Contents

1 Zahlen **3**
1.1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion . . . 3
1.1.1 Vollständige Induktion . . . 4
1.1.2 Anordnung der nat. Zahlen . . . 4

2 Abbildungen **6**
2.1 Arten von Abbildungen . . . 6
2.2 Relationen . . . 7
2.2.1 Äquivalenzrelationen . . . 8
2.2.2 Ordnungsrelationen . . . 9
2.3 Kombinatorik . . . 10
2.4 Polynome . . . 11

3 Reelle Zahlen **13**
3.1 Positivität und Anordnung . . . 13
3.2 Betrag . . . 15
3.3 Vervollständigung im Unendlichen . . . 16
3.4 Vollsändigkeit der reellen Zahlen . . . 16

4 Die komplexen Zahlen **21**
4.1 Konstruktion der komplexen Zahlen . . . 21
4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 22

5 Folgen **24**
5.1 Konvergenz von Folgen . . . 24
5.1.1 Rechnen mit konvergenten Folgen . . . 26
5.1.2 Konvergenz und Anordnung (in $\mathbb{R}$) . . . 26
5.2 Monotone und beschränkte Folgen . . . 27
5.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit . . . 30
5.4 Bestimmte Divergenz / uneigentliche Konvergenz . . . 31

6 Reihen **32**
6.1 Definitionen und erste Beispiele . . . 32
6.2 Konvergenzkriterien . . . 33
6.2.1 Konvergenzkriterien von reellen Reihen . . . 37
6.3 Umordnungen von Reihen . . . 37
6.4 Multiplikation von Reihen . . . 39
6.5 Binomialreihe . . . 40
6.6 Potenzreihen . . . 40

7 Stetigkeit **44**
7.1 Gleichmäßige Limiten/Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 46
7.1.1 Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz auf Reihen: . . . 48
7.1.2 Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz auf Potenzreihen . . . 49
7.2 Abbildungsverhalten stetiger Funktionen . . . 49

7.2.1 Zwischenwertsatz . . . 49
7.2.2 Monotone Funktionen und ihre Umkehrfunktionen . . . 50
7.2.3 Topologischer Exkurs: abgeschlossen & kompakt . . . 51
7.2.4 Annahme von Extremwerten . . . 52
7.2.5 Gleichmäßige Stetigkeit . . . 53
7.3 Kontinuierliche Grenzwerte . . . 53
7.3.1 Reformulierungen des Grenzwertbegriffs . . . 54
7.3.2 Varianten des Grenzwertbegriffs . . . 55

8 Differenzierbarkeit **56**
8.1 Definition . . . 56
8.2 Berechnung und Rechenregeln von Ableitungen . . . 58
8.3 Mittelwertsatz und Anwendungen . . . 59
8.4 Mehrfache Differenzierbarkeit . . . 62
8.5 Lokale Approximation durch Polynome . . . 62
8.6 Differenzierbarkeit von Limiten . . . 64
8.6.1 Anwendung für Funktionenfolgen . . . 64
8.6.2 Anwendung für Reihen . . . 64
8.6.3 Anwendung auf Regularität von Potenzreihen . . . 64

9 Trigonometrische Funktionen **67**

10 Integration **70**
10.1 Konstruktion des Integral auf Regelfunktionen . . . 70
10.2 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung . . . 72

A Wichtige Summen **74**

B Wichtige Grenzwerte **74**

C Wichtige Reihen **75**

1 Zahlen

1.1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Definition 1.1.1: Rechengesetze

Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

Assoziativgesetz:

$$(k+m)+n = k+(m+n)$$

und

$$(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$$

Kommutativgesetz:

$$m+n = n+m$$

und

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Distributivgesetz:

$$(k+m) \cdot n = (k \cdot n) + (m \cdot n)$$

Definition 1.1.2: Peano Axiome

Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{N}$ und versehen mit einer Selbstabbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{\nu} \mathbb{N}$ sod. gilt:

1. ν injektiv ("keine Wiederholungen")
2. $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ ("1 ist Anfang")
3. Induktionsprinzip: Ist $M \subset \mathbb{N}$ (Induktive Menge) eine Teilmenge, sod. $1 \in M$ und $\nu(M) \subset M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Beim Zählen durchläuft man die **gesamten** (3.) natürlichen Zahlen **genau einmal** (1. & 2.).
$\Rightarrow$ Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste Induktive Menge.

Definition 1.1.3: Unendliche Menge

Sei M Menge

$$M \text{ undendlich } \Leftrightarrow \exists \text{ injektive Abb.: } \mathbb{N} \to M$$

$\Rightarrow$ Jede unendliche Menge ist min. so mächtig wie $\mathbb{N}$

$$M \text{ unendlich } \Leftrightarrow \exists \text{ Selbstabb.: } M \to M \text{ die injektiv aber nicht surjektiv}$$

1.1.1 Vollständige Induktion

Beweisprinzip (1.Version): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ mathematische Aussage. Wir wollen in endlichen Schritten zeigen, dass Aussage für alle n gilt.

Induktionsanfang: Zeigen, dass $A(1)$ gilt oder $A(n_0)$ für anderes $n_0 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Zeigen, dass für ein (bel.) $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n)$ (Induktionsannahme) $\Rightarrow A(n+1)$

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsschluss)

Beispiel 1.1.1: Bew. durch vollst. Induktion

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist Summe der ersten n nat. Zahlen geg. durch

$$(*) \qquad 1 + 2 + \ldots + n =: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bew.:

Induktionsanfang: $(*)$ gilt für $n = 1$, denn $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ist wahr.

Induktionsschritt: $(*)$ gilt für *ein* $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D.h. $(*)$ gilt auch für $n+1$.

Induktionsschluss: Mit vollst. Induktion folgt $(*)$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beweisprinzip (2.Version) Wir verwenden beim Induktionsschritt *mehrere* (z.B. alle) "vorher" gezeigten Aussagen.

Induktionsanfang: $A(n_0)$ gilt.

Induktionsschritt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq n_0$ gilt: $A(m)$ gilt für alle $n_0 \leq m \leq n \Rightarrow A(n+1)$ gilt.

Induktionsschluss: Dann gilt $A(n)$ für **alle** $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beweisprinzip wird aus dem Induktionsprinzip mit Menge
$M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(m) \text{ gilt für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n\}$ abgeleitet.

1.1.2 Anordnung der nat. Zahlen

Satz 1.1.1: Wohlgeordnet (Reformulierung des Induktionsprinzips)

$(\mathbb{N}, <)$ ist wohlgeordnet, d.h. jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält ein *kleinstes* Element.

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, sind *nicht* wohlgeordnet.
Induktion über wohlgeordnete Mengen heißt *transfinite Induktion*

Definition 1.1.4: Konstruktion (Definition) durch vollst. Induktion

Sukzessive Definition einer unendlichen Folge mathematischer Objekte O_n für $n \in \mathbb{N}$:

1. Definition des Anfangsobjekts O_1
2. Festlegung einer Vorschrift, wie das Objekt O_n für $n > 1$ durch die bereits konstruierten Objekte O_m für $m < n$ festgelegt wird (Rekursion).

Damit liefert "Induktion" gesamte Folge von Objekten O_n für alle $n \in \mathbb{N}$ "auf einmal".

Beispiel 1.1.2

Gegeben ist Folge $a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen.
Folge der Partialsummen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ wird induktiv definiert.
Strenggenommen rekursiv def. durch $\begin{cases} S_1 := a_1 \\ S_n := S_{n-1} + a_n \text{für } n \geq 2 \end{cases}$

Eigenschaften zur induktiven Definition:
Gegeben Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. (Abb. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, a \mapsto a_n$)
Dann kann man Folge durch Partialprodukte bilden $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$.
Indutktiv durch: $\begin{cases} p_1 := a_1 \\ p_n := p_{n-1} \cdot a_n \end{cases}$
Konvention leeres Produkt: $p_0 := 1$

2 Abbildungen

Definition 2.0.1: Bild

Sei $U \subset A$ Teilmenge, dann ist das Bild von U

$$f(U) = \{f(a) \mid a \in U\} \subset B$$

und

$$Bild(f) := f(A) \subset B$$

Definition 2.0.2: Urbild

Urbild der Teilmenge $V \subset B$ ist

$$f^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) \in V\}$$

Insbesondere ist $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) \subset A$ **Niveaumenge** von f zum Wert b.
A wird also von den f-Niveaumengen **partitioniert**.
Partition: $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$

Definition 2.0.3: Karthesisches Produkt\Produktmenge

Seien A, B Mengen

Karthesisches Produkt $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Definition 2.0.4: Graph einer Abb.

Graph einer Abb. $f : A \to B$ ist definiert als

$$Graph(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

Graph enthält gesamte Information über Abb. f.

2.1 Arten von Abbildungen

Sei $f : A \to B$ Abb.

Definition 2.1.1: Injektiv

f injektiv falls gilt

$$a, a' \in A \text{ mit } f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

D.h. es wird ausgeschlossen, dass zwei versch. Elemente auf das selbe Element in der Zielmenge abb.

$\Rightarrow$ "Einbettung" von Menge in Zielmenge

Definition 2.1.2: Surjektiv

f surjektiv falls gilt:

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b$$

D.h. **jedes** Element in der Zielmenge wird getroffen. $\Rightarrow$ $Bild(f)$ füllt Zielmenge komplett aus.

Definition 2.1.3: Bijektiv

f bijektiv, falls f sowohl **injektiv** und **surjektiv**.
Auch "eineindeutige Abbildung" genannt.

- Bijektion **identifiziert** Elemente der beiden Mengen miteinander.
- Bijektion $f : A \to B$ besitzt **wohldefinierte Umkehrabb.** $f^{-1} : B \to A$
- **Identität:** $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$

Definition 2.1.4: Bijektive Selbstabb.

$$\sigma : M \to M \text{ ist bijektive Selbstabb. } \Leftrightarrow: \text{ Permutation}$$

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \; i \mapsto \sigma(i)$$

Definition 2.1.5: Eingeschränkte Abb.

Sei $f : A \to B$, $T \subset A$
$f|_T : T \to B$ ist *Einschränkung* oder *Restriktion* der Abb. f auf die Teilmenge T.

2.2 Relationen

Man definiert Relation zwischen Elementen einer Menge A und einer Menge B als Teilmenge R der Produktmenge $R \subset A \times B$, z.B. Graphen von Abb.

Definition 2.2.1: Relation

Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$ (auch Produktmenge von mehr als zwei Mengen möglich).
Eine Relation R zwischen zwei Elementen $x, y \in M$ *besteht*, falls $(x, y) \in R$.

- Notation: xRy , oft auch andere Symbole wie "$<$" oder "$\sim$".

- Einschränkung: Falls $T \subset M$ gilt, heißt $R \cap (T \times T)$ die *Einschränkung* der Relation R auf die Teilmenge T.
- Besonders wichtige / häufig auftretende Arten von Relationen:
  - Äquivalenzrelationen $\rightarrow$ (Quotientenbildung)
  - Ordnungsrelationen

2.2.1 Äquivalenzrelationen

Definition 2.2.2: Äquivalenzrelation

Eine Relation "$\sim$" auf M heißt *Äquivalenzrelation* falls:

1. **Reflexiv:** $x \sim x \quad \forall x \in M$
2. **Symetrisch:** Für $x, y \in M$ gilt: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. **Transitiv:** Für $x, y, z \in M$ gilt: $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Definition 2.2.3: Äquivalenzklassen

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\} \subset M$$

ist die vom Element x repräsentierte *Äquivalenzklasse* in M.

Lemma 2.2.1: Dichotomie von Äquivalenzklassen

Für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt die *Dichotomie*, dass $\begin{cases} [x] = [y] & \text{falls } x \sim y \\ [x] \cap [y] = \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ die Äquivalenzklassen *partitionieren* die Menge M.

Definition 2.2.4: Quotientenprojektion

Es besteht die natürliche Abb.

$$\pi : M \quad \rightarrow \quad M/_{\sim} \ := \{[x] \mid x \in M\}$$

(Menge der Äquivalenzklassen).

- Anschaulich beschrieben "kollabiert" die Abbildung die Äquivalenzklassen zu Elementen.

Beispiel 2.2.1: Äquivalenzrelationen.

1. (a) *"Gleichheit"* (kleinste mögliche Äquivalenzklasse)
   (b) Größte Relation ist auch Äquivalenzrelation. Def. durch $x \sim y \, \forall x, y \in M$
2. Aus Elementargeometrie:
   (a) *"Parallel"* für Geraden in der Ebene
   (b) *"Kongruenz"* geometrischer Figuren.
   (c) *"Ähnlichkeit"*
3. Auf $\mathbb{Z}$: "gleicher Rest modulo n", $n \in \mathbb{N}$ fest. Diese Äquivalenzklassen heißen *"Restklassen"* modulo n.

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

4. Äquivalenzrelation auf Klasse aller Mengen def. durch

$$M \sim M' \;:\Leftrightarrow\; \exists\, bij.:\; M \to M'$$

$\to$ Mengen sind "gleichmächtig"
Äquivalenzklassen dazu heißen *"Mächtigkeiten"* oder auch *"Kardinalzahlen"*.

2.2.2 Ordnungsrelationen

Definition 2.2.5: Partielle Ordnung

Eine Relation "$\prec$" auf einer Menge M heißt *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*, falls:

1. **Irreflexiv:** $x \not\prec x \quad \forall x \in M$
2. **Transitiv:** $x \prec y$ und $y \prec z \Rightarrow x \prec z$

Also gilt für alle $x, y \in M$ *höchstens* eine der Eigenschaften:

$$(\star) \qquad x \prec y\,, \quad x = y\,, \quad y \prec x \quad (:\Leftrightarrow x \succ y)$$

Zugehörige *schwache* Ordungsrelation: $x \preceq y \;:\Leftrightarrow\; x \prec y$ oder $x = y$
Außerdem gilt: $x \preceq y$ und $y \preceq x \Rightarrow x = y$.

Definition 2.2.6: Totalordnung

Eine parielle Ordnung "$\prec$" heißt *Totalordnung*, falls außerdem für alle $x, y \in M$ stets (genau) eine der $(\star)$ Eigenschaften gilt.

Beispiel 2.2.2: Ordnungsrelation

1. leere Relation (part. Ordnung)
2. "$<$" auf $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung (schwache Rel.: "$\leq$"
3. Echte Inklusion "$\subsetneq$" auf $P(M)$ ist *partielle* Ordnung (schwache Rel.: "$\subset$"
4. "Echter Teiler von" auf $\mathbb{N}$ ist *parielle* Ordung. (Bsp.: $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$) (schwache Rel.: "Teiler von")

Definition 2.2.7: Intervalle

Sei partielle Ordnung auf einer Menge M gegeben.
Dann sind *Intervalle* als "Abschnitte" definiert.

