

Übungsblatt 9 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe9.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 18.01.2021, 12:00 Uhr.

1. **Übung zum logischen Schließen mit Quantoren.** Beweisen Sie, dass für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ gilt:

$$(\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \forall n > m : |a_n| \leq \epsilon) \Rightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |a_n| < \epsilon)$$

2. *Aus der Probeklausur zur Analysis einer Variablen des Wintersemesters 2012/13:*

- (a) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen.
(b) Zeigen Sie die Existenz von

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right).$$

Berechnen Sie x .

3. **Änderung des Entwicklungspunkts bei Potenzreihen.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in x mit komplexen Koeffizienten a_n und Konvergenzradius $r > 0$. Weiter seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| + |z| < r$ gegeben. Beweisen Sie:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} |a_{k+l} y^l z^k| < \infty$.

- (b) Folgern Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

in z mit den Koeffizienten

$$b_k := \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} a_{k+l} y^l$$

mindestens den Konvergenzradius $r - |y|$ besitzt, und dass für $x := y + z$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

4. **Die Riemannsche Zetafunktion.** Für gegebenes $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ definieren wir

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Fassen Sie analog zum Beweis der Divergenz in $\mathbb{R}$ der harmonischen Reihe die Summanden jeweils in Blöcke von Zweierpotenzlänge zusammen. Schätzen Sie jede Blocksumme nach oben ab. Gültige Rechenregeln für Potenzen dürfen Sie dabei ohne Begründung verwenden. Die Funktion $\zeta :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ wird *Riemannsche Zetafunktion* genannt. Sie spielt in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

5. **Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen Zetafunktion.** Es sei $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine bijektive Aufzählung aller Primzahlen, zum Beispiel die monotone Aufzählung $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, \dots$. Es bezeichne $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller Folgen $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$, für die $v_j \neq 0$ für höchstens endlich viele $j \in \mathbb{N}$ gilt. In der elementaren Zahlentheorie wird der folgende Satz von der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung bewiesen; er darf hier ohne Beweis verwendet werden:

Die Abbildung $\Pi : \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{N}$, $\Pi((v_j)_{j \in \mathbb{N}}) = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{v_j}$ ist eine Bijektion.¹
Es sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie für alle $v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\{n \in M_v\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - p_j^{-(v_j+1)s}}{1 - p_j^{-s}},$$

wobei

$$M_v := \{\Pi(w) \mid w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}, \forall j \in \mathbb{N} : w_j \leq v_j\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Teiler von } \Pi(v)\}.$$

- (b) Folgern Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\{n \in L_m\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - p_j^{-s}},$$

wobei

$$\begin{aligned} L_m &:= \{\Pi(v) \mid v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}, \forall j > m : v_j = 0\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ enthält höchstens die Primfaktoren } p_1, \dots, p_m\}. \end{aligned}$$

- (c) Beweisen Sie damit die folgende Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen Zetafunktion:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}$$

Hinweis: Der Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen (oder auch der Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen) kann Ihnen bei den letzten beiden Teilaufgaben helfen.

6. Lesen und verstehen Sie den Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes (siehe den Text ab nächster Seite oder auch den Abschnitt 3.6.6 im Skript). Analysieren Sie die logische Struktur des Beweises (ohne das Lemma mit der Vorüberlegung), indem Sie elektronisch oder in einem Ausdruck alle Stellen mit Nummern (1), (2), (3) etc. markieren, an denen sich das Beweisziel, also die zu zeigende Aussage, ändert. Geben Sie zu jeder dieser Nummern auf einem anderen Blatt an, welche Aussage jeweils das neue Beweisziel ist.

Hinweis: Bei manchen dieser Stellen steht das schon im Beweis.

¹Zur Notation: $\prod_{j=1}^{\infty} \dots$ ist eine Abkürzung für $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \dots$. Die Primfaktorzerlegung ist dennoch eigentlich ein endliches Produkt, denn es treten nur endlich viele von 1 verschiedene Faktoren auf.

Text zu Aufgabe 6: Der Abelsche Grenzwertsatz

Für $M \geq 0$ und $c > 0$ definieren wir die Menge

$$\Delta_{M,c} := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - c \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq M(1 - \operatorname{Re} z)\}.$$

Für $M > 0$ ist das die abgeschlossene Dreiecksscheibe in der komplexen Ebene mit den Eckpunkten 1 , $1 - c + iMc$ und $1 - c - iMc$; für $M = 0$ ist es nur das Intervall $[1 - c, 1]$. Als Vorüberlegung beweisen wir:

Lemma 1 Für alle $M \geq 0$ gibt es ein $c > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $z \in \Delta_{M,c}$ gilt:

$$|z - 1| \leq L(1 - |z|). \quad (1)$$

Insbesondere folgt für solche $c > 0$:

