

Übungsblatt 6 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe6.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 14.12.2020, 12:00 Uhr.

1. *Aus der GOP-Nachholklausur des Sommersemesters 2013:*

Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{C}$.

- (a) Definieren Sie, wann b ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt wird.
(b) Nun sei

$$a_n = 2^{-n/2}(1+i)^n \frac{1+n}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Beweisen Sie, dass die imaginäre Einheit i ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.

2. **Eine Darstellung des Limes superior.** Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} a_n$$

(Zur Schreibweise: Das Infimum einer Folge $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bezeichnet man oft mit $\inf_{m \in \mathbb{N}} b_m$ statt mit $\inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Weiter steht $\sup_{n \geq m} a_n$ für $\sup\{a_n \mid n \geq m\}$.)

3. **Eine Version des Satzes von Baire.** Zeigen Sie: Für jede Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von dichten, offenen Mengen $U_n \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

eine dichte Menge in $\mathbb{R}$.

4. **Kehrwertabbildung in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.** Es sei $k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $k(z) := 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k(0) := \infty$, $k(\infty) := 0$. Beweisen Sie für alle $A \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dass A genau dann offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist, wenn ihr Bild $k[A]$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist.

5. *Aus der Klausur zur Analysis 1 des Wintersemesters 2004/05, minimal variiert:*

- (a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Definieren Sie die Aussage „ M ist kompakt“. *Hinweis:* Gefragt ist die *Definition* der Kompaktheit, nicht etwa eine äquivalente Charakterisierung.
(b) Wenden Sie *direkt* diese Definition an (nicht etwa eine äquivalente Charakterisierung der Kompaktheit), um zu zeigen, dass

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

kompakt ist.

6. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ **ist nicht kompakt.** Geben Sie explizit eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt (mit Beweis).