(beschr.) offenes Intervall	$(a,b) := \{x \in M \mid a \prec x \prec b\}$
(beschr.) halboffenes Intervall	$[a,b) := \{x \in M \mid a \preceq x \prec b\}$
	$(a,b] := \{x \in M \mid a \prec x \preceq b\}$
abgeschlossenes Intervall	$[a,b] := \{x \in M \mid a \preceq x \preceq b\}$

2.3 Kombinatorik

Definition 2.3.1: Anordnung

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es $n!$ Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen.
Unter *Anordnung* verstehen wir eine Bijektion:

$$\{1, \dots, n\} \to \{O_1, \dots, O_n\}, \quad i \mapsto O_{\alpha(i)}$$

Entspricht *Permutation*

Definition 2.3.2: Binomialkoeffizienten

$n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{Q}^+$, also nur rational.
  Ganzzahligkeit folgt aus der kombinatorischen Interpretation als Anzahl.
- Für $n, k \in \mathbb{N}$, $(k \leq n)$ besitzt eine n-elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen

- Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man aus einer Menge von n verschiedenen Objekten jeweils k Objekte auswählen kann (ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge).

Eigenschaften Binomialkoeffizienten:

1. *Symetrie:* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$
2. *Rekursion:* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $1 \leq k \leq n$

Definition 2.3.3: Binomischer Lehrsatz

$n \in \mathbb{N}_0,\ a, b \in \mathbb{R}$ oder beliebiger kommutativer Ring.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n\, b^{n-k}$$

und

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Theorem 2.3.1: Additionstheorem der Binomialkoeffizienten

Für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

2.4 Polynome

Definition 2.4.1: Polynome

Unter einem Polynom versteht man Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Eigenschaften:

- a_i sind die *Koeffizienten*
- Wenn $a_n \neq 0$, ist die Zahl n der *Grad des Polynoms.*
- Sind alle $a_i = 0$ so ist das Polynom ein *Nullpolynom.* Das Nullpolynom hat Grad -1.
- Ist $P(x) = 0$ so wird x *Nullstelle* genannt.

- Der Quotient zweier Polynome $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ heißt *rationale Funktion.*
- Ist $GradP = n \geq 1$ und ξ vorgegeben. Dann hat P die Darstellung

$$P(x) = P(\xi) + (x - \xi)Q(x)$$

  wobei $GradQ = n - 1$ ist.
  Ist ξ Nullstelle von P so folgt $P(x) = (x - \xi)Q(x)$.

Definition 2.4.2: Rechenregeln für Polynome

Sind P und Q Polynome, so sind auch λP, $P + Q$, und PQ Polynome.
Addition: Die Polynome werden Koeffizientenweise addiert

$$P(x) + Q(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)x^i$$

Multiplikation: Für $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ ist

$$P(x)Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m+n} x^{m+n}$$

mit

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$$

Es gilt $Grad(PQ) = Grad(P) + Grad(Q)$

Satz 2.4.1: Nullstellensatz für Polynome

Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen.
Sind die Koeffizienten aus den komplexen Zahlen so ist mindestens eine Nullstelle auch aus den komplexen Zahlen.

Satz 2.4.2: Identitätssatz für Polynome

Zwei Polynome vom Grad $\leq n$, welche an $n+1$ Stellen übereinstimmen (d.h. sie haben die selben Koeffizienten), sind identisch.

3 Reelle Zahlen

Die rellen Zahlen sind durch folgende Strukturen und Eigenschaften (Axiome) charakterisiert, die sich aus ihrer Konstruktion ergeben.

- Körperstruktur
- Anordnung
- Vollständigkeit

3.1 Positivität und Anordnung

Die Anordnung reeller Zahlen ergibt sich aus dem Begriff der *Positivität*.

Definition 3.1.1: Postitivität bei reellen Zahlen

in $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ ausgezeichnet, deren Elemente man positive Zahlen nennt und die folgende *Eigenschaften (Axiome)* erfüllt:

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt *genau eine* der Aussagen:

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0, \quad -a = \mathbb{R}^+$$

2. *Abgeschlossenheit* bzgl. Addition und Multiplikation, d.h.:

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}^+$$

Bem.:

- $a \in \mathbb{R}$ *negativ* $:\Leftrightarrow \quad -a \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- := -\mathbb{R}^+ := \{-b \mid b \in \mathbb{R}^+\}$
  (1.) besagt, dass die *disjunkte* Zerlegung besteht:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}^+$$

- Aus den Axiomen folgen die *Rechenregeln für Vorzeichen bei Multiplikation*:

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot (-b) = -ab \in \mathbb{R}^-$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab \in \mathbb{R}^+$$

- *Anordnung* folgt aus Positivität, d.h. die Relation "$<$" auf $\mathbb{R}$, wird def. durch

$$a < b :\Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$

- "$<$" ist *Totalordnung* auf $\mathbb{R}$ (Erfüllt die Axiome der Totalordnung).

- Anordnung von $\mathbb{R}$ ist *translationsinvariant* wegen additiver Abgeschlossenheit von Positivität:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ bijektiv }, x \mapsto x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Beispiel 3.1.1: Regeln

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d \tag{1}$$

$$0 < a < b \wedge 0 < c \leq d \Rightarrow 0 < ac < bd \tag{2}$$

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \tag{3}$$

Definition 3.1.2: Fundamentale Ungleichung (Quadrate)

Quadrate sind nicht-negativ

$$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Gleichheit gdw. $x = 0$

Bem.:

- Quadrate sind nicht-neg. und *Jede nicht-neg. Zahl ist Quadrat einer reellen Zahl.*
  $\Rightarrow$ Die positiven Zahlen sind genau die Quadratte der reellen Zahlen $\neq 0$. D.h. auf dem Körper $\mathbb{R}$ existiert genau eine Anordnung / Begriff von Positivität der die oben genannten Axiome erfüllt.
- Insbesondere ist klar: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ genauer: $\boxed{\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}}$
  Denn: $1 = 1^2 > 0$ und $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n-mal}} > 0$
  $\Rightarrow \mathbb{Q}^+ := \mathbb{Q} = \mathbb{R}^+ = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Definition 3.1.3: Archimedizität

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a < n$$

D.h. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ besitzt keine obere Schranke.
Variante:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad -n < a < n$$

Äquivalent zur Archimedizität:

Definition 3.1.4: Satz von Endoxos

$$\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{n} < \epsilon$$

Satz 3.1.1: $\mathbb{Z}$ ist Diskretisierung von $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! z \in \mathbb{Z}$ mit

$$(\star) \qquad z \leq a < z+1$$

Also kann z als ganzzahliger Anteil von a (Bez.: $[a] \in \mathbb{Z}$) gesehen werden.
$(\star)$ wird also zu $[a] \leq a < [a]+1$.

Diese Diskretisierung kann beliebig verfeinert werden, indem sie auf *kleinerer Skala* durchgeführt wird:

$$\begin{array}{rcccc} & [na] & \leq & na & < & [na] \\ \Rightarrow & \dfrac{[na]}{n} & \leq & a & < & \dfrac{[na]+1}{n} \end{array}$$

$\dfrac{[na]}{n}$ und $\dfrac{[na]+1}{n} \in \dfrac{1}{n}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

$\rightarrow$ Approximation von a mit 'Unschärfe' $\dfrac{1}{n}$

$\rightarrow$ Jedes nichtleere Intervall in $\mathbb{R}$ *enthählt rationale Zahlen.*

Satz 3.1.2

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Reelle Zahlen sind *beliebig gut* durch rationale Zahlen *approximierbar.*
Bemerkung.:
'Fast alle' (alle bis auf abzählbar viele) rellen Zahlen sind *irrational.*

3.2 Betrag

Definition 3.2.1: Betrag

Für eine relle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist ihr *(absolut) Betrag* $|a| \in \mathbb{R}_0^+$ def. als:

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ falls } a \geq 0 \\ -a & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Definition 3.2.2: Beziehung Betrag und Körperstruktur

1. *Addition: Dreiecksungleichung:* $|a+b| \leq |a| + |b|$
   Mit Gleichheit gdw. a und b gleiches Vorzeichen haben, oder eine der beiden Zahlen $= 0$ ist.
2. *Multiplikation:* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

- Betrag ist *Abstandsmessung* auf $\mathbb{R}$ (Betrag ist Abstand von der 0)
  Fasse $|a-b|$ geom. als Abstand von a und b auf. Bzw. als *Länge* des Intervalls mit Endpunkten a und b.

- $\triangle$ - Ungleichung in ihrer (äquivalenten) allgemeinen Form:

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c| \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

  ist eine Ungl. für Seitenlängen des entarteten Dreiecks mit Eckpunkten a, b, c

3.3 Vervollständigung im Unendlichen

Reellen Zahlen haben geom. gesprochen zwei 'unendliche Enden' in pos./neg. Richtung. Man fügt zu $\mathbb{R}$ zwei Elemente hinzu:

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$$

Das Abschliessen der Enden wird dadurch formalisiert, dass man die *Anordnung* von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnt:

$$-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{insbesondere} \quad -\infty < +\infty$$

Die erweiterte Zahlengerade $(\overline{\mathbb{R}}, <)$ bleibt *totalgeordnet*

Algebraisch betrachten wir $\pm\infty$ *nicht* als gleichberechtigte Zahlen denn Addition und Multiplikation lassen sich nur partiell sinnvoll ausdehnen:

- Sinnvolle Konventionen:

$$(\pm\infty) + a = \pm\infty, \quad (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty, a > 0, \quad (+\infty) + (+\infty) = \infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

- *Nicht* sinnvoll definierbar:

$$(+\infty) - \infty \quad \text{und} \quad \pm\infty \cdot 0$$

3.4 Vollsändigkeit der reellen Zahlen

Definition 3.4.1: Dedekind-Schnitt

Ein *Dedekind-Schnitt* von $\mathbb{Q}$ ist eine *disjunkte* Zerlegung $\mathbb{Q} = A \sqcup B$, sod. gilt:

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A < B$ im Sinne, dass $a < b \forall a \in A, b \in B$ gilt.
3. B hat kein minimales Element (Beseitigt 'Zweideutigkeit')

Dann entsprechen
die rat. Zahlen $\longleftrightarrow$ Dedekind-Schnitte bei denen A ein max. Element hat.
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\} \sqcup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > q\}$

Definition 3.4.2: Lücke von $\mathbb{Q}$

Eine Lücke von $\mathbb{Q}$ ist ein Dedekind-Schnitt $\mathbb{Q} = A \sqcup B$, bei dem A *kein max. Element* hat. 'Lücke zwischen A und B '.
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ hat Lücken.

Beispiel 3.4.1

$x^2 = 2$ hat *keine rationale* Lösung.
Dedekind-Schnitt:

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oder } x^2 < 2\} \sqcup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > 2$$

$\Rightarrow$ kein $x \in \mathbb{Q}$ wird ausgelassen also wirklich disjukte Zerlegung.

Definition 3.4.3: Obere Schranke

$H \subset \mathbb{R}$.
eine *obere Schranke* von M ist eine Zahl s, sodass

$$x \leq s \quad \forall x \in M$$

Existiert eine solche, so heisst M *nach oben beschränkt*

Definition 3.4.4: Supremum

Ein *Supremum* von M ist eine kleinste obere Schranke s' von M, d.h. es gilt: $s \leq s'$ für alle obere Schranken von M (I.A. ist Supremum $\notin M$).

Definition 3.4.5: Maximum

Ein *Maximum* von M ist ein grösstes Element von M (Maximum ist per Def. $\in M$).

Beispiel 3.4.2

1. Beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthalten i.A *keine* Maxima und Minima.
   Beschränkte Intervalle $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ jeweils $\inf = a$ und $\sup = b$.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat kein Min aber Max. bei 1.
   Aus Satz von Eudoxos folgt: 0 ist grösste untere Schranke, d.h. $\inf = 0$

Satz 3.4.1: Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$

Jede nach oben beschänkte nichtleere Teilmenge besitzt ein Supremum.

Lemma 3.4.1

Seien $\emptyset \neq M, M' \subset \mathbb{R}$ mit $M \leq M'$ (d.h. $x \leq x' \, \forall x \in M,\ x' \in M'$). Dann gilt

$$\sup M \leq inf M'$$

Es ist natürlich, Suprema und Infima allgemeiner in den erweiterten reellen Zahlen zu definieren, um unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit zu erfassen.
Für $M \subset \mathbb{R}$ gilt (innerhalb von $(\overline{\mathbb{R}}, <)$):

- $\sup M = +\infty \quad \Leftrightarrow M$ *nicht* nach oben beschränkt.
- $\inf M = -\infty \quad \Leftrightarrow M$ *nicht* nach unten beschränkt.
- $\sup M = -\infty \quad \Leftrightarrow M = \emptyset$

Die Supremumseigenschaft besitzt für $\overline{\mathbb{R}}$ die vereinfachte Formulierung:
Jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt sowohl ein Supremum als auch ein Infimum (in $\overline{\mathbb{R}}$).

Vorsicht:
$\inf M \leq \sup M$, falls $M \neq \emptyset$
$\inf \emptyset = +\infty$, $\quad \sup \emptyset = -\infty$.

$\rightarrow$ *Axiome für* $\mathbb{R}$*:*

- Körper Axiome
- Axiome für Positivität $\rightarrow$ Totalordnung von $\mathbb{R}$ durch "$<$".
- Vollständigkeit in Form der Sup.-Eigenschaft $\rightarrow$ Archimedizität.

Aus der Sup.-Eig. folgt, dass die irrationalen reellen Zahlen alle Lücken von $\mathbb{Q}$ füllen, dass $\mathbb{R}$ *lückenlos* ist.

Beh.:

1. Die nat. Abb.
$$\mathbb{R} \rightarrow \{\text{Dedekind-Schnitte von } \mathbb{Q}\}$$
$$r \mapsto (\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\} \sqcup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$$
ist bijektiv und bildet $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (irrationale reelle Zahlen) auf die Lücken von $\mathbb{Q}$ ab.

2. Zu jedem Schnitt von $\mathbb{R}$, d.h. disjukte Zerlegung $\mathbb{R} = A' \sqcup B'$ in nichtleere Teilmengen mit $A' < B' \quad \exists! r' \in \mathbb{R}$ mit $A' \leq r' \leq B'$ nämlich $r' = \sup A' = \inf B'$.
Entweder $r' = \max A'$ oder $r' = \min B'$ (je nachdem ob $r' \in A'$ bzw. $r' \in B'$)

Bem.:

- Umgekehrt impliziert die Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$ die Supremums-Eigenschaft, denn mit $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschr. und nichtleer, ist

$$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in M \text{ mit } x \leq m\} \sqcup \{x \in \mathbb{R} \mid x > m, \forall m \in M\}$$

- Lückenlosigkeit $\implies$ Schnitt durch ein $r \in \mathbb{R}$ (r ist kleinste obere Schranke für M, also $r = \sup M$).

