||\lambda \cdot f||_\infty = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$
  - $f, g \in B: \; ||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ (Dreiecksungleichung)
- $(f_n)_n$ konvergiere gleichmässig gegen $f: \quad f_n$ stetig $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \; f$ stetig
- $f_n : D \to \mathbb{C}$ beschränkt, $\sum_n ||f_n||_\infty < \infty$
  - $\sum_n f_n(z)$ konvergiert absolut $\forall z \in D$
  - $F: D \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_n f_n(z) \Rightarrow \; \sum_n f_n$ konvergiert gl.m. gegen F
  - f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \; F$ stetig
- $z_0 \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$ konvergent $\Rightarrow \; \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad \forall |z| \leq |z_0|$ konvergent
- $z \in U_R(0) \Rightarrow \; \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ absolut konvergent
- $|z| > R \Rightarrow \; \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ divergent
- $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \quad$ (hier: $\frac{1}{0} = \infty, \; \frac{1}{\infty} = 0$)
- $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ konvergiert gl.m. auf $B_r(0) \; \forall r < R, \; f: U_R(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ stetig
- p, q trigonometrische Polynome, $Grad(p) \leq m, Grad(q) \leq n \Rightarrow \; p+q, p \cdot q$ trigonometrische Polynome, $Grad(p+q) \leq \max\{m,n\}, Grad(p \cdot q) \leq m+n$
- $p(x) \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \; c_{-k} = \overline{c_k} \; \forall k$
  - $a_k := c_k + c_{-k} = 2\Re(c_k) \in \mathbb{R}$
  - $b_k := i(c_k - c_{-k}) = -2\Im(c_k) \in \mathbb{R}$
  - $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty \Rightarrow \; \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ konvergent, gl.m. gegen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$

8 Integration

Definitionen

- **Menge der integrierbaren Funktionen**: $I_a^b \subset \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$
  - (Lebesgue-)integrierbare Funktionen: I_a^b
  - Riemann-integrierbare Funktionen: $R_a^b \subset I_a^b$
- **Integral**: $\int_a^b : I_a^b \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
  1. $f(x) = c \in \mathbb{R}\ \forall x \Rightarrow\ \int_a^b f = c \cdot (b-a)$
  2. $a < c < b, f \in I_a^b \Rightarrow f_{|[a,c]} \in I_a^c, f_{|[c,b]} \in I_c^b,\ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (Intervalladditivität)
  3. $f, g \in I_a^b \Rightarrow\ f + g \in I_a^b,\ \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ (Additivität)
  4. $f \in I_a^b, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \lambda f \in I_a^b,\ \int_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int_a^b f$ (Homogenität)
  5. $f, g \in I_a^b, f \le g \Rightarrow\ \int_a^b f \le \int_a^b g$ (Monotonie)
- **Lipschitz-Stetigkeit** von $f : D \to \mathbb{C} :\ \exists L > 0 :\ |f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in D$
- **Treppenfunktion** $f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ \exists a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b :\ f_{|(a_{k-1},a_k)} = c_k \in \mathbb{R}\ \forall k = 1, ..., n$
  - **minimale Zerlegung** $a_0 < ... < a_n :\ c_{k-1} \neq c_k\ \forall k = 1, ..., n$
  - **Menge allen Treppenfunktionen**: T_a^b
- $f \in T_a^b, a_0 < ... < a_n$ minimale Zerlegung: $\int_a^b f := \sum_{k=1}^n c_k(a_k - a_{k-1}$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt:
  - $\int_a^{*b} f := \inf\{\int_a^b \psi :\ \psi \in T_a^b, f \le \psi\}$ **Oberintegral** von f
  - $\int_{*a}^b f := \sup\{\int_a^b \psi :\ \psi \in T_a^b, f \ge \psi\}$ **Unterintegral** von f
- **Riemann-int.bare Funktionen**: $R_a^b := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ f$ beschränkt, $\int_a^{*b} f = \int_{*a}^b f\}$
- $f \in R_a^b :\ \int_a^b f := \int_a^{*b} f = \int_{*a}^b f$ **Integral** von f über $[a,b]$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ \int_b^a f := -\int_a^b f$
- $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, f : (a,b) \to \mathbb{R}, \forall c < d \in (a,b) :\ f_{|[c,d]} \in R_c^d, \exists \lim_{c \to a, d \to b} \int_c^d f \Rightarrow \int_a^b f := \lim_{c \to a, d \to b} \int_c^d f$ **uneigentliches Integral** von f
- $f : [a,b] \to \mathbb{C} :\ f \in R_a^b(\mathbb{C})\ :\Leftrightarrow\ \Re(f), \Im(f) \in R_a^b$
  - $\int_a^b f := \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f) \in \mathbb{C}$