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \vee z = 1\}. \quad (2)$$

Beweis: Gegeben $M \geq 0$, setzen wir

$$c := \frac{1}{1 + M^2} > 0 \quad (3)$$

und

$$L := 2(M + 1) > 0. \quad (4)$$

Nun sei $z \in \Delta_{M,c}$ gegeben. Wir kürzen ab: $x := 1 - \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$. Insbesondere gilt $z = 1 + iy - x$ sowie $0 \leq x \leq c$ und $|y| \leq Mx$. Dann folgt:

$$|z - 1| = |iy - x| \leq |y| + |x| \leq Mx + x = (1 + M)x \quad (5)$$

Wir schätzen andererseits ab:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1 - x)^2 + (Mx)^2} = \sqrt{1 - 2x + (1 + M^2)x^2} \\ &\leq \sqrt{1 - 2x + (1 + M^2)cx} \quad (\text{wegen } 0 \leq x \leq c) \\ &= \sqrt{1 - 2x + x} \quad (\text{wegen (3)}) \\ &= \sqrt{1 - x} \leq \sqrt{1 - x + \frac{x^2}{4}} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2} = 1 - \frac{x}{2} \quad (\text{wegen } x < 1) \end{aligned}$$

also

$$L(1 - |z|) \geq L\frac{x}{2} \geq L\frac{|z - 1|}{2(M + 1)} = |z - 1| \quad (\text{wegen (5) und (4)})$$

Damit ist die Behauptung (1) gezeigt. Zum Beweis der verbleibenden Behauptung (2) sei $z \in \Delta_{M,c}$ mit $z \neq 1$ gegeben. Dann folgt

$$1 - |z| \geq \frac{|z - 1|}{L} > 0$$

und daher $|z| < 1$, was zu zeigen war. $\square$

Satz 2 (Abelscher Grenzwertsatz) Gegeben sei eine konvergente Reihe

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$$

zu einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Weiter sei $M \geq 0$ gegeben. Dann existiert $c > 0$ mit

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \vee z = 1\}, \quad (6)$$

so dass die auf $\Delta_{M,c}$ eingeschränkte Potenzreihe

$$f : \Delta_{M,c} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig ist.

Beweis: Wir wählen $c > 0$ und $L > 0$ nach dem vorhergehenden Lemma; insbesondere gilt dann die Behauptung (6). Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ besitzt mindestens den Konvergenzradius 1, weil sie für $z = 1$ nach Voraussetzung konvergiert. Insbesondere ist sie in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stetig. Wegen Formel (6) ist f in allen Punkten $z \in \Delta_{M,c} \setminus \{1\}$ stetig, da Potenzreihen im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig sind. Es bleibt nur noch der interessanteste Fall $z = 1$ zu behandeln. Zu zeigen ist also:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z - 1| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \quad (7)$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, bildet die Folge der Partialsummen

$$b_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (8)$$

eine Cauchyfolge. Wir finden also ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $l, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 \leq l \leq m$ gilt:

$$|b_m - b_l| < \frac{\epsilon}{2L} \quad (9)$$

Wegen der Stetigkeit von Polynomfunktionen gilt

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \xrightarrow{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{n_0} a_n.$$

Wir nehmen also ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < \delta$ gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (10)$$

Mit dieser Wahl von δ ist vom ursprünglichen Beweisziel (7) nur mehr das folgende Beweisziel übrig geblieben:

$$\forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z - 1| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \quad (11)$$

Zum Beweis hiervon sei $z \in \Delta_{M,c}$ mit $|z - 1| < \delta$ gegeben. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| = \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^m a_n (z^n - 1) \right|
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit des Absolutbetrags verwendet haben. Es genügt nun, noch zu zeigen:

$$\forall m > n_0 : \left| \sum_{n=n_0+1}^m a_n (z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (12)$$

denn damit folgt die zu zeigende Behauptung so:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^m a_n (z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Zum Beweis der Behauptung (12) sei $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n_0$ gegeben. Die Hauptidee des Beweises besteht nun darin, die Differenz $z^n - 1$ in der folgenden Rechnung mit der geometrischen Summe auszudrücken und dann die Summationsreihenfolge zu vertauschen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0+1}^m a_n (z^n - 1) &= \sum_{n=n_0+1}^m a_n (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
&= (z - 1) \sum_{\substack{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2: \\ n_0 < n \leq m, \\ k < n}} a_n z^k &= (z - 1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k \sum_{n=\max\{n_0, k\}+1}^m a_n \\
&= (z - 1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0, k\}}) \quad (\text{siehe (8)})
\end{aligned}$$

Schätzen wir den Betrag davon mit Dreiecksungleichung ab und verwenden nochmal die geometrische Summe, diesmal für die Absolutbeträge:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=n_0+1}^m a_n (z^n - 1) \right| &= |z - 1| \left| \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0, k\}}) \right| \\
&\leq |z - 1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k |b_m - b_{\max\{n_0, k\}}| \leq |z - 1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k \frac{\epsilon}{2L} \quad (\text{wegen (9)}) \\
&= |z - 1| \frac{1 - |z|^m}{1 - |z|} \frac{\epsilon}{2L} \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \frac{\epsilon}{2L} \quad (\text{wegen } |z|^m \leq 1) \\
&\leq L \frac{\epsilon}{2L} = \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{wegen (1) in Lemma 1})
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (12) gezeigt. □