Beispiel 3.4.3: Existenz von Quadratwurzeln als Anwendung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Beh.: Für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$ *existiert* ein *eindeutiges* $r \in \mathbb{R}_0^+$ mit $r^2 = a$
Reformulierung: Die Quadradfunktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$ ist *bijektiv.*
Bew.:

- Eindeutigkeit (von r) / Injektivität (der Quadratfunktion):
  Folgt direkt aus der strikten Monotonie der Quadratfunktion. D.h. aus

$$0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^2 < y^2$$

- Existenz / Surjektivität:
  Beh. klar für $a = 0$. Wir nehmen daher an, dass $a > 0$. Betrachte Schnitt von $\mathbb{R}$ (der der gesuchen Q.wurzel entsprechen sollte)

$$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ oder } x^2 \leq a\} \sqcup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > a\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R} = A \sqcup B$$

  Beobachte:

  1. A und B nichtleer, sogar nichtleerer Durchschnitt mit $\mathbb{R}^+$, denn

$$\begin{cases} \min(1,a) \in A, & \text{denn } \min(1,a) \cdot \min(1,a) \leq 1 \cdot a \leq a \\ a + \frac{1}{2} \in B, & \text{denn } (a + \frac{1}{2})^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} \geq a \end{cases}$$

  2. Wegen der strikten Monotonie der Quadratfunktion gilt $A < B$.
     Unter der Verwendung der *Supremums-Eigenschaft* von $\mathbb{R}$ def. wir $r := \sup A$, dann auch $r = \inf B$.

  Es muss aber noch gezeigt werden, dass $r^2 = a$
  Denn a priori könnte die Q.fnkt. den Wert a 'auslassen' indem sie 'springt'. Dass dies nicht passiert, zeigen wir folgende Abschätzungen:

Sei $0 < \delta < \min(1, a)$ bel. Dann gilt $r - \delta > 0$ und somit

$$(r-\delta)^2 \leq a < (r+\delta)^2$$
$$\Rightarrow -2\delta r - \delta^2 < r^2 - a \leq 2\delta r - \delta^2 < 2\delta r + \delta^2$$
$$\Rightarrow |r^2 - a| < \delta(2r+\delta) \quad \text{für beliebiges Delta}$$

Dann sei $\epsilon > 0$ bel. Dann können wir δ so wählen, dass

$$0 < \delta < \min(1, a, r, \frac{\epsilon}{3r}) \in \mathbb{R}^2$$

und es folgt

$$\delta(2r+\delta) < \frac{\epsilon}{3r} \cdot (2r + r) = \epsilon$$

Es folgt weiter

$$0 \leq |r^2 - a| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow |r^2 - a| = 0 \Leftrightarrow r^2 = a$$

Definition 3.4.6: Intervallschachtelung

Die Intervallschachtelung ist eine Folge beschränkter abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ sod.

1. $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$
2. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| = b_n - a_n < \epsilon$

Eine solche Intervallschachtelung kann *höchstens eine* reelle Zahl einschliessen:

$$x, x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \Rightarrow \quad |x - x'| \leq b_{n(\epsilon)} - a_{n(\epsilon)} < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$
$$\Rightarrow |x - x'| = 0 \ \Rightarrow \ x = x'$$

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ impliziert, dass *stets* eine Zahl eingeschlossen wird.

- Eine reelle Zahl durch immer genauere *Eingrenzung* immer genauer zu bestimmen, führt zum Begriff der *Intervallschachtelung*

Satz 3.4.2: Intervallschachtelungsprinzip

Zu jeder Invervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ *existiert* $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$$

4 Die komplexen Zahlen

Anforderungen an die komplexe Zahlen:
Erweiterung des Zahlenbereichs $\mathbb{R}$ (algebraische Struktur mit Addition und Multiplikation) unter Beachtung der Rechenregeln (Assoziativ, Kommutativ, Distributiv) $\rightarrow$ also *Körpererweiterung*.

Definition 4.0.1: Komplexe Zahl

Es existiert eine neue (nichtleere) Zahl i mit $i^2 = -1$. Die sog. *imaginäre Einheit*. Aus ihr und den reellen Zahlen gehen die kompl. Zahlen hervor:

$$z = a + b \cdot i \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Realteil: $\mathrm{Re}z := a$
Imaginärteil: $\mathrm{Im}z := b$

4.1 Konstruktion der komplexen Zahlen

Wir definieren die den komplexen Zahlen zugrunde liegende Menge als

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Die Paare (a, b) reeller Zahlen modelieren die komplexen Zahlen $z = a + bi$.
Rechenoperationen:

Addition: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

Es gelten die **Körperaxiome**:

1. Addition u. Multiplikation sind assoziativ und kommutativ und es gilt das Distributivgesetz.

2. Neutrale Elemente: $(0, 0) =: 0$ für Addition und $(1, 0) =: 1$ für Multiplikation.

3. Inverse Elemente:

   Addition: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
   Multiplikation: $(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) = (1, 0)$ falls $(a, b) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper.
$\mathbb{C}$ ist Erweiterung von $\mathbb{R}$. Körpereinbettung: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$.

Definition 4.1.1: Imaginäre Einheit

Die *imaginäre Einheit* $i \in \mathbb{C}$ wird definiert als $i := (0,1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann ist

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

Bem.:

- Auf $\mathbb{C}$ gibt es keinen Begriff der *Positivität*
- $\mathbb{C}$ besitzt keine nichttriviale Körpererweiterung eindlichen Grades.

4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Definition 4.2.1: Komplexe Konjugation

Körper $\mathbb{C}$ hat natürliche algebraische *Symetrie* (Körperautomorphisumus).

$$\bar{z} := a - bi = \text{ Im } z - i \text{ Re } z$$

Eigenschaften:

1. Erhält Addition u. Multiplikation: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
2. Involutorisch, d.h. $\bar{\bar{z}} = z$, insbesondere bijektiv.
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$
4. $\text{Re } z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im } z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
5. $z \cdot \bar{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$

Bem.:

- $z \cdot \bar{z} \geq 0$ mit Gleichheit g.d.w $z = 0$.
- $\pm i$ ist einzige Nullstelle von $z^2 + 1$.

Definition 4.2.2: Rechenregeln komplexe Zahlen

- *Addition:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- *Subtraktion:* $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- *Multiplikation:* $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc)i + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- *Division:* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

Definition 4.2.3: Betrag/Größe komplexer Zahlen

Größe komplexer Zahlen wird gemessen durch:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} \in \mathbb{R}_0^+$$

$\rightarrow$(Absolut-) Betrag von $z \in \mathbb{C}$.

Eigenschaften:

1. $|z| \geq 0, \quad$ mit Gleichheit gdw. $z = 0$
2. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad$ Gleichheit gdw. $z \in \mathbb{R}$ oder $z \in i\mathbb{R}$.
3. $|\bar{z}| = |z|$
4. *Dreiecksungl.:* $|z + w| \leq |z| + |w|$
   Mit Gleichheit gdw. $\exists \lambda \in R_0^+$ sod. $w = \lambda z$ oder $z = \lambda w$
   $\Leftrightarrow z = 0$ oder $\exists \lambda \in \mathbb{R}_0^+$ mit $w = \lambda z$
   $\Leftrightarrow z, w \in [0, 1] \cdot (z, w) := \{s(z + w) \mid 0 \leq s \leq 1\}$
5. *Multiplikativ:* $|zw| = |z| \cdot |w|$

Beispiel 4.2.1

1. Zerlegung von $a^2 + b^2$ (Variation der 3. binomischen Formel$(a^2 + b^2 = (a + b)(a - b))$)
   $a^2 + \underbrace{b^2}_{=-(-b^2)=-(bi)^2} = a^2 - (bi)^2 = (a + bi)(a - bi)$
2. Die (nichtoffensichtliche) reelle Identität
   $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ ergibt sich auf nat. Weise durch den Umweg über das Komplexe

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i \cdot (ac - bd) - (ad + bc)i \\
&= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2
\end{aligned}$$

5 Folgen

Definition 5.0.1: Folge

Eine (unendliche, mit $\mathbb{N}$ indizierte) Folge in einer Menge M ist eine Abb. $\mathbb{N} \to M$.
Notation:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, die der Abb. $\mathbb{N} \to M, n \mapsto x_n$ entspricht.

Bem.:

- Folgenglieder x_n müssen nicht verschieden sein.
- Andere Indexmengen statt $\mathbb{N}$ möglich.

5.1 Konvergenz von Folgen

Definition 5.1.1: Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ *konvergiert* in $\mathbb{C}$, falls $a \in \mathbb{C}$ existiert mit der Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$$

sodass gilt

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n(\epsilon)$$

Die Zahl a heißt dann der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n).

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, oder kurz: $a_n \to a$ (für $n \to \infty$)

Geom. Bedeutung: Spätestens ab Folgenglied $a_{n(\epsilon)}$ liegen alle weitern Folgenglieder $a_n, n \geq n(\epsilon)$ in einer *offenen Kreisscheibe*

$$D_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \epsilon\}$$

Eindeutigkeit des Grenzwerts: Konvergiert eine Folge in $\mathbb{C}$, so ist ihr Grenzwert *eindeutig* bestimmt.

Nullfolge: Eine Folge die gg. 0 konv. heißt *Nullfolge*. Daraus folgt

$$a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \to 0$$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

Definition 5.1.2: Umgebung

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *Umgebung* von $a \in \mathbb{C}$ falls $\epsilon > 0$ existiert mit $D_\epsilon(a) \subset U$

Motivation: Eine Umgebung eines Punktes enthält alle Punkte, die ihm "hinreichend nah " sind. D.h. man kann sich ihm außerhalb der Umg. nicht beliebig nähern.

Definition 5.1.3: Topologische Reformulierung des Konvergenzbegriffs

Mit Hilfe der Umgebungsbegriffs:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{Jede Umgebung von } a \in \mathbb{C} \text{ enthält } \textit{fast alle} \text{ Folgenglieder}$$

Eindeutigkeit des Grenzwerts:
Konvergiert eine Folge in $\mathbb{C}$, so ist ihr Grenzwert *eindeutig* bestimmt.

Definition 5.1.4: Nullfolge

Eine Folge die gg. 0 konv. heißt *Nullfolge*

Bem.:

$$a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \to 0$$

Jede $D_\epsilon(0) = \{|z| < \epsilon\}$ enthält fast alle a_n. Also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

Beispiel 5.1.1

Eudoxos $\quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Bew.: Zu $\epsilon > 0$ ex. wegen Eudoxos $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n(\epsilon)} < \epsilon$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(\epsilon)} < \epsilon, \quad n \geq n(\epsilon)$. Also $\frac{1}{n} \in [0, \epsilon) \subset D_\epsilon(0) \quad \forall n \geq n(\epsilon)$.

Allgemeiner: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ (weil $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$)

Bem.:

1. Für Folgen (a_n) in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ gilt
   - $a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a \\ \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a \end{cases}$
   - $a_n \to a \quad \Rightarrow \quad \overline{a_n} \to \overline{a}$
   - $a_n \to a \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to |a|$
2. Konvergenz ist stabil unter Störungen. D.h. seien (a_n) und (a'_n) Folgen in $\mathbb{C}$, sod. $a'_n - a_n \to 0$. Dann gilt für $a \in \mathbb{C} \quad a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad a'_n \to a$

Definition 5.1.5: Divergenz

Man sagt, dass eine Folge *divergiert*, falls sie *nicht konvergiert.*

Beispiel 5.1.2

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ in $\mathbb{R}$ divergiert, denn jedes $a \in \mathbb{R}$ besitzt eine Umgebung $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ in $\mathbb{R}$, die nicht fast alle Folgeglieder a_n enthält.
   Denn wählen wir $\epsilon > 0$ hinreichend klein, so ist -1 oder 1 nicht in $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ enthalten, $\{-1, 1\} \nsubseteq (a-\epsilon, a+\epsilon)$.
   Folglich enthält $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ dann nicht fast alle $a_n, n \in \mathbb{N}$, d.h. a ist nicht Grenzwert von (a_n). Das gilt $\forall a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (a_n)$ divergiert.

2. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt: $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$
   Da $\frac{1}{|z|^n}$ über alle Schranken wächst, weil $\frac{1}{|z|} > 1$
   Impliziert für alle $\epsilon > 0$: $\frac{1}{|z|^n} > \frac{1}{\epsilon}$ für fast alle $n \Rightarrow |z|^n < \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $D_\epsilon(0)$ enthält fast alle Folgengl. $|z|^n$.

5.1.1 Rechnen mit konvergenten Folgen

Definition 5.1.6: Rechenregeln konvergenter Folgen

Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{C}$ die konvergieren $a_n \to a$, $b_n \to b$, dann gilt:

1. $a_n + b_n \quad \to \quad a + b, \qquad a_n - b_n \quad \to \quad a - b$
2. $a_n \cdot b_n \quad \to \quad a \cdot b$
3. Falls $b \neq 0$, dann gilt : $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

5.1.2 Konvergenz und Anordnung (in $\mathbb{R}$)

Definition 5.1.7: Vergleichsprinzip

Seien (a_n) und (b_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, sod. $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann: $a \leq b$.

Definition 5.1.8: Einschnürungsprinzip

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to g, c_n \to g$ sod. $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $b_n \to g$.

5.2 Monotone und beschränkte Folgen

Definition 5.2.1: Beschränkte Folge

Eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls $C \in \mathbb{R}^+$ ex. mit

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bem.:

- Konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ sind beschränkt

Definition 5.2.2: Monotonie

Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt

Monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Streng monoton wachsend falls $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Streng monoton fallend falls $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beh.:
Beschränkte monotone Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.
Genauer gilt für eine beschränkte Folge $(a_n) \in \mathbb{R}$ und $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$:

- (a_n) wachsend $\Rightarrow \quad a_n \to \sup A$
- (a_n) fallend $\Rightarrow \quad a_n \to \inf A$

Sei (a_n) beschr. Folge in $\mathbb{R}$.
Dann können wir sie zw. zwei beschr. monotonen Folgen einschließen:

$$s_n := \inf_{k \geq n} a_k \quad \leq \quad S_n := \sup_{k \geq n} a_k$$

Es gilt $s_n \leq s_{n'} \leq S_{n'} \leq S_n \quad \forall n' \geq n$ wobei sie monoton und beschränkt sind.
Dann konv. die beiden assozierten Folgen:

$$s_n \nearrow s = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n \quad \leq \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} S_n = S \swarrow S_n$$

und es existieren geschachtelte Intervalle mit dem Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[s_n, S_n] = [s, S]$$

Beob.:

1. $[s_n, S_n]$ enthält fast alle (a_n).
   $\rightarrow$ Für bel. $\epsilon > 0$ enthält $(s-\epsilon, S+\epsilon)$ *fast alle* Folgenglieder a_n.