Sätze

- $f \in I_a^b, |f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$
  - $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f$ stetig (**unbestimmtes Integral** von f)
  - $F^b : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_x^b f$ stetig
- $f \in I_a^b, f_{|(a,b)} = c \Rightarrow\ \int_a^b f = c \cdot (b-a)$
- $T_a^b \subset R_a^b$
- $\int_a^b : R_a^b \to \mathbb{R}$ ist Integral (erfüllt also 1.-5.)
- $f, g \in R_a^b \Rightarrow \begin{array}{l} \max\{f,g\} : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \in R_a^b \\ \min\{f,g\}, : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \min\{f(x), g(x)\} \in R_a^b \end{array}$
- $f \in R_a^b \Rightarrow\ |f| \in R_a^b,\ |\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$
- $f_n \in R_a^b\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gl.m. $\Rightarrow\ f \in R_a^b,\ \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ \begin{array}{ll} f \text{ stetig} & \Rightarrow\ f \in R_a^b \\ f \text{ monoton} & \Rightarrow\ f \in R_a^b \end{array}$
- $f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \in R_a^b\ \forall n \in \mathbb{N},\ f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ gleichmässig konvergent $\Rightarrow\ f \in R_a^b,\ \int_a^b f = \int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n$
- **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow\ \exists \xi \in [a,b] :\ f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in R_a^b \Rightarrow\ f \cdot p \in R_a^b$

9 Differentiation

Definitionen

- $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}, a \in D :$ f **differenzierbar** in a $:\Leftrightarrow\ \exists \lim_{x \stackrel{\neq}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
  - $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **Ableitung** von f in a
  - f **differenzierbar** $:\Leftrightarrow\ f$ differenzierbar in $a\ \forall a \in D$
  - f **stetig differenzierbar** $:\Leftrightarrow\ f$ differenzierbar, $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig
  - f **n-mal stetig diff.bar** $:\Leftrightarrow\ f$ $(n-1)$-mal diff.bar, $(n-1)$. Abl. stetig diff.bar
  - f **bel. oft diffbar (glatt)** $:\Leftrightarrow\ f$ n-mal stetig diff.bar $\forall n \in \mathbb{N}$
- f **von rechts diff.bar** in a $:\Leftrightarrow\ \exists f'_+(a) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- f **von links diff.bar** in a $:\Leftrightarrow\ \exists f'_-(a) := \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- $x_0 \in D$ **lokales Maximum** von $f : D \to \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : [x \in D, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)]$
  - $\exists \varepsilon > 0 : [x_0 \neq x \in D, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0)]$: x_0 **striktes lokales Maximum**
- $x_0 \in D$ **lokales Minimum** von $f : D \to \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : [x \in D, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)]$
  - $\exists \varepsilon > 0 : [x_0 \neq x \in D, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_0)]$: x_0 **striktes lokales Minimum**
- $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, I \subset D$ Intervall:
  - f **konvex** in I $:\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in I, \lambda \in (0,1) :\ f\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$
  - f **strikt konvex** in I $:\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in I, \lambda \in (0,1) :\ f\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$
  - f **konkav** in I $:\Leftrightarrow$ $-f$ konvex
  - f **strikt konkav** in I $:\Leftrightarrow$ $-f$ strikt konvex
- $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig: $x_0 \in D$ **Wendepunkt** $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 :\ \big[f$ konvex in $(x_0 - \varepsilon) \wedge f$ konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon\big] \vee \big[f$ konkav in $(x_0 - \varepsilon) \wedge f$ konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon\big]$
- $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R} :\ F : D \to \mathbb{R}$ **Stammfunktion** von f $:\Leftrightarrow$ F diff.bar, $F' = f$

