

Übungsblatt 5 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe5.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 07.12.2020, 12:00 Uhr.

- 1. Offene Halbebenen.** Gegeben seien zwei Zahlen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ und die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z\bar{w}) > a\}$.
 - (a) Veranschaulichen Sie sich am Beispiel $w = 2 + i$ und $a = 3$ die Menge H und die komplexe Zahl w mit einer Skizze in der komplexen Ebene.
 - (b) Beweisen Sie, dass die Menge H offen in $\mathbb{C}$ ist.
- 2. Die Einheitskreislinie als Rand des Einheitskreises.** Es sei $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\partial B = S^1$ gilt.
- 3. Zusammenhang der Menge der reellen Zahlen.** Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Zeigen Sie: $A = \mathbb{R}$ oder $A = \emptyset$.
Hinweis: Verwenden Sie Kontraposition: Nehmen Sie also an, es gäbe sowohl ein $a \in A$ als auch ein $b \in \mathbb{R} \setminus A$ und wenden Sie das Vollständigkeitsaxiom auf eine geeignete mit Hilfe von a, b und A definierte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ an. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $a < b$ und $b < a$.
Bemerkung: Man sagt für die hier gezeigte Aussage auch: *Der Raum $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*
- 4. Abschluss der Menge der Stammbrüche.** Beweisen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

abgeschlossen ist.

- 5. Unendlich ferne Punkte zu einer Hyperbel.** Gegeben seien der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^2 + z^2\},$$

die Hyperbel

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, 1) \in K\}$$

Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bezeichne

$$\mathbb{R}(x, y, z) = \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch (x, y, z) und den Nullpunkt $(0, 0, 0)$. Weiter sei

$$G := \{\mathbb{R}(x, y, z) \mid (x, y, z) \in K, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt, die im Kegel K liegen. Wir erweitern die Hyperbel H um zwei verschiedene neue Punkte ∞_+ und ∞_- , die man sich “unendlich fern” in Richtung der Asymptoten $\{(x, \pm x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von H vorstellen soll.

- (a) Veranschaulichen Sie sich die Hyperbel H durch eine Graphik in der x - y -Ebene. Veranschaulichen Sie sich auch den Kegel K , die Ebene $E = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, den Kegelschnitt $K \cap E = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in H\}$ und die beiden Geraden $\mathbb{R}(1, \pm 1, 0) \in G$ in einer dreidimensionalen Skizze.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : H \cup \{\infty_+, \infty_-\} &\rightarrow G, \\ f(x, y) &:= \mathbb{R}(x, y, 1) \text{ für } (x, y) \in H, \\ f(\infty_\pm) &:= \mathbb{R}(1, \pm 1, 0) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

6. Euler-Substitutionen als Variante der stereographischen Projektion. Es sei

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

der Einheitskreis, $P = (p_1, p_2) \in S^1$ ein fixierter Punkt darauf und

$$g = QR := \{tQ + (1-t)R \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch zwei verschiedene gegebene Punkte $Q = (q_1, q_2)$ und $R = (r_1, r_2)$ in $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen $P \notin g$ an. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $h(t)$ die Gerade durch die Punkte P und $tQ + (1-t)R \in g$, und $h(\infty)$ sei die zu g parallele Gerade durch den Punkt P .

(a) Veranschaulichen Sie sich die Situation mit einer Skizze.

(b) Finden Sie eine Bijektion $F : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow S^1$, so dass $h(t) \cap S^1 = \{P, F(t)\}$ für alle $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt. Berechnen Sie dazu $F(t)$ für $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $F^{-1}(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \in S^1$ explizit. *Hinweis:* Im Ergebnis kommen nur rationale Funktionen vor, also Quotienten von Polynomen in t bzw. in x_1 und x_2 .

Bemerkung: Diese Transformationen F und F^{-1} heißen *Euler-Substitutionen*. Sie spielen in der Integrationstheorie elementarer Funktionen eine Rolle, wie wir später sehen werden.