2. Aber: Für $\epsilon > 0$ enthält $[s+\epsilon, +\infty)$ *nicht* fast alle Folgenglieder da sonst $s_n \geq s+\epsilon$ für fast alle n (Widerspruch!)
   $\Rightarrow \quad (s-\epsilon, s+\epsilon)$ und analog $(S-\epsilon, S+\epsilon)$ enthalten *unendlich viele* Folgenglieder a_n.

$\Rightarrow \quad (a_n)$ konvergiert gdw. $s = S$. In diesem Fall $a_n \rightarrow s = S$.

Definition 5.2.3: Häufungspunkt

Ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n) \in \mathbb{C}$ ist eine Zahl $h \in \mathbb{C}$ sod. jede Umgebung von $h \in \mathbb{C}$ *unendlich viele* (nicht "fast alle") Folgenglieder a_n enthält.

Definition 5.2.4: Teilfolge

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (in einer bel. Menge M) und ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng mon. wachsende (Index-)Folge in $\mathbb{N}$, so nennt man die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beide Begriffe sind verbunden durch:

Lemma 5.2.1

Für Folgen (a_n) in $\mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h \text{ Häufungspunkt von } (a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Teilfolge } a_{n_k} \rightarrow h \Leftrightarrow \lim_{k\rightarrow\infty} a_{n_k} = h$$

Die Menge *aller* Häufungspunkte einer Folge ist *abgeschlossen* unter Grenzwertbildung

Prop.:
Ist (a_n) Folge in $\mathbb{C}$ und (h_m) eine Folge von Häufungspunkten von (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $h_m \rightarrow g \in \mathbb{C}$, so ist auch g Hf.punkt von (a_n).

Bem.:

- $\{$Hf.punkte von (a_n) in $\mathbb{C}$ $\}$ = $\{$ Grenzwerte konvergenter Folgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ $\}$
- $h_m \rightarrow g \quad \Rightarrow \quad g$ auch Hf.punkt von (a_n)
- $\mathbb{C}$ besitzt abzählbar viele dichte Teilmengen, d.h. Folgen in $\mathbb{C}$ die sich *überall* in $\mathbb{C}$ häufen. (Jeder Punkt in $\mathbb{C}$ ist Hf.punkt einer solchen Folge).
  $\rightarrow \quad \exists\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dichtem Bild.

Definition 5.2.5: Dichte Menge

$M \subset \mathbb{C}$ dicht

:$\Leftrightarrow$ Jede (offene) Scheibe hat nicht-leeren Durchschnitt mit M

$$M \cap D_\epsilon(z) \neq \emptyset \quad \forall z \in \mathbb{C}, \epsilon > 0$$

$\Leftrightarrow$ Jede nicht-leere offene Teilmenge hat nicht-leeren Durchschnitt mit M

Satz 5.2.1: Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt (mindestens) eine *konvergente Teilfolge*.
Also einen Häufungspunkt. Genauer gilt:

1. s und S sind Häufungspunkte von (a_n)
2. Alle weiteren Häufungspunkte von (a_n) liegen in $[s, S]$

Definition 5.2.6: Limes inferior und Limes superior

Für eine beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ definiert man ihren *Limes inferior* (bzw. *superior*) als ihren kleinsten (größten) Häufungswert.
Notation:

- $\liminf_{n\to\infty} a_n$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n$

Bem.:

- Wird verwendet, wenn Grenzwert (lim) einer Folge nicht existiert.
- Limes inferior und Limes superior existieren für jede Folge in den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$.
- Für jedes $\epsilon > 0$ liegen jeweils *unendlich viele* Folgenglieder im Intervall

$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n - \epsilon,\ \liminf_{n\to\infty} a_n + \epsilon\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\limsup_{n\to\infty} a_n - \epsilon,\ \limsup_{n\to\infty} a_n + \epsilon\right)$$

- Für $\epsilon > 0$ gilt für *fast alle* Folgenglieder

$$\liminf_{n\to\infty} a_n - \epsilon \quad < \quad a_n \quad < \quad \limsup_{n\to\infty} a_n + \epsilon$$

- Gleichheit gilt wenn die Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \; = \; \liminf_{n\to\infty} \; = \; \limsup_{n\to\infty}$$

Satz 5.2.2: Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Also einen Häufungspunkt).

Korollar 5.2.1

Eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert gdw. sie *genau einen* Häufungspunkt besitzt.

5.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Definition 5.3.1: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$$

d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ sod. gilt } \quad |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n(\epsilon)$$

Daraus folgt:
Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Folgen:
Eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert gdw. sie eine Cauchy-Folge ist.

Bem.:

- Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ konvergieren i.A. nicht in $\mathbb{Q}$ (sondern in $\mathbb{R}$)
- Die Eigenschaft, dass Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ konv., ist (unter Annahme der Körper- und Anordnungseig.) äquivalent zur Supremums Eig., d.h. weiter Art, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ auszudrücken.
- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
- Wenn die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a besitzt, dann gilt auch $a_n \to a$.

5.4 Bestimmte Divergenz / uneigentliche Konvergenz

Wir dehnen den Begriff der Konvergenz auf $\overline{\mathbb{R}}$ aus.

Definition 5.4.1: Bestimmte Divergenz in $\overline{\mathbb{R}}$

Für Folgen (a_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\begin{aligned} a_n \to +\infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall C \in R \text{ gilt } a_n > C \text{ für fast alle n} \\ &:\Leftrightarrow \quad \text{jede Umgebung von } +\infty \text{ in } \overline{\mathbb{R}} \text{ enthält fast alle } a_n \end{aligned}$$

- $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ **Umgebung von** $\infty :\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$ sod. $(C, +\infty] \subset U$
- $+\infty$ Häufungspunkt von $(a_n) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)$ nach oben unbeschränkt

Satz 5.4.1: Bolzano-Weierstraß in $\overline{\mathbb{R}}$

Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt eine in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge; äquiv einen Häufungspunkt/-wert in $\overline{\mathbb{R}}$. Genauer besitzt sie einen maximalen (lim sup) und einen minimalen (lim inf) Häufungswert.

Definition 5.4.2: Bestimmte Divergenz in $\mathbb{C}$

Da Zahlenebene $\mathbb{C}$ nur ein 'Ende' hat, fügt man entspr. nur einen 'unendlich fernen'Punkt ∞ hinzu und schließt $\mathbb{C}$ zu einer 2-dim Sphäre ab, der Riemannschen Zahlensphäre: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$
Auch in diesem Fall ist $\infty \pm \infty$ und $0 \pm \infty$ nicht sinnvoll definiert.

$$\begin{aligned} a_n \to +\infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall R \in R^+ \text{ gilt } |a_n| > R \text{ für fast alle n} \\ &:\Leftrightarrow \quad \text{jede Umgebung von } \infty \text{ in } \overline{\mathbb{C}} \text{ enthält fast alle } a_n \end{aligned}$$

- $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ **Umgebung von** $\infty :\Leftrightarrow \exists\, R \in \mathbb{R}^+$ sod. $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(0) \subset U$
  $\overline{D}_R(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} =$ abgeschl. $\mathbb{R}$-Scheiben um 0
- ∞ Häufungspunkt von $(a_n) \in \overline{\mathbb{C}} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)$ nach oben unbeschränkt

6 Reihen

6.1 Definitionen und erste Beispiele

Definition 6.1.1: Partialsummen

Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$, dann ist

$$s_m = a_1 + \ldots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$$

die m-te Partialsumme s_m von (a_n).

Definition 6.1.2: Unendliche Reihe

Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$. Unter einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aller Partialsummen von (a_n), also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (s_m)_{m\in\mathbb{N}}$$

Definition 6.1.3: Konvergenz einer Reihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge ihrer Partialsummen $(s_m)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert heißt *Summe der Reihe* und wird ebenfalls bezeichnet mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m$$

- Der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ steht sowohl für die Folge der Partialsummen (=Reihe), als auch für den Grenzwert der Partialsummenfolge (=Wert der Reihe).
- Das Abändern oder Weglassen *endlich vieler* Summen ändert nichts am Konvergenzverhalten einer Reihe.
- Für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist notwendig, dass die Glieder eine Nullfolge bilden, $a_n \to 0$, denn

$$a_m = \underbrace{s_m}_{\to\sum_{n=1}^{\infty} a_n} - \underbrace{s_{m-1}}_{\to\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \to 0$$

Beispiel 6.1.1

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots \quad (a \in \mathbb{C})$$

Partialsummen lassen sich schreiben als

$$\sum_{n=0}^{m} a^n = 1 + a + \ldots + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}$$

Konvergenzverhalten:

- $|a| \geq 1 \quad \Rightarrow$ Divergenz, da Glieder a^n keine Nullfolge.
- $|a| < 1 \quad \Rightarrow$ Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{1-a}$

Bem.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist eine Potenzreihe

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Die Harmonische Reihe divergiert bestimmt, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Das gilt obwohl $\frac{1}{n} \to 0$. Also ist Nullfolgen Bedingung *nicht hinreichend*.

Definition 6.1.4: Rechen- und Vergleichsregeln für Reihen

Linearität der unendlichen Summe: Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ und es gilt für ihre Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textbf{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Reihen im Komplexen: Für $a_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \quad (a \in \mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \\ \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \bar{a}$$

Vergleich von reelle Reihen: Für konv. Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

6.2 Konvergenzkriterien

Definition 6.2.1: Cauchy-Kriterium

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gdw. zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ex., sod.

$$m' > m \geq n(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |s_{m'} - s_{m-1}| = |a_m + \ldots + a_{m'}| < \epsilon$$

(Insbesondere ist notwendig, dass $a_n \to 0$, vgl. oben)

Folgt unmittelbar aus Cauchy-Krit. für Konvergenz von Folgen.

$\Rightarrow$ **Eine Reihe konvergiert gdw. ihre Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden.**

Definition 6.2.2: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bem.: Mit dem Cauchy-Kriterium folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ sod. } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \epsilon$$

$$|a_m| + \ldots + |a_{m'}| < \epsilon, \quad m, m' \geq n(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |a_{n(\epsilon)}| + \ldots + |a_{m'}| < \epsilon, \quad \forall m' \geq n(\epsilon) \text{ (auch } m \to \infty)$$

Lemma 6.2.1

Ist eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konv., so ist sie auch (”normal”) konvergent und es gilt für ihre Summe

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Definition 6.2.3: Majoranten-Kriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine komplexe Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine reelle Reihe, sod $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbes. $c_n \geq 0$). Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Und für die Summen gilt:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

- Für die absolute Konvergenz reicht aus, dass $|a_n| \leq c_n$ für fast alle n.
- Oft nützliche Majorante ist die *allgemeine harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ welche für $\alpha > 1$ konvergiert.

Definition 6.2.4: Wurzel-Kriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplexe Reihe

1. Existiert $0 < q < 1$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für <u>fast alle n</u> so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
2. Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für <u>unendlich viele n</u>, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bem.:

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies$ Aussage 1.
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies$ Aussage 2.
- Keine Aussagen möglich in den Fällen
  1. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$
  2. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für fast alle n

Beispiel 6.2.1

Beispiel dafür, dass das Konvergenzverhalten unterschiedlich sein kann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (s > 0)$ konv. genau für $s > 1$.

Definition 6.2.5: Quotienten-Kriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplexe Reihe, sod. $a_n \neq 0$ für fast alle n

1. Existiert $0 < q < 1$ sod. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für <u>fast alle</u> n, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
2. Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für <u>fast alle</u> n, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bem.:

- $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies$ Aussage 1.
- $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies$ Aussage 2.
- Keine Aussage möglich falls
  1. $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \ldots \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \ldots$
  2. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für unendlich viele n (folgt aus $a_n \to 0$).

Beispiel 6.2.2

Weiteres Bsp. dafür dass Konvergenzverhalten unterschiedlich sein kann:
Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ mit $s > 0$ gilt stets $\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \to 1$, d.h. in diesem Fall gilt $\liminf = \ldots = \limsup = \lim = 1$ (unabh. von s) also stets in "Grauzone". Jedoch unterschiedliches Konvergenzverhalten abhängig von s: Konvergenz für $s > 1$, Divergenz für $s \leq 1$

Vergleich von Wurzel- und Quotienten-Kriterium:
Falls $a_n \neq 0$ für fast alle n, so

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \leq \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

d.h., liefert das Quotienten-Kriterium Konvergenz, so auch das Wurzel-Kriterium (Umgekehrt nicht).
$\to$ Wurzel-Kriterium als Nachweis für Konvergenz ist allgemeiner als Quotienten-Kriterium, jedoch ist Quotienten-Kriterium oft einfacher anwendbar.

Beispiel 6.2.3

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$\sqrt[n]{|z^n|} = |z|$, falls $z \neq 0$ ist dann $|z| = \left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right|$. Anwenden des Wurzel- oder Quotienten-Krit. liefert:

$$\begin{cases} \text{absoute Konvergenz für } |z| < 1 \\ \text{Divergenz für } |z| \geq 1 \end{cases}$$

Exponentialreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

Quotienten-Krit.: $\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!} z^{n+1}}{\frac{1}{n!} z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \quad \to \quad 0 \quad \text{für } n \to \infty$

Wurzel-Krit.: $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!} z^n\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \quad \to \quad 0 \quad \text{für } n \to \infty$

$\Rightarrow$ aus beiden Kriterien folgt gleichermaßen absolute Konvergenz $\forall z \in \mathbb{C}$

Logarithmusreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + \dots$$

Quot.-Krit.: $\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} z^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \quad \to \quad |z| \quad \text{für } n \to \infty$

Daraus folgt: $\begin{cases} \text{abs. Konv für } |z| < 1 \\ \text{Divergenz für } |z| > 1 \\ \text{(keine Aussage falls } |z| = 1) \end{cases}$

Wurzel-Krit.: $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} \quad \to \quad |z| \quad \text{für } n \to \infty$

Binomialreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} z^n \text{ für } s \in \mathbb{C}$$

bricht ab für $s \in \mathbb{N}_0$ in diesem Fall

Quot.-Krit.: $\left|\frac{\binom{s}{n+1} z^{n+1}}{\binom{s}{n} z^n}\right| = \frac{|(s-n)z}{n+1} \quad \to \quad |z| \quad \text{für } n \to \infty$

daraus folgt: $\begin{cases} \text{abs. Konvergenz für } |z| < 1 \\ \text{Divergenz für } |z| > 1 \end{cases}$

6.2.1 Konvergenzkriterien von reellen Reihen

Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern:

Definition 6.2.6: Monotonie-Kriterium

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ konvergiert gdw. die Folge $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)_m$ ihrer Partialsummen (nach oben) beschränkt ist. Insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen monoton wachsend.

