

Übungsblatt 7 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe7.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 21.12.2020, 12:00 Uhr.

1. Konvergenz einer Folge bei übereinstimmenden $\liminf$ und $\limsup$.

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit Werten in $\mathbb{R}$. Es gelte

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen diesen Limes inferior und Limes superior konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} a_n \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} a_n$$

2. Vergleich des Wachstums von Potenzfunktionen mit Exponentialfunktionen.

Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$n^k a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Eine Riemannsumme zur Quadratfunktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie hierzu die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

4. Das Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln. Gegeben $a, b \in \mathbb{R}^+$, definieren wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^+$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := b, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter sei $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n^2}{2x_n}$.
- (b) Folgern Sie $\Delta_n \geq 0$, $\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\Delta_n$ und $\Delta_{n+1} \leq \frac{\Delta_n^2}{2\sqrt{a}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Falls $\Delta_0 \geq 0$, gelten die Schranken auch für $n = 0$.)
- (c) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.
- (d) Nun sei speziell $a = b = 2$. Verwenden Sie die Schranke $0 \leq \Delta_0 \leq 1$, also $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ zusammen mit den Schranken aus Teilaufgabe (b), um ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_n < 10^{-6}$ explizit anzugeben. Berechnen Sie x_n für dieses n explizit, z. B. mit dem Taschenrechner (Taschenrechnergenauigkeit genügt).

5. **Berechnung einer Potenz-Exponentialreihe.** Berechnen Sie (mit Beweis):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m k^2 2^{-k}.$$

Hinweis: Die Rekursionsformel für $\sum_{k=0}^m k^n x^k$, $x \neq 1$, siehe Formeln (34), (35) und (36) im Skript, kann Ihnen dabei helfen.

6. **Grenzwert einer rekursiv definierten Folge.** Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv durch

$$a_{n+1} = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}a_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Beweisen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5a_1 + 2a_0}{7}.$$

Hinweis: Beweisen und verwenden Sie dabei

$$\begin{aligned} \frac{5a_n + 2a_{n-1}}{7} &= c, \\ a_n - c &= -\frac{2}{5}(a_{n-1} - c) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$c := \frac{5a_1 + 2a_0}{7}.$$