

Übungsblatt 8 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe8.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 11.01.2021, 12:00 Uhr.

1. *Aus der GOP-Nachklausur des Sommersemesters 2013:*

Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$, eine weitere Folge $(n(m))_{m \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$, sowie $c \in \mathbb{C}$.

- (a) Definieren Sie, wann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge genannt wird.
- (b) Definieren Sie die Aussage $n(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$.
- (c) Definieren Sie die Aussage $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = c$. Notieren Sie ebenso die Definition der Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. *Hinweis:* Das scheinbar redundante doppelte Aufschreiben der Konvergenzdefinition soll Ihnen bei der folgenden Teilaufgabe (d) helfen.
- (d) Nun sei gegeben:
 - i. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
 - ii. $n(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$.
 - iii. $b_m = a_{n(m)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
 - iv. $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = c$.

Beweisen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises, insbesondere bei der Behandlung von Quantoren. Alle nicht quantifiziert auftretenden Variablen müssen vor der Verwendung eingeführt werden.

2. **Das arithmetisch-geometrische Mittel.** Es seien $a_0 \geq b_0$ gegebene positive reelle Zahlen. Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien simultan rekursiv durch das *arithmetische* bzw. *geometrische Mittel*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
 - (b) Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren.
3. **Produkt zweier Potenzreihen.** Es seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r_1 und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r_2 . Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

mindestens den Konvergenzradius $\min\{r_1, r_2\}$ hat und dass für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{r_1, r_2\}$ gilt: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

4. **Alternierende Reihen.** Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}_0} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n.$$

Zum Beispiel konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ in $\mathbb{R}$.

5. **Exponentielles Wachstum ist schneller als alle Potenzen – alternativer Beweis.**
Zeigen Sie

$$\forall \lambda > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\exp(\lambda n)} = 0.$$

Verwenden Sie dazu *nicht* die Aufgabe 2 des Übungsblatts 7, sondern zeigen Sie zunächst $n^k \leq \frac{1}{n} \lambda^{-k-1} (k+1)! \exp(\lambda n)$ für $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$.

6. **Unitarität der diskreten Fouriertransformation.** Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$. Das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{C}^n$ wird durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} b_k$$

für $a = (a_k)_{k=0, \dots, n-1} \in \mathbb{C}^n$ und $b = (b_k)_{k=0, \dots, n-1} \in \mathbb{C}^n$ definiert. Weiter wird die *diskrete Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch $\mathcal{F}(a) = (\hat{a}_k)_{k=0, \dots, n-1}$ definiert, wobei

$$\hat{a}_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{kl} a_l$$

mit der n -ten Einheitswurzel $\omega_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. Beweisen Sie:

- (a) **Invarianz des Skalarprodukts.** Für alle $a, b \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\langle \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b) \rangle = \langle a, b \rangle$$

- (b) **Diskrete Fourierumkehrformel.** Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist bijektiv mit der Inversen $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}^{-1}((\hat{a}_k)_{k=0, \dots, n-1}) = (a_l)_{l=0, \dots, n-1}$, wobei

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \hat{a}_k.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen für die Einheitswurzeln aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 4.