Definition 6.2.7: Cauchy-Verdichtungskriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ konvergiert.

Für alternierende Reihen:

Definition 6.2.8: Leibniz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}_0^+$).
Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + \ldots$ und hat Summe $\leq a_0$ (ebenso $\geq a_0 - a_1, \leq a_0 - a_1 + a_2$ etc...).
I.A. konvergiert die Reihe *nicht* absolut.

Beispiel 6.2.4

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \ldots$$

konvergiert, jedoch nicht absolut.

6.3 Umordnungen von Reihen

Definition 6.3.1: Umordnung

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to N$ bijektiv (Permutation von $\mathbb{N}$), so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine *Umordnung* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bem.:

- *Endliche* Summen sind unabhängig von der Reihenfolge der Summanden
- Bei *unendlichen* Reihen hängen Konvergenzverhalten und Summe i.a. von Reihenfolge der Summanden ab.

Definition 6.3.2: Bedingte Konvergenz

Eine konvergente Reihe heißt *bedingt* Konvergent, wenn sich sowohl ihr Konvergenzverhlaten als auch ihre Summe bei geeigneter Umordnung verändern.
D.h. eine konvergente Reihe heißt *un*bedingt konvergent, falls Konvergenzverhalten und Summe bei Umordnung gleich bleiben und *bedingt* konvergent sonst.

Beispiel 6.3.1

Wir verändern bei der *alternierenden* harmonischen Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \quad < \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{(obere Schranke)}$$

die Reihenfolge der Summanden und betrachten

$$(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2}) + \dots + \underbrace{(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k})} + \dots$$

$$0 = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} < \dots < \frac{1}{4k-4} + \frac{1}{4k-4} - \frac{1}{2k}$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$$

Dann ist $\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$ die Majorante mit

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots = 1$$

Weil $\frac{1}{4k-1} \to 0$ und $\frac{1}{4k-3} \to 0$ folgt, dass die modifizierte Reihe konvergiert mit Summe $> 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$.
Also verschieden von (größer als) die Summe der allg. alternierenden harmonischen Reihe.

Satz 6.3.1: Riemannscher Umordnungssatz für nicht absolut konvergente Reihen

Jede konvergente, jedoch nicht absolut konvergente reelle Reihe ist *bedingt konvergent.*
Genauer lässt sich durch geeignete Umordnung erreichen, dass sie gegen einen bel. vorgegebenen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ konv.
Allgemeiner: die Menge der Häufungswerte ihrer Partialsummenfolge ist ein beliebig vorgegebenes abgeschlossenes Intervall in $\overline{\mathbb{R}}$.

Bem.:

- Intuition:
  Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ reell und konvergent, jedoch *nicht* absolut konvergent ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$). Dann müssen die aus nur positiven bzw. negativen Summanden bestehenden Teilreihen bestimmt divergieren:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \max(0, a_n) = +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \min(0, a_n) = -\infty$$

Es ist insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max(0, a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \min(0, a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Daraus folgt, dass Partialsummenfolge durch geeignete Umordnung beliebig "gesteuert" werden kann, d.h. sie gegen beliebigen Grenzwert konvergieren lassen ($a_n \to 0$ muss gelten (muss Nullfolge sein)).

Satz 6.3.2: Umordnungssatz für absolut konvergente komplexe Reihen

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so auch jede Umordnung und diese hat stets dieselbe Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *unbedingt* konvergent.

6.4 Multiplikation von Reihen

Definition 6.4.1: Cauchy-Produkt

Für zwei komplexe Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist ihr *Cauchy-Produkt* definiert als die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)}_{=: c_n}$$

Bem.:

- Formales Ausmultiplizieren ergibt zunächst die endliche Doppelsumme/-reihe $\sum_{k,l=0}^{n} a_k b_l$ von der man durch Zusammenfassen der Summanden gleichen Grades zu einer unendlichen Summe/Reihe übergeht.

Satz 6.4.1: Konvergenzsatz für Cauchy-Produkte

Konvergieren die komplexen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut*, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *absolut* und für die Summen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Beispiel 6.4.1

Geometrische Reihe: Übung

Exponentialreihe:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)k!}z^{n-k}w^k$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n \quad \forall z,w\in\mathbb{C}$$

Konvergenzsatz für Cauchy-Produkt liefert *Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion:*

$$\exp(z)\cdot\exp(w) \quad = \quad \exp(z+w)$$

6.5 Binomialreihe

Definition 6.5.1: Binomialreihe

Die Reihe

$$B_s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}z^n=1+sz+\frac{s(s-1)}{1\cdot 2}z^2+\frac{s(s-1)(s-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+\dots$$

nennt man die Binomialreihe.
Ist $s\in\mathbb{N}$, so bricht die Reihe nach dem Glied mit $n=s$ ab und es ergibt sich aus dem Binomialsatz

$$B_s(z)=(1+z)^s$$

.

Definition 6.5.2: Konvergenz der Binomialreihe

Die Binomialreihe ist für $|z|<1$ *absolut konvergent* und für $|z|>1$ divergent.

6.6 Potenzreihen

Definition 6.6.1: Potenzreihen

Potenzreihen verallgemeinern Polynome. Eine komplexe Potenzreihe ist eine formaler Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$$

mit Koeffizienten $a_n\in\mathbb{C}$ und den Variablen z.
Durch Einsetzen einer komplexen Zahl für z wird sie zu einer komplexen Reihe, deren Konvergenz man untersuchen kann.

Bem.:

- Die komplexen Potenzreihen bilden eine $\mathbb{C}$-Algebra ($\mathbb{C}$-VR + Ring).

- Addition:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$$

- Multiplikation:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\Big) z^n \quad \text{(Cauchy-Produkt)}$$

Definition 6.6.2: Konvergenzbereich

Der *Konvergenzbereich* besteht aus den Punkten $z \in \mathbb{C}$, in welchen die Potenzreihe konvergiert.

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergent } \} \subset \mathbb{C}$$

Im Konvergenzbereich definiert die Potenzreihe eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion.

Lemma 6.6.1

1. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ *absolut*.
2. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ absolut, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $|z| \leq |z_0|$ *absolut*, und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n|$ ist eine gemeinsame Majorante ($\implies$ gleichmäßige Konvergenz).

Definition 6.6.3: Konvergenzradius

Für komplexe Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert man den Konvergenzradius mit:

$$R := \sup\{|z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert (absolut) } \} \quad \in \quad [0, +\infty]$$

er hängt nur von den Beträgen der Koeffizienten ab.

Satz 6.6.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Definition 6.6.4: Konvergenzscheibe

R heißt Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $D_R(0) \subset \mathbb{C}$ ihre Konvergenzscheibe. Es gilt

$$D_R(0) \text{ offen} \quad \subset \quad \text{Konvergenzbereich} \quad \subset \quad \overline{D_R}(0) \text{ abgeschlossen}$$

- $R = 0 \quad D_0(0) = \emptyset$, Konvergenzbereich $= \{0\}$
- $R = +\infty \quad D_\infty(0) = \mathbb{C}$, Konvergenzbereich $= \mathbb{C}$

Bem.:

- Für $0 < R < +\infty$ kann das Konvergenzverhalten auf dem Rand der Konv.scheibe, also für $|z| = R$ unterschiedlich sein.

Satz 6.6.2: Berechnung des Konvergenzradius

Für den Konvergenzradius R einer komplexen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt

1. $$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(Cauchy-Hadamard)}$$
2. Falls $a_n \neq 0$ für fast alle n, so ist
$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{R} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{(Euler)}$$
Insbesondere
$$R = \frac{1}{q} \quad \text{mit} \quad q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{falls dieser Grenzwert existiert.}$$

Beispiel 6.6.1

1. Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1$
2. Exponentialrehe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = +\infty$
3. Logarithmusreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad R = 1$
4. Binomialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (\alpha \in \mathbb{C}), \quad R = 1$

Satz 6.6.3: Multiplikationssatz für Potenzreihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ komplexe Potenzreihen mit Konvergenzradius R_a und R_b. Da sie absolut konvergent sind kann das *Cauchy-Produkt* angewendet werden.
Für $|z| < \min(R_a, R_b)$ gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n$$

für die Summe der Reihen.

Die neue Potenzreihe hat Konvergenzradius $R \geq \min(R_a, R_b)$.

(Produkt wird betrachtet als Summen, also Summe des Cauchy-Produktes, nicht Cauchy-Prod. von Reihen an sich.)

Bem.:

- Potenzreihen bilden also mit Konvergenzradius $\geq R_0$ eine Unteralgebra von $\mathbb{C}\big[[z]\big]$
- Produkt wird betrachtet als Summen, also Summe des Cauchy-Produktes, nicht Cauchy-Produkt von Reihen an sich.

7 Stetigkeit

Definition 7.0.1: Stetigkeit

Eine Funktion/Abbildung $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{sod.} \quad x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (*)$$

f heißt stetig, falls f in *jedem Punkt von* D stetig ist.

Definition 7.0.2: Topologische Reformulierung von Stetigkeit

Sei $U \subset D$ Umgebung von x_0 in $D \Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ sod. $D \cap B_\alpha(x_0) \subset U$
Dann ist

$$\begin{aligned} f : D \to \mathbb{C} \text{ stetig in } x_0 \in D \quad \Leftrightarrow \quad & f^{-1}(V) \subset D \text{ Umgebung von } x_0 \text{ in } D. \\ & \forall\, V \subset \mathbb{C} \text{ Umgebung von } f(x_0) \text{ in } \mathbb{C} \end{aligned}$$

Bem.:

- Topologische Reformulierung folgt aus

$$\begin{aligned} (*) \quad \Leftrightarrow \quad & f(B_\delta(x_0)) \ \subset \ B_\epsilon(f(x_0)) \\ \Leftrightarrow \quad & B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 7.0.3: Lipschitz-Stetigkeit

Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *Lipschitz-stetig* , falls $L \geq 0$ (Lipschitz-Konstante) existiert mit

$$|f(x) - f(x')| \quad \leq \quad L \cdot |x - x'| \quad \forall\, x, x' \in D$$

Dann heißt f L-Lipschitz (-stetig).

Bem.:

- Lipschitz-stetig $\implies$ stetig (wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{L}$)
- Intuition: Änderung der Funktionswerte höchstens proportional zur Änderung des Werts der Variablen.

Beispiel 7.0.1

1. *Konstante Funktionen*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto c$ fest sind 0-Lipschitz $\implies$ stetig.
   ($L = 0$ da bei konstanter Funkion keine Änderung des Funktionswerts)
2. (a) *Lineare Funktionen* sind Lipschitz $\implies$ stetig.

Sei Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$ dann ist

$$|\underbrace{(az+b)-(az'+b)}_{=a(z-z')}| \quad = \quad |a| \cdot |z-z'| \quad \text{also } |a|\text{-Lipschitz} \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

Änderung der Funktionswerte proportional zu Änderung der Variablenwerte.

(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ und $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|$ ($\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$) sind Lipschitz, da

$$|\bar{z} - \bar{z}'| = |z - z'| \quad \textit{und} \quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$$

Daraus folgt, dass die Änderung der Funktionswerte höchstens so groß ist wie die Änderung der Variablenwerte.

3. *Polynome vom Grad* ≥ 2 sind nur lokal Lipschitz, jedoch nicht global Lipschitz. Sie sind aber stetig.
Z.B. $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$

$$|z^2 - w^2| = \underbrace{|z+w|}_{\leq |z|+|w|} \cdot |z - w|$$

zeigt, dass q nicht global Lipschitz ist (da $|z + w|$ beliebig groß sein kann).
Aber: $q|_{\overline{B_R}(0)}$ ist $2R$-Lipschitz $\quad \forall R > 0$ (insbesondere stetig) $\implies$ q stetig in allen Punkten des offenen Balls $B_R(0)$ $\implies$ q stetig.

4. *Quadratwurzel:* $q : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$

$$|\underbrace{\sqrt{x} - \sqrt{x'}}_{=\frac{x-x'}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}}| \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}|x - x'|$$

Abschätzung zeigt:

(a) $q|_{[a,+\infty)}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{a}}$-Lipschitz $\quad \forall\, a > 0 \implies q$ stetig in allen Punktion von $(a, +\infty) \implies$ q stetig auf $\mathbb{R}^+$.

(b) Jedoch $q|_{[0,a]}$ nicht Lipschitz stetig, da z.B. $|\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{0}| = \sqrt{n} \cdot |\frac{1}{n} - 0|$ für $n \in \mathbb{N}$. Und $\sqrt{n}$ kann unendlich wachsen daher gibt es kein L welches die Ungleichung erfüllen würde.
Aber: q stetig (auch in 0) denn für $\delta > 0$ gilt $0 \leq x < \epsilon^2 =: \delta(\epsilon) \implies 0 \leq \sqrt{x} < \epsilon$
Also q stetig.

5. Unstetige Funktionen:

(a) *Treppenfunktionen:*
z.B.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$\forall\, \epsilon$ mit $0 < \epsilon < 1 \quad \forall \delta > 0$ gilt:

$$\underbrace{f^{-1}((1-\epsilon, 1+\epsilon))}_{=[0,+\infty)} \not\supseteq (-\delta, \delta) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \not\supseteq f((-\delta, \delta)) = \{0, 1\}$$

$\implies f$ unstetig in 0.

(b) *Dirichlet-Funktion:* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist überall unstetig.

(c) *Riemann:* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} 1 \text{ falls } x=\dfrac{p}{q} \text{ mit } p\in\mathbb{Z} \text{ und } q\in\mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Ist unstetig in allen rationalen Punkten $x\in\mathbb{Q}$ aber stetig in allen irrationalen Punkten $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Definition 7.0.4: Folgenkriterium für Stetigkeit

Eine Funktion $f:\mathbb{C}\supset D\to\mathbb{C}$ ist genau dann stetig in einem Punkt $x\in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n\to x$ gilt, dass $f(x_n)\to f(x)$ in $\mathbb{C}$.