Sätze

- $\varphi : D \Rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$ stetig in a $\Rightarrow$ $f : D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $a \in D$
- $f : D \to \mathbb{C}$ in a diff.bar $\Leftrightarrow$ f in a vor rechts und links diff.bar, $f'_-(a) = f'_+(a)$
- $f : D \to \mathbb{C}$ in a diff.bar $\Rightarrow$ f in a stetig
- $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ diff.bar:
  - $f \pm g$ in a diff.bar, $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
  - $f \cdot g$ in a diff.bar, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (**Produktregel**)
  - $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ in a diff.bar, $\big(\frac{f}{g}\big)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$ (**Quotientenregel**)
- **Kettenregel**: $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}, D_f, D_g \subset \mathbb{R}$ offen, $f(D_f) \subset D_g$:
  f in $a \in D_f, g$ in $f(a) \in D_g$ diff.bar $\Rightarrow$ $g \circ f$ in a diff.bar, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$
- **Ableitung der Umkehrfunktion**: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton:
  f in $a \in D$ diff.bar, $f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ f^{-1} in $f(a)$ diff.bar, $(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}$
- $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ diff.bar, x_0 lokalen Extremum von f $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$
- **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**:
  $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar $\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b) :\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- **Satz von Rolle**:
  $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar, $f(a) = f(b) \Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b) :\ f'(\xi) = 0$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_{|(a,b)}$ diff.bar $\Rightarrow$ $|f(b) - f(a)| \leq \max\{|f'(x)| :\ a < x < b\} \cdot (b-a)$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar: f konstant $\Leftrightarrow$ $f' \equiv 0$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar, $c \in \mathbb{R}$:
  $f(x) = a \cdot e^{cx} \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f'(x) = c \cdot f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = a \end{cases}$
- **Monotoniekriterium**: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.bar:
  - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f streng monoton wachsend
  - $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f streng monoton fallend
  - $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f monoton wachsend
  - $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f monoton fallend
- $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.bar, $x_0 \in (a,b), f'(x_0) = 0$
  - $\exists \varepsilon > 0 : \begin{cases} f'(x) \geq 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) \leq 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 lokales Maximum
  - $\exists \varepsilon > 0 : \begin{cases} f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 striktes lokales Maximum
  - $\exists \varepsilon > 0 : \begin{cases} f'(x) \leq 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) \geq 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 lokales Minimum
  - $\exists \varepsilon > 0 : \begin{cases} f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 striktes lokales Minimum
  - f 2-mal stetig diff.bar: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ x_0 striktes lokales Maximum
  - f 2-mal stetig diff.bar: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ x_0 striktes lokales Minimum
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar, f' monoton wachsend $\Rightarrow$ f konvex in $[a,b]$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar, f' streng mon. wachsend $\Rightarrow$ f strikt konvex in $[a,b]$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ 2-mal stetig diff.bar:
  - $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow$ f konvex
  - $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f streng konvex
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_{|(a,b)}$ diff.bar:
  f konvex $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x_0, x \in (a,b)$
- $f : (a,b)\mathbb{R}$ 2-mal diffbar: x_0 Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$
- $f : (a,b)\mathbb{R}$ 3-mal diffbar, $x_0 \in (a,b)$: $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ x_0 Wendepunkt

10 Hauptsatz der Differential- und Integlalrechnung

- **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**: $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in D \Rightarrow \ F : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{x_0}^x f$ diff.bar, $F' = f$
- $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar $\forall n \in \mathbb{R}, (f_n')_n$ gl.m. konvergent $\Rightarrow \ f$ stetig diffbar, $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0 \Rightarrow \ f : (-R, R) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ beliebig oft diff.bar, $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ mit Konvergenzradius R
- **partielle Integration**: $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $[a, b] \subset D \Rightarrow \ \int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g$
- **Transformationssatz bzw. Substitutionsregel**: $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $[a, b] \subset D_g, g([a, b]) \subset D_f \Rightarrow \ \int_a^b f\big(g(t)\big) g'(t) \mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \mathrm{d}x$