Bem.:

- Intuition: Stetigkeit ist charakterisierbar als Erhaltung von Folgenkonvergenz.
- *Komposition stetiger Funktionen/Abbildungen sind stetig:*
  Sei $D_1, D_2\subset\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} x\in D_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_2\circ f_1"'] & f_1(x)\in D_2 \arrow[r, "f_2"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \left.\begin{array}{l} f_1 \text{ stetig in } x\in D_1 \\ f_2 \text{ stetig in } f_1(x)\in D_2 \end{array}\right\} \implies f_2\circ f_1 \text{ stetig in } x$$

Das folgt direkt aus dem Folgenkriterium:
$x_n\to x\ni D_1 \xRightarrow{f_1 \text{ stetig}} f_1(x_n)\to f_1(x)\ni D_2 \xRightarrow{f_2 \text{ stetig}} f_2(f_1(x_n))\to f_2(f_1(x))\ni\mathbb{C}.$

7.1 Gleichmäßige Limiten/Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 7.1.1: Punktweise Konvergenz

Sei (f_n) Folge von Funktionen $f_n:\mathbb{C}\supset D\to\mathbb{C}$. Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert punktweise* gegen die Funktion (sog. Limesfunktion) $f:D\to\mathbb{C}$ falls

$$f_n(z)\to f(z)\quad \forall\, z\in D$$

D.h. $\forall\epsilon>0, z\in D\quad \exists\, n(\epsilon,z)\in\mathbb{N}$ sod.

$$|f_n(z)-f(z)|<\epsilon\quad \forall\, n\geq n(\epsilon,z)$$

Hierbei ist $n(\epsilon,z)$ abhängig von z.

Bem.:

- *Intuition*: "Geschwindigkeit" mit der sich Funktionenfolge in einem Punkt z_0 der Limesfunktion in diesem Punkt annähert hängt von der Stelle z_0 ab (Ist also nicht überall gleich).
- Stetigkeit wird unter punktweiser Konvergenz i.A. *nicht erhalten.*

Beispiel 7.1.1

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$

f_n konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$

Definition 7.1.2: Supremumsnorm

Die Supremumsnorm einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$||f||_D \quad := \quad \sup_{z \in D} |f(z)| \quad \in \quad [0, +\infty]$$

Bem.:

- Intuition: Supremumsnorm misst "Größe" einer Funktion.
- Da $D \neq \emptyset \quad \Rightarrow || \cdot ||_D \geq 0$
- $||f||_D < +\infty$ (endlich) $\quad \Leftrightarrow \quad f$ beschränkt.

Eigenschaften der Supremumsnorm:
Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{C}$

1. $||f||_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0$ (positivität)
2. $||\lambda f||_D = |\lambda| \cdot ||f||_D$ (homogenität)
3. $||f + g||_D \leq ||f||_D + ||g||_D$ ($\triangle$-Ungl.)
4. $||f - g||_D$ ist Abstand von f und g.

Definition 7.1.3: Gleichmäßige Konvergenz

Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : D \to \mathbb{C}$ falls

$$||f_n - f||_D \quad \to \quad 0$$

D.h. $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sod.

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in D, \; n \geq n(\epsilon)$$

Hierbei ist $n(\epsilon)$ *un*abhängig von z.

Bem.:

- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ Punktweise Konvergenz

Lemma 7.1.1: Cauchy-Kriterium für Funktionenfolgen

Sei (f_n) Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.
Es gilt

$$(f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig} \quad \Leftrightarrow \quad (f_n) \text{ ist } \textit{Cauchy-Folge} \text{ bzgl. } ||f||_D$$
$$\text{d.h. } \lim_{n,m\to\infty} ||f_n - f_m||_D = 0$$

Satz 7.1.1

Sei (f_n) Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ und gleichmäßig konvergent gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$, dann gilt:

$$f_n \text{ stetig in } z_0 \quad \forall n \quad \implies \quad f \text{ stetig} \quad (\text{in } z_0)$$

7.1.1 Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz auf Reihen:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.
Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definiert als die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} f_n.$$

Lemma 7.1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_D < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \textit{ konvergiert gleichmäßig} \text{ (und punktweise absolut)}$$

Korollar 7.1.1

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_D < +\infty$
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig* und es gilt mit $z_0 \in D$:

$$f_n \text{ stetig in } z_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ stetig in } z_0$$

Hierbei ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ die durch die Reihe definierte *Limesfunktion*.

7.1.2 Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz auf Potenzreihen

Satz 7.1.2

Sei $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt

1. Die durch die Potenzreihe definierte Funktion $P : D_R(0) \to \mathbb{C}$ ist *stetig*
2. Für $0 < r < R$ *konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $\overline{D_r}(0) \subset D_R(0)$ *gleichmäßig.*

Beispiel 7.1.2

Exponentialfunktion: Die durch die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definierte komplexe Exponentialfunktion

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto exp(z) =: e^z$$

ist *stetig*.

7.2 Abbildungsverhalten stetiger Funktionen

7.2.1 Zwischenwertsatz

Definition 7.2.1: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $y_0 \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (d.h. im abgeschlossenen Intervall mit diesen Endpunkten).
Dann gilt

$$y_0 \in f([a, b]) \qquad \text{d.h. } y_0 \text{ liegt im Bild von } f$$

Anders formuliert nimmt f jeden Wert y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an mindestens einer Stelle $c \in [a, b]$ an.

Korollar 7.2.1

Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ stetig $\implies$ $f(I) \subset \mathbb{R}$ ist (auch) ein Intervall.

7.2.2 Monotone Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

Definition 7.2.2: Monotonie

Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$

$$f \text{ (streng) monoton wachsend } :\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x, x' \in D \\ x < x' \end{Bmatrix} \implies f(x) \leq (<) f(x')$$

$$f \text{ (streng) monoton fallend } :\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x, x' \in D \\ x < x' \end{Bmatrix} \implies f(x) \geq (>) f(x')$$

Bem.:

- Monotone Funktionen, die keine Werte auslassen, sind stetig.

Lemma 7.2.1

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R} \text{ monoton} \\ f(D) \subset \mathbb{R} \text{ ist Intervall} \end{array}\right\} \implies f \text{ stetig}$$

Bem.:

- f *streng* monoton $\implies$ f injektiv $\implies$ $f : D \to f(D)$ *bijektiv*
  Es existiert also Umkehrabbildung $f^{-1} : f(D) \to D$ die auch *streng monoton* ist.

Korollar 7.2.2

$f : I \to J$ streng monoton bijektive Abbildung von Intervallen $\implies$ f und f^{-1} stetig
(d.h. f ist Homöomorphismus).

Satz 7.2.1

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, I Intervall. Dann gilt

- $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ist ein *Intervall.*
- $f : I \to J$ *bijektiv*
- $f^{-1} : J \to I$ *stetig*

Beispiel 7.2.1

1. $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$ stetig, streng monoton (und bijektiv)
   (Satz) $\implies$ $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ auch stetig.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ stetig, streng monoton
   (Satz) $\implies$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ auch stetig.

3. Exponentialfunktion: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$ streng mon. wachsend und bijektiv hat Umkehrfunktion
   Natürlicher Logarithmus: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$ auch stetig.

7.2.3 Topologischer Exkurs: abgeschlossen & kompakt

Definition 7.2.3: Häufungspunkt einer Teilmenge

$h \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von $M \subset \mathbb{C}$, falls *jede Umgebung* von h in $\mathbb{C}$ *unendlich-viele* Punkte von M enthält.

Bem.:

$$\begin{aligned} h \text{ Häufungspunkt von } M \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Jede Umgebung von } h \text{ in } \mathbb{C} \text{ enthält einen Punkt von } M \text{, verschieden von } h. \\ &\Leftrightarrow \quad M \setminus \{h\} \text{ enthält eine gegen } h \text{ konvergente Folge.} \end{aligned}$$

Definition 7.2.4: Abgeschlossene Menge

Sei $M \subset \mathbb{C}$ Teilmenge.
Dann heißt M *abgeschlossen*, falls M alle Grenzwerte von (in $\mathbb{C}$) konvergenten Folgen enthält.
Falls also gilt :

$$\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ Folge in } M \\ a_n \to a \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \implies a \in M$$

Beispiel 7.2.2

- Abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind in diesem Sinne abgeschlossen
- Offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind nicht abgeschlossen.

Bem.:

$$\begin{aligned} M \subset \mathbb{C} \text{ abgeschlossen} \quad &\Leftrightarrow \quad M \text{ enthält } \textit{alle} \text{ Häufungspunkte von } M \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Komplement } O = \mathbb{C} \setminus M \text{ ist } \textit{offen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O \subset \mathbb{C} \text{ offen} \quad &\Leftrightarrow \quad O \text{ ist Umgebung jeder ihrer Punkte} \\ &\Leftrightarrow \quad O \text{ ist Vereinigung offener Scheiben} \end{aligned}$$

- Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen (bzw. offen), dann ist auch das Urbild $f^{-1} := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in A\}$ abgeschlossen (bzw. offen).

Definition 7.2.5: Folgenkompaktheit

$M \subset \mathbb{C}$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in M eine *in* M konvergente Teilfolge hat.

Charakterisierung:

$$\boxed{M \text{ folgenkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ abgeschlossen } + \text{ beschränkt}}$$

Eigenschaften der Familie aller folgenkompakter Teilmengen (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$):

$$\left.\begin{array}{l}\text{i) Endliche Vereinigungen} \\ \text{ii) beliebige Durchschnitte}\end{array}\right\} \text{folgenkompakter Mengen sind } \textit{folgenkompakt}$$

Dies gilt genauso für die (größere) Familie abgeschlossener Teilmengen (von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$).

Beispiel 7.2.3

Folgenkompakt: $[a, b] \subset \mathbb{R}$, Scheiben $\overline{D_r}(z_0)$, Rechtecke $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re} z \leq b,\ c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$

Nicht folgenkompakt: $[a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (-\infty, b] \subset \mathbb{R}$

7.2.4 Annahme von Extremwerten

Satz 7.2.2

$f : \mathbb{C} \supset K \to \mathbb{C}$ stetig , $\quad K$ folgenkompakt. $\implies f(K) \subset \mathbb{C}$ folgenkompakt.
D.h. stetige Bilder von Kompakten sind kompakt.

Anwendung bei $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen:

Lemma 7.2.2

Nichtleere folgenkompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthalten *minimale* und *maximale* Elemente.

Korollar 7.2.3

Sei $f : \mathbb{C} \supset K \to \mathbb{R}$ stetig, K folgenkompakt.
Dann nimmt f *Minimum* und *Maximum* an, d.h. hat einen min/max Wert.

Korollar 7.2.4

Stetige Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ nehmen Miniumum und Maximum an, da beschränkte, abgeschlossene

Intervalle folgenkompakt sind.

Bem.:

- Stetige Funktionen auf nicht-kompakten Definitionsbereichen nehmen i.a. keine Extrema an.

7.2.5 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 7.2.6: Gleichmäßige Stetigkeit

Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ hießt *gleichmäßig stetig*, falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{sod. für} \quad z, z' \in D \quad \text{mit} \quad |z - z'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(z')| < \epsilon$$

Im Vergleich zur $\epsilon - \delta$-Definition gewöhnlicher Stetigkeit kann hier δ *unabhängig vom Punkt in* D gewählt werden.

Bem.:

- Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ glm. stetig.
- Stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig.

Satz 7.2.3

Sei $f : \mathbb{C} \supset K \to \mathbb{C}$ stetig, K folgenkompakt.
Dann ist f gleichmäßig stetig.

Korollar 7.2.5

Stetige Funktionen $[a, b] \to \mathbb{C}$ sind gleichmäßig stetig.

Bem.:

- Stetige Funktionen auf nicht-kompakten Definitionsbereichen sind i.a. *nicht* gleichmäßig stetig.

7.3 Kontinuierliche Grenzwerte

Definition 7.3.1: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von D. Dann ist

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Die durch } \hat{f}_{z_0,a}(z) := \begin{cases} f(z) \text{ falls } z \in D \setminus \{z_0\} \\ a, \text{ falls } z = z_0 \end{cases}$$
$$\text{definierte Funktion } \hat{f}_{z_0,a} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C} \quad \text{ist stetig in } z_0.$$

D.h. in $\epsilon - \delta$ Schreibweise:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{sod.} \quad z \in D \cap \dot{B}_\delta(z_0) \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - a| < \epsilon$$

Wobei $\dot{B}_\delta(z_0) := B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist.
Das Erfasst das Verhalten von f nicht in z_0 sonder in der *Nähe von* z_0.

Bem.:

- Falls $z_0 \in D$, so ist $\hat{f}_{z_0,a} = f$ und daher

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f \text{ stetig in } z_0}.$$

- Falls $z_0 \notin D$ und $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$, so heißt $\hat{f}_{z_0,a}$ die *stetige Fortsetzung* von f nach z_0.

7.3.1 Reformulierungen des Grenzwertbegriffs

Definition 7.3.2: Folgenkriterium

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(z_n) \to a \quad \forall \text{ Folgen } z_n \to z_0 \text{ in } D \setminus \{z_0\}.$$

Definition 7.3.3: Cauchy-Kriterium

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} f(z) \text{ existiert} \quad \Leftrightarrow \quad & \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{sod.} \\ & z, z' \in D \cap \dot{B}_\delta(z_0) \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(z')| < \epsilon \end{aligned}$$

Bem.:

- Gilt $f(x) \to a$ und $g(x) \to b$ für $x \to x_0$, so gilt auch:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\to a + b \\ f(x) \cdot g(s) &\to a \cdot b \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\to \frac{a}{b} \end{aligned}$$

- Sei $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{C}$ und es ist $f(x) \to a \in E$ für $x \to x_0$ und g stetig in a. Dann gilt

$$g(f(x)) \to g(a) \quad \text{für } x \to x_0$$

7.3.2 Varianten des Grenzwertbegriffs

Definition 7.3.4: Rechts- und linksseitiger Grenzwert

Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D. Dann ist

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \to x_0} f|_{D \cap (x_0, +\infty)}$$

der *rechtsseitige Grenzwert* von f in x_0 (falls er existiert).
Analog für linksseitigen Grenzwert.

Definition 7.3.5: Rechts- und linksseitige Stetigkeit auf $\mathbb{R}$

Falls $x_0 \in D$, dann heißt

$$\begin{aligned} f \text{ rechtsseitig stetig in } x_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad f|_{D \cap [x_0, +\infty)} \text{ stetig in } x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{aligned}$$

Analog linksseitig stetig.

Definition 7.3.6: Stetigkeit und Grenzwert im Unendlichen

Sei $f : \overline{\mathbb{R}} \supset D \to \mathbb{C}$ und $+\infty$ ist Häufungspunkt von D (d.h. $D \cap (C, +\infty) \neq \emptyset \forall C \in \mathbb{R}$).
Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists C \in \mathbb{R}, \quad \text{sod.} \\ & \qquad x \in D \text{ und } x > C \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - a| < \epsilon \end{aligned}$$

Falls $+\infty \in D$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty) \quad \Leftrightarrow: \quad f \text{ stetig in } +\infty$$

- Falls $a = +\infty$: $\quad |f(z) - a| < \epsilon$ ersetzen durch $f(z) > C$.

8 Differenzierbarkeit

8.1 Definition

Definition 8.1.1: Differenzierbar

Die Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt *diffenerzierbar in* $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad =: \quad f'(x_0) \quad \text{existiert}$$

$f'(x_0)$ heißt *die Ableitung von* f *in* x_0.

Bem.:

- Ableitung intuitiv: Kleine Änderung des Werts der Variablen führt zu ungefähr proportionaler Änderung des Funktionswertes.
  D.h. eine differenzierbare Funktion ist "gut linear approximierbar".
- Die *lineare Approximation* ist gegeben durch

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Alternative Notationen von $f'(x_0)$: $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{d}{dx}|_{x=x_0} f$.

Lemma 8.1.1

Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, dann sind äquivalent:

1. f diff.bar in x_0
2. $\exists \quad s : D \to \mathbb{C}$ stetig in x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + s(x) \cdot (x - x_0) \qquad \text{für } x \in D$$

   Dabei ist $s(x)$ die "durchschnittliche Steigung" von x_0 nach x.
3. $\exists\, a \in \mathbb{C}$ und $r : D \to \mathbb{C}$ mit $r(x_0) = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ sod.

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x)$$

   Wobei $r(x)$ das Restglied bzw. der Approximationsfehler ist.

Im differenzierbaren Fall erhält man also die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + r(x)$$

Das Restglied *verschwindet in* x_0 *erster Ordnung*, d.h. es verschwindet schneller als $x - x_0$.
Wir schreiben: $r(x) = o(x - x_0)$.

$\Longrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ ($o \mathrel{\widehat{=}}$ Landau-Symbol).
$\Longrightarrow f$ diffbar in $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ linear approximierbar mit Fehler von kleiner als erster Ordnung

$$\boxed{f \text{ diffbar in } x_0 \Longrightarrow f \text{ stetig in } x_0}$$

Bem.:

- Geometrische Bedeutung: Der Graph von f schmiegt sich an den Graphen der linearen Approximation an.
- Also ist die lineare Approximation die Tangente des Graph von f.

Beispiel 8.1.1

1. Konstante Funktionen haben verschwindende Ableitungen:

$$f \equiv c \in \mathbb{C} \text{ auf } \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f' \equiv 0$$

2. Lineare Funktionen haben konst. Ableitung
$f(x) = ax + b$ auf $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$
$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a \quad \Rightarrow \quad f' \equiv a.$

3. Betrag: $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$:
Sei $x_0 = 0$, dann ist

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

$\Longrightarrow$ rechtsseitige und linksseitige Ableitung stimmen nicht überein $\Longrightarrow f$ nicht diffbar.

4. Potenzen: $f(x) = x^n$ auf $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n \cdot x_0^{n-1}$$

$\Longrightarrow (x^n)' = nx^{n-1}$

5. Wurzeln: $g(x) = \sqrt[n]{x}$ für $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \text{ falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \\ x \in \mathbb{R}_0^+, \text{ falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases}$.
In $x_0 \neq 0$:

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{y^n - y_0^n} = \frac{1}{n y_0^{n-1}} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n} - 1}$$

$\Longrightarrow (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ für $x \neq 0$.

6. Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

$$\implies (e^x)' = e^x.$$

7. Logarithmus: $g(x) = \log x$ auf $\mathbb{R}^+$:

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{e^x - e^{x_0}} = \left(\lim_{y \to y_0} \frac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0} \right)^{-1} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}$$

$$\implies \log' x = \frac{1}{x} \text{ für } x > 0.$$

8.2 Berechnung und Rechenregeln von Ableitungen

Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$, D offen und f, g differenzierbar in $x_0 \in D$

Definition 8.2.1: Addition

$f + g : D \to \mathbb{C}$ ist diffbar in x_0 mit

$$(f + g)'(x) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Definition 8.2.2: Produktregel

$f \cdot g : D \to \mathbb{C}$ diffbar in x_0 mit

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Definition 8.2.3: Quotientenregel

Falls $g(x_0) \neq 0$, so ist die (auf einer Umgebung von x_0 def.) Funktion $\frac{f}{g}$ diffbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Definition 8.2.4: Kettenregel

Seien $f : \mathbb{R} \supset D_f \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \supset D_g \to \mathbb{C}$ sod. $f(D_f) \subset D_g$.

Dann gilt $\left.\begin{array}{r} f \text{ diffbar in } x_0 \\ g \text{ diffbar in } f(x_0) \end{array}\right\} \implies g \circ f$ diffbar in x_0 mit Ableitung:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Definition 8.2.5: Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ *streng monoton und stetig diffbar* in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$ (notwendig).

Dann ist $f^{-1}: f(I) \to I$ diffbar in $f(x_0)$ mit Ableitung

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f'(x_0) \neq 0$ ist notwendig, da falls f^{-1} diffbar in $f(x_0) \implies (f^{-1} \circ f)(x_0) = ((f^{-1})' f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Beispiel 8.2.1

1. $f(x) = x^2, \quad g(y) = \sqrt{y}$
   $f(x)$ ist diffbar mit $f'(x) = 2x \neq 0 \implies g$ diffbar mit Ableitung $(\sqrt{y})' = \dfrac{1}{f'(g(y))} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$.
2. $f(x) = e^x, \quad g(x) = \log y$
   f diffbar mit $f'(x) = e^x \neq 0 \implies \log' y = \dfrac{1}{f'(g(y))} = \dfrac{1}{e^{logy}} = \dfrac{1}{y}$.

8.3 Mittelwertsatz und Anwendungen

Betrachte reelwertige Funktionen $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{R}$

Definition 8.3.1: Lokales Minimum und Maximum

Man sagt, dass f in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (Minimum) annimmt, falls eine Umgebung U in $\mathbb{C}$ existiert, sod. $f|_{D \cap U}$ in x_0 ein Maximum (Minimum) annimmt.

Lemma 8.3.1

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, diffbar in $x_0 \in (a, b)$. Dann:

1. f hat ein lokales Extremum (Min od. Max) in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$
2.
   - Ist $f''(x_0) > 0 \quad \implies \quad$ lokales Minimum.
   - Ist $f''(x_0) < 0 \quad \implies \quad$ lokales Maximum.
3. Sei $f''(x_0) \neq 0 \quad \implies \quad f - f(x_0)$ wechselt in x_0 das Vorzeichen.

Bem.:

- Beweis Skizze: Man nimmt an, dass f in x_0 Extremstelle ist. Dann bildet man den Differenzenquotienten auf beiden Seiten von $f(x_0)$ (Rechtsseitiger und linksseitiger Limes). Wegen gegensätzliches monotones Wachstum auf beiden Seiten folgt $f'(x_0) = 0$.
- Wird verwendet um aus der Existenz von Extema die Existenz von Nullstellen der Ableitung zu folgern.

Lemma 8.3.2: Satz von Rolle

Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$, stetig diffbar auf (a, b) und habe gleiche Randwerte $f(a) = f(b)$. Dann gilt

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad \text{mit} \quad f'(x_0) = 0$$

Auf beschränkten Intervallen kann man dies auf den Fall beliebiger Randwerte verallgemeinern:

Satz 8.3.1: Mittelwertsatz

Sei $-\infty < a < b < +\infty$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, stetig und diffbar auf (a, b). Dann

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad \text{sod.} \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz 8.3.2

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar. Dann ist

1. f monoton wachsend $\quad \Leftrightarrow \quad f' \geq 0$
2. f streng monoton wachsend $\quad \Leftarrow \quad f' > 0 \quad$ (Sattelpunkte können existieren)

Analog für fallend.

Korollar 8.3.1

$$f \text{ konstant} \quad \Leftrightarrow \quad f' \equiv 0$$

Bem.:

- Zwei diffbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ mit gleichen Ableitungen $f' = g'$ unterscheiden sich nur um eine Konstante: $f - g = \text{const}$.

Satz 8.3.3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f' = \alpha f$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann hat f die Form $f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Bem.:

- Die Exponentialfunktion ist also die einzige diffbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f' = f$ und $f(0) = 1$

Definition 8.3.2: Stetig differenzierbar

Sei $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{R}$ und offen.
Dann heißt f stetig diffbar falls f diffbar und $f' : D \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Satz 8.3.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$, I offen und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar. Dann gilt

$$f' \leq C \text{ auf } [a,b] \subset I \quad \Longrightarrow \quad f(b) - f(a) \leq C\,(b-a)$$

d.h. f hat die maximale Steigung C.

Satz 8.3.5: Schrankensatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$, I offen und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar.
Ist $|f'| \leq L$ für $L \in \mathbb{R}$, so ist f Lipschitz-stetig.

Bem.:

- Insbesondere ist eine differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall dort Lipschitz-stetig, falls ihre Ableitung stetig ist.

Korollar 8.3.2: Lokale Lipschitz-stetigkeit

Stetig diffbare Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{R}$ und offen, sind *lokal Lipschitz-stetig.*
D.h. sie sind Lipschitz-stetig auf jedem abgeschlossenen und beschränkten ($\Leftrightarrow$ folgenkompakt) Intervall $[a,b] \subset D$.

Satz 8.3.6: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sei $= \infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \overline{\mathbb{R}}$, stetig und auf (a,b) diffbar.

$$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \quad \text{mit} \quad (f(b) - f(a)) \cdot g'(x_0) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x_0)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Wird angewendet in der Methode zur Bestimmung gewisser Grenzwerte von Quotienten:

Definition 8.3.3: Regel von L'Hospital

Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt in jeder der beiden folgenden Situationen:

1. $\lim_{x \searrow a} f(x) \;=\; \lim_{x \searrow a} g(x) \;=\; 0$
2. $\lim_{x \searrow a} f(x) \;=\; \lim_{x \searrow a} g(x) \;=\; \infty$

Existiert $\lim_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{R}$, so existiert auch $\lim_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \overline{R}$, und es ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analog für $x \nearrow b,\ \ x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

8.4 Mehrfache Differenzierbarkeit

Definition 8.4.1: Höhere Ableitungen

Betrachte Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$, D offen. Wir definieren höhere Ableitungen $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ von f induktiv:

- $f^{(0)} = f$
- Existiert $f^{(n-1)}$ für $n \geq 1$ und ist diffbar, so ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

Man sagt:

1. f n-mal differenzierbar $\quad :\Leftrightarrow \quad f^{(n)}$ existiert $(n \in \mathbb{N})$.
2. f n-mal stetig differenzierbar oder von Klasse C^n $\quad :\Leftrightarrow \quad f^{(n)}$ existiert und ist stetig. (Niedrigere Ableitungen in dem Fall auch stetig).
3. f glatte Funktion oder ∞-mal differenzierbar oder von der Klasse C^∞ $:\Leftrightarrow \quad f \in C^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \Leftrightarrow\ f$ n-mal differenzierbar $\forall n \in N_0$.
4. f n-mal diffbar in $x_0 \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Leftrightarrow \quad f$ ist $(n-1)$-mal differenzierbar auf offener Umgebung $x_0 \in U \subset D$ und $(f|_U)^{(n-1)}$ differenzierbar in x_0.

Bem.:

- Die konstanten Funktionen $f(x) = c$ sind beliebig oft differenzierbar.

Satz 8.4.1: Isolierte lokale Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \supset (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \quad (\text{bzw. } <)$$

Dann hat f in x_0 ein *isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum)*.
(isoliert $\ \widehat{=}\ $ eindeutig).

8.5 Lokale Approximation durch Polynome

Definition 8.5.1: Taylor Polynom

Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$, I offen. Ist f in $x_0 \in I$ n-mal differenzierbar so definieren wir, das n-te *Taylor*

Polynom von f in x_0 als

$$T_{x_0,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Es gilt insbesondere $\quad T^{(k)}_{x_0,n}(x_0) \quad = \quad f^{(k)}(x_0) \quad 0 \leq k \leq n.$

Satz 8.5.1: Taylor-Approximation

Quantitativ: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar auf ganzem Intervall, so gilt: Zu $x, x_0 \in I$ gibt es ein ξ zwischen x und x_0 sod.

$$f(x) = T_{x_0,n-1}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Lagrange-Restglied}}$$

D.h. ξ hängt von x und x_0 ab.

Qualitativ: Ist $f : I \to \mathbb{C}$ n-mal differenzierbar in x_0, so gilt

$$f(x) = T_{x_0,n}(x) + o(|x-x_0|^n)$$

D.h. $\dfrac{f(x) - T_{x_0,n}(x)}{|x-x_0|^n} \longrightarrow 0 \quad$ für $x \to x_0$.

Definition 8.5.2: Taylor-Reihe

Ist $f : I \to \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar, $x_0 \in I$, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

die *Taylorreihe zu f in x_0*.

Bem.:

- I.A. hat die Taylorreihe weder positiven Konvergenzreadius, noch (falls doch) konvergiert sie nahe x_0 gegen f.

Definition 8.5.3: Entwicklung einer Potenzreihe

Konvergiert die Taylorreihe zu f in x_0 gegen f (punktweise $\Rightarrow$ gleichmäßig auf kleineren Umgebung), so sagt man, dass sich f um x_0 als *Potenzreihe darstellen/entwickeln* lässt. Bzw., dass f in x_0 *reell analytisch* ist.

Bem.:

- Die Menge der Punkte des Deffinitionsbereichs in dem f reell analytisch ist, ist offen.
- Reell analytisch $\implies$ C^∞.

8.6 Differenzierbarkeit von Limiten

8.6.1 Anwendung für Funktionenfolgen

Satz 8.6.1

Sind die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C^1-Funktionen $f_n : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$, D offen, sowie die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Ableitungen gleichmäßig konvergent: $f_n \to f, \quad f_n' \to g, \quad (f, g$ stetig).
Dann ist f C^1 Funktion und $f' = g$, also

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (f_n')$$

Bem.:

- Ist D ein beschränktes Intervall, so genügen schwächere Annahmen:

$$D = (a, b) \ni x_0 \qquad \left.\begin{array}{l}(f_n(x_0)) \text{ konvergiert} \\ (f_n') \text{ konvergiert gleichmäßig}\end{array}\right\} \Rightarrow (f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig}$$

8.6.2 Anwendung für Reihen

Korollar 8.6.1

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von C^1 Funktionen, $f_n : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_D \quad < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n'|| \quad < \infty$$

Dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig konvergent also der Grenzwert (Grenzfunktion) stetig.
Dann ist die Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : D \to \mathbb{C}$ in C^1 und es gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \quad = \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\right)$$

8.6.3 Anwendung auf Regularität von Potenzreihen

Betrachte Potenzreihe um 0 in $\mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

Gliedweise differenzieren ergibt

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$$

Lemma 8.6.1

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ haben gleichen Konvergenzradius.