11 Lokale Approximation durch Polynome

Definitionen

- $D \subset \mathbb{R}$ offen, $a \in D, f : D \to \ n$-mal diff.bar in a: ***n*-tes Taylor-Polynom** von $f \ : T_a^n f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- $f, g : D \to \mathbb{R} :\ f, g$ **stimmen bei** $a \in D$ **in *n*-ter Ordnung überein** $:\Leftrightarrow\ \exists \varphi : D \to \mathbb{R} :\ \varphi$ stetig, $f(x) - g(x) = (x-a)^n \varphi(x) \quad [f(x) = g(x) + \text{HOT}$[1]$]$
- $f, g : D \to \mathbb{R}, \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 :\ f$ ist für $x \to a$ **von der Ordnung** $o(h)$
- $D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ bel. oft diff.bar, $a \in D :\ T_a(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ **Taylorreihe** von f in a
- $f : D \to \mathbb{R}$ **analytisch** $:\Leftrightarrow\ f \in \mathcal{C}^\infty, \forall a \in D\ \exists r > 0 :\ \forall x \in (a-r, a+r) :\ f(x) = T_a f(x)$

Sätze

- $f : D \to \mathbb{R}, D$ offenes Intervall in $\mathbb{R}, f\ (n+1)$-mal stetig diff.bar in $a \in D, R_{n+1}(x) := f(x) - T_a^n f(x) \Rightarrow \ R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \quad \forall x \in D$
- $f\ (n+1)-$mal stetig diff.bar, $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $\Rightarrow \ \forall x \in D\ \exists \xi \in [a, x] \cup [x, a] :$ $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
- $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar, $a \in D, f'(a) = 0, ..., f^{(n-1)} = 0, f^{(n)}$:
  - $n \in 2\mathbb{N}, f^{(n)} < 0 \Rightarrow \ a$ striktes lokales Maximum
  - $n \in 2\mathbb{N}, f^{(n)} > 0 \Rightarrow \ a$ striktes lokales Minimum
  - $n \in 2\mathbb{N} + 1 \Rightarrow \ a$ kein lokales Extremum
- $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \Rightarrow \ f(x) = T_a^n f(x) + \text{HOT}$
- $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \Rightarrow \ f - T_a^n f(x) = o(|x-a|^n)$ für $x \to a$

[1] higher order terms

12 Kurven in der Ebene

Definitionen

- **euklidischer Abstand**: $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- **euklidische Norm**: $||.||_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = d(x, 0)$
- **parametrisierte Kurve** in $\mathbb{R}^2 :\ D \subset \mathbb{R},\ \gamma : D \to \mathbb{R}^2$ stetig
- γ **differentierbar** $:\Leftrightarrow\ \gamma_1, \gamma_2$ differentierbar
- $\gamma \in \mathcal{C}^1$ **regulär** $:\Leftrightarrow\ \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in D$
- $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle: $\sigma : I \to J$ $\mathcal{C}^k$**-Parametertransformation** $:\Leftrightarrow\ \sigma$ bijektiv, σ, σ^{-1} k-mal stetig diff.bar
- $D \subset \mathbb{R}$ Intervall: $\gamma : D \to \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^1$ **nach der Bogenlänge parametrisiert** $:\Leftrightarrow$ $||\gamma'(x)||_2 = 1 \quad \forall x \in D$
  - **Länge des Weges** $[a, b] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \gamma(x) :\ b - a \quad (a < b \in D)$
- $\gamma : D \to \mathbb{R}^2$ reguläre $\mathcal{C}^1$-Kurve, $[a, b] \subset D$: **Länge der Kurve** γ zwischen a und $b :\ L(\gamma_{|[a,b]}) := \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 \mathrm{d}t$

Sätze

- $||x - y||_2 = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$
- $||x||_2 = |x_1 + x_2 i| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^k$-Kurve, $\sigma : I \to J$ $\mathcal{C}^k$-Parametertransformation $\Rightarrow \ \gamma \circ \sigma : I \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^k$-Kurve
- $\gamma : D \to \mathbb{R}^2$ reguläre $\mathcal{C}^k$-Kurve, $k \geq 1 \Rightarrow \ \exists \sigma : D \to I :\ \sigma$ $\mathcal{C}^k$-Parametertransformation, $\gamma \circ \sigma : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert
  - $t_0 \in D \Rightarrow \ \sigma(t) := \int_{t_0}^t ||\gamma'(s)||_2 \mathrm{d}s \quad$ mögliche Parametertransformation