Satz 8.6.2

Hat die Potenzreihe $P(x)$ Konvergenzradius $R > 0$, so ist die durch sie definierte Funktion $P : (-R, R) \to \mathbb{C}$ glatt (C^∞) und die Ableitungen sind gegeben durch gliedweises Differenzierern:

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \qquad \text{auf } (-R, R)$$

Konvergenz ist lokal gleichmäßig, d.h. gleichmäßig auf $[-r, r]$ für $0 < r < R$.

Beispiel 8.6.1

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus:

$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ auf $(-1, \infty)$ $\quad = 1 - x + x^2 - \ldots$ auf $(-1, 1)$ (geom. Reihe).
Diese Reihe entsteht auch wenn wir $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ gliedweise differenzieren.
Wir prüfen:
$P(x)' = \log(1+x)'$ auf $(-1, 1)$ $\quad \Rightarrow P(x) - \log(1+x) = \text{const.}$
$P(0) = 0 = \log(1+0)$ $\quad \Rightarrow$ const. $= 0$, $\quad$ d.h. $P(x) = \log(1+x)$ auf $(-1, 1)$.

Randverhalten für $x \nearrow 1$:
$P(x) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ $\quad$ alternierende Summe mit $\frac{x^n}{n} \to 0$ für $0 \leq x \leq 1$
$\Rightarrow$ Durch Leibnitz-Kriterium konvergiert $P(1)$.
Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf $[0, 1]$, denn
$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{|x|^{n_0}}{n_0} \leq \frac{1}{n_0} \to 0$ für $n \to \infty$.
$\Longrightarrow$ $P(x)$ ist stetig auf $[0, 1]$ also auf $(-1, 1]$. Und wegen log stetig
$\Longrightarrow$ $P(x) = \log(1+x)$ $\quad$ auf $(-1, 1]$.

Insbesondere

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\log(x_0 + x) = \log(x_0) + \log(1 + \frac{x}{x_0}) = \log(x_0) + P(\frac{x}{x_0})$$

$\Rightarrow$ $\quad \log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist reell-analytisch.

Potenzreihenentwicklung von Arcustangens:

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ (bjektiv). Dann ist $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ auf (-1, 1)
$= (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots)'$

$\Rightarrow$ Beide Konvergenzradius 1.

$$\Rightarrow \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{auf } [-1, 1]$$

Insbesondere

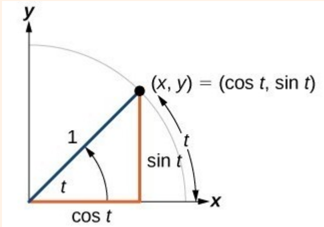
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

arctan ist analytisch, denn $\frac{1}{1+x^2}$ ist analytisch:

9 Trigonometrische Funktionen

Definition 9.0.1: Definition von sin **&** cos

Sei $z : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Kurve (C^1)
Dann ist z Kurve in der Ebene, die



1. Einheitskreis parametrisiert: $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1$
2. mit Geschwindigkeit 1: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \Leftrightarrow \dot{z} \cdot \dot{\bar{z}} = 1$
3. mit Anfangs Punkt: $(x(0), y(0)) = (1, 0) \Leftrightarrow z(0) = 1$
4. Umlaufrichtung: $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, 1) \Leftrightarrow \dot{z} = i$

Bedingungen erzeugen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= iz(t) \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung der Differentialgleichungen mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion $t \mapsto e^{it}$ ergibt $z(t) = e^{it}$.

<u>Eulersche Formel:</u>
Definition von cos und sin mit $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \\ \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{ix}) \\ \sin(x) &= \mathrm{Im}(e^{ix}) \end{aligned}}$$

Definition 9.0.2: Potenzreihenentwicklung von cos **und** sin

Es ist für $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Dann gilt für sin und cos:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \mathrm{Im}(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Definition 9.0.3: Definition für komplexen $\cos$ und $\sin$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\end{aligned}}$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Definition 9.0.4: Eigenschaften

Geometrisch:

$$\begin{aligned}|e^{ix}| &= \sqrt{e^{ix}\cdot\overline{e^{ix}}} = \sqrt{e^{ix}\cdot e^{-ix}} = 1\\ |e^{ix}| &= \sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)} = \sqrt{\mathrm{Re}(e^{ix})^2+\mathrm{Im}(e^{ix})^2} = 1\\ 1 &= \cos^2(x)+\sin^2(x)\end{aligned}$$

Regularität / Ableitung:
Sinus und Kosinus haben Darstellung als Potenzreihe $\implies$ $\cos(x)$ und $\sin(s)$ sind stetig

$$\left.\begin{aligned}\cos'(x) &= -\sin(x)\\ \sin'(x) &= \cos(x)\end{aligned}\right\} \implies \cos(x), \sin(x) \quad \text{sind } C^\infty$$

Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned}e^{i(u+v)} &= e^{iu}\cdot e^{iv}\\ e^{i(u+v)} &= \cos(u+v)+i\sin(u+v)\\ \implies \quad e^{iu}\cdot e^{iv} &= \cos(u)\cdot\cos(v)-\sin(u)\cdot\sin(v)+i(\cos(u)\cdot\sin(v)+\sin(u)\cdot\cos(v))\end{aligned}$$

Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \cos(u)\cdot\cos(v)-\sin(u)\cdot\sin(v)\\ \sin(u+v) &= \cos(u)\cdot\sin(v)+\sin(u)\cdot\cos(v)\end{aligned}$$

Nullstellen und Periodizität:
Aus der eulerschen Formel folgt:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	0	-1	0	1
$\sin(x)$	1	0	-1	0

cos und sin sind 2π-periodisch:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos(x)\\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x)\end{aligned}\right\} \implies e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \qquad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$$

Definition 9.0.5: Arkussinus & Arkuskosinus

Sind die Umkehrabbildungen von Sinus und Kosinus:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \qquad \arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

arccos und arcsin sind bijektiv und streng monoton also *stetig.*
Außerdem *differenzierbar* auf $(-1,1)$:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10 Integration

10.1 Konstruktion des Integral auf Regelfunktionen

Definition 10.1.1: Unterteilung

Eine *Untertreibung* eines Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist eine endliche Punktfolge $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$.
Sie hat *Feinheit* $\delta > 0$, falls $x_k - x_{k-1} < \delta \ \forall k$. Eine *Verfeinerung* dieser Unterteilung ist eine Unterteilung, die durch Hinzufügen endlich vieler Teilpunkte entsteht.

Bem.:

- Je zwei Teilunterteilungen von $[a,b]$ haben eine gemeinsame Verfeinerung.

Definition 10.1.2: Treppenfunktion

Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion $\tau : [a,b] \to \mathbb{C}$, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < \ldots < x_m = b$ gibt, sodass τ auf jedem offenen Teilintervall (x_k, x_{k-1}) konstant ist (Werte an Unterteilungspunkten können beliebig sein).

Bem.:

- Treppenfunktionen sind beschränkt.
- Treppenfunktionen bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum: $\underbrace{\mathcal{T}([a,b])}_{\text{Treppenfunktionen}} \subset \underbrace{B([a,b])}_{\text{beschränkte Funktionen}}$

  $\Rightarrow$ linearer Untervektorraum

Definition 10.1.3: Integral einer Treppenfunktion

Sei $\tau : [a,b] \to \mathbb{C}$ Treppenfunktion mit Unterteilung $a = x_0 < \ldots < x_m = b$ und Werten $\tau|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\int_a^b \tau(x)dx \quad := \quad \sum_{k=1}^{m} c_k(x_k - x_{k-1})$$

das *Integral* der Treppenfunktion. Das ist wohldefiniert, da $\int_a^b \tau(x)dx$ unverändert bei Verfeinerung der Unterteilung bleibt.

Wir fassen das Integral auf als Funktional:

$$\int_a^b : \mathcal{T}([a,b]) \to \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \int_a^b \tau(x)dx$$

Eigenschaften Integral:

1. $\mathbb{C}$-linear:

$$\int_a^b (\lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2)dx = \lambda_1 \int_a^b \tau_1 dx + \lambda_2 \int_a^b \tau_2 dx \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

2. Monoton:

$$\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T} \ \mathbb{R}\text{-wertig}, \ \tau_1 \leq \tau_2 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \tau_1 dx \quad \leq \quad \int_a^b \tau_2 dx$$

3. Positiv:

$$\tau \in \mathcal{T} \ \mathbb{R}\text{-wertig mit } \tau \geq 0 \quad \Longrightarrow \int_a^b \tau dx \geq 0$$

4. Beschränktheit: D.h. Lipschitz-stetig bzgl. Supremumsnorm

$$\Big| \int_a^b \tau \, dx \Big| \ \leq \ \int_a^b |\tau| dx \ \leq \ (b-a) \cdot ||\tau||_{[a,b]}, \quad \tau \in \mathcal{T}$$

Definition 10.1.4: Treppenapproximierbar

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *treppenapproximierbar* , falls es $\forall \epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\tau \in \mathcal{T}([a,b])$ gibt mit

$$||f - \tau||_{[a,b]} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{T}([a,b]) \text{ mit } \quad \tau_n \to f \text{ gleichmäßig auf } [a,b]$$

Bem.:

- Wir bezeichnen Menge der treppenapproximierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit $\overline{\mathcal{T}}([a,b])$. Dann ist $\overline{\mathcal{T}}([a,b]) \subset B([a,b])$ ein UVR.
- Für $f \in \overline{\mathcal{T}}([a,b])$ definieren wir

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \tau_n \, dx$$

  wobei $\tau_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit gleichmäßiger Konvergenz $\tau_n \to f$ auf $[a,b]$.
- Wohldefiniertheit:
  - (τ_n) ist Cauchy bzgl. $|| \cdot ||_{[a,b]} \quad \Rightarrow \quad \left(\int_a^b \tau_n \, dx \right)$ Cauchy in $\mathbb{C}$.
  - Konvergieren $\tau_n \to f$ und $\tilde{\tau_n} \to f$ gleichmäßig, dann $\tilde{\tau_n} - \tau_n \to 0$ (gleichmäßig) $\Rightarrow \left| \int_a^b \tilde{\tau_n} \, dx - \int_a^b \tau_n \, dx \right| \leq \int_a^b ||\tilde{\tau_n} - \tau_n||_{[a,b]} = (b-a) \cdot ||\underbrace{\tilde{\tau_n} - \tau_n}_{\to 0}||_{[a,b]}$
- Dann ist das fortgesetzte Funktional

$$\int_a^b : \overline{\mathcal{T}}([a,b]) \to \mathbb{C}$$

Satz 10.1.1

Die Eigenschaften des Funktionals oben bleiben für die neue Definition erhalten.

Satz 10.1.2

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{T}}([a,b])$ Folge von Funktionen mit $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent. Dann gilt

$$f \in \overline{\mathcal{T}}([a,b]) \quad \text{und} \quad \int_a^b f\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx$$

Treppenapproximierbare Funktionen:
Zu $\overline{\mathcal{T}}([a,b])$ gehören:

- *Stetige Funktionen:* Denn f stetig und $[a,b]$ kompakt $\implies$ f glm. stetig.
  D.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta := \delta(\epsilon) > 0$ sod. sich für jede Unterteilung von $[a,b]$ mit Feinheit δ die Werte auf jedem Teilintervall jeweils um $< \epsilon$ unterscheiden.
- *Monotone Funktionen:* Denn für $\epsilon > 0$ sind nur endlich viele Teilmengen $f^{-1}([n\epsilon,(n+1)\epsilon])$
  $\Rightarrow$ liefert endliche Unterteilung von $[a,b]$ sod. Werte auf Teilintervallen sich $< \epsilon$ unterscheiden.

Definition 10.1.5: Regelfunktion

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion* (oder sprungstetig), falls überall in $[a,b]$ einseitige Grenzwerte von f existieren. D.h.

$$\lim_{x\nearrow x_0}, \quad \lim_{x\searrow x_0} \text{ für } x_0 \in (a,b) \text{ existieren, sowie } \lim_{x\searrow a}, \quad \lim_{x\nearrow b}$$

Satz 10.1.3

$$f \text{ treppenapproximierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ Regelfunktion}$$

10.2 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Lemma 10.2.1

Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$ Regelfunktion.
Dann sind Einschränkungen auf Teilintervalle auch Regelfunktionen:

$$\left.\begin{matrix} a,b,c \in I \\ a \le b \le c \end{matrix}\right\} \quad \int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx = \int_a^c f\ dx$$

Bem.:

- Für $a,b \in I$ mit $a > b$ definieren wir

$$\int_a^b f\ dx \quad := \quad -\int_b^a f\ dx$$

Definition 10.2.1: Variation der Integrationsgrenzen

Sei $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$ Regelfunktion.
Fixiere Referenzpunkt $x_0 \in I$ und definiere $\phi : I \to \mathbb{C}$ durch $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} f\,du$
Ferner ist

$$\phi\Big|_{x_1}^{x_2} := \phi(x_2) - \phi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f\,du$$

Verlegung des Referenzpunkts x_0 bewirkt Änderung von einer additiven Konstante:

$$\tilde{\phi}(x) = \int_{\tilde{x}_0}^{x} f\,du = \underbrace{\int_{\tilde{x}_0}^{x_0} f\,du}_{\text{fest}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f\,du}_{\phi(x)}$$

Definition 10.2.2: Unbestimmtes Integral

Die Familie der Funktionen $I \to \mathbb{C}$ von der Form

$$x \mapsto const + \int_{x_0}^{x} f(x)\,du \quad (x_0 \in I)$$

heißt das *unbestimmte Integral* von f.
Bezeichnung: $\int f(x)\,dx$.

A Wichtige Summen

Gaußsche Summenformel	$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
Summe der ersten ungeraden Zahlen	$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$
Summe der ersten Quadratzahlen	$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
Partialsumme der geometrischen Reihe	$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{für } \lvert q \rvert \neq 1$$

B Wichtige Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $c > 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

C Wichtige Reihen

Geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } \lvert q \rvert < 1$
Harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
Allgemeine harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent für $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
Alternierende harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$
Leibnitz Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$
e-Funktion	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
Logarithmus-Funktion	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \qquad \text{für } x \in (-1, 1]$
Sinus-Funktion	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$
Cosinus-Funktion	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$