

Übungsblatt 4 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe4.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 30.11.2020, 12:00 Uhr.

Es bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

1. **Rechnungen mit komplexen Zahlen.** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^8, \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i}, \quad \text{und} \quad z_4 = \sum_{n=1}^6 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n$$

- (a) direkt in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil,
(b) unter Verwendung der Polardarstellung.

Veranschaulichen Sie sich die Rechnungen auch graphisch in der komplexen Ebene.

2. **Der Satz von Thales.** Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = i \frac{z+1}{z-1}$$

Weiter bezeichne $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ den Einheitskreis in der komplexen Ebene.

- (a) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ die folgende Äquivalenz:

$$z \in S^1 \setminus \{1\} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}.$$

- (b) Interpretieren Sie die eben bewiesene Aussage geometrisch als Satz von Thales: Ein Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ bildet zusammen mit 1 und -1 genau dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei z , wenn z auf dem Einheitskreis liegt.

3. **Polynomdivision im Raum $\mathbb{C}[x]$ der Polynome über $\mathbb{C}$.** Ein *Polynom* in einer Variablen x mit komplexen Koeffizienten ist ein Ausdruck der Gestalt

$$p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, wobei alle a_k komplexe Zahlen sein sollen.¹ Ist $a_n \neq 0$, so nennt man n den Grad des Polynoms p , in Zeichen $\deg p = n$. (Für das Nullpolynom 0, dessen Koeffizienten a_k alle gleich 0 sind, definiert man $\deg 0 := -\infty$.) Es bezeichne $\mathbb{C}[x]$ die Menge aller Polynome in x mit komplexen Koeffizienten.

- (a) Zeigen Sie: $\forall a, b \in \mathbb{C}[x] : [\deg a \geq \deg b \geq 0 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C} : \deg(a - zx^{\deg a - \deg b} b) < \deg a]$

¹Wer möchte, kann sich ein Polynom p als Abbildung vom Typ $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto p(z)$ vorstellen. In der Algebra fasst man Polynome eher als formale Ausdrücke auf: $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}^{(\mathbb{N}_0)} := \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall k > n : a_k = 0\}$, indem man $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Koeffizienten identifiziert, wobei $a_k = 0$ für $k > n$ gesetzt sei. Addition und Multiplikation von Polynomen werden dann so definiert:

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} + (b_k)_{k \in \mathbb{N}_0} := (a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, \quad (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \cdot (b_k)_{k \in \mathbb{N}_0} := \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}, \quad z \cdot (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} := (za_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

- (b) Folgern Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion: $\forall a, b \in \mathbb{C}[x] : [\deg b \geq 0 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{C}[x] : \deg(a - qb) < \deg b]$
- (c) Nun sei speziell $a = x^6 - ix^5$ und $b = x^3 - 2ix^2 + x + (1 - i)$ gegeben. Finden Sie Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $r = a - qb$ und $\deg r < 3$. *Hinweis:* Eine an die schriftliche Division von Dezimalzahlen angelehnte Notation hilft, die Rechnung übersichtlich darzustellen.
- (d) *Spezialfall: Abspalten von Linearfaktoren.* Es sei $p \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\deg p \geq 1$ gegeben. Weiter sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p , das heißt p erhält den Wert $p(z) = 0$, wenn man die komplexe Zahl z für die Variable x einsetzt. Zeigen Sie, dass es ein Polynom q mit $p = (x - z)q$ gibt.
- (e) Spalten Sie den Linearfaktor $x - i$ von dem Polynom $p = x^4 - (1 + 2i)x^3 + (i - 2)x^2 + 2ix + 1$ ab.
- (f) *Linearfaktorzerlegung durch iteriertes Abspalten von Linearfaktoren.* Finden Sie eine Linearfaktorzerlegung $p = \prod_{k=1}^4 (x - a_k)$ des Polynoms $p = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \in \mathbb{C}[x]$. *Hinweis:* $p(i) = 0$, und mit jeder Nullstelle a_k von p ist auch das konjugiert Komplexe $\overline{a_k}$ eine Nullstelle, da p nur reelle Koeffizienten besitzt.

4. **Einheitswurzeln.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n := \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. Zeigen Sie:

- (a) $\omega_n^n = 1$.
- (b) $\overline{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n}$.
- (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega_n^k \mid k = 0, \dots, n-1\}$. Sie dürfen hierbei als bekannt voraussetzen:

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : \left(\cos \varphi + i \sin \varphi = 1 \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2\pi} \in \mathbb{Z} \right)$$

Bemerkung: Die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ werden “ n -te Einheitswurzeln” genannt.

- (d) Für $n \geq 2$ gilt: $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \right\} = \{\omega_n^k \mid k = 1, \dots, n-1\}$. Versuchen Sie, sich diese Aussage anschaulich graphisch in der komplexen Ebene vorzustellen.
- (e) **Orthogonalitätsrelationen für die Einheitswurzeln.** Für alle $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{jl}} \omega_n^{jk} = n \delta_{k,l}$$

mit dem sogenannten “Kronecker-Delta”

$$\delta_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

5. **Die fünften Einheitswurzeln.** Gegeben seien die Zahl $\omega = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ sowie $\zeta_+ = \omega + \omega^4$ und $\zeta_- = \omega^2 + \omega^3$.

- (a) Veranschaulichen Sie sich ω^k für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und $\zeta_{\pm}/2$ mit einer Skizze in der komplexen Zahlenebene, in der auch der Einheitskreis S^1 eingezeichnet ist.
- (b) Zeigen Sie: $2 \operatorname{Re} \omega = \zeta_+$ und $2 \operatorname{Re}(\omega^2) = \zeta_-$.
- (c) Zeigen Sie: $\zeta_+ + \zeta_- = -1$ und $\zeta_+ \cdot \zeta_- = -1$. Folgern Sie: Das Polynom $x^2 + x - 1 \in \mathbb{C}[x]$ besitzt die Linearfaktorzerlegung

$$x^2 + x - 1 = (x - \zeta_+)(x - \zeta_-).$$

Insbesondere gilt $\zeta_{\pm}^2 + \zeta_{\pm} - 1 = 0$ und $\zeta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- (d) Zeigen Sie:

$$\omega = \frac{\zeta_+}{2} + i \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Welche Formeln für $\cos 72^\circ$ und $\sin 72^\circ$ erhalten Sie hieraus? *Hinweis:* Die Beobachtung $|\omega| = 1$ kann Ihnen bei der Rechnung helfen.

6. **Der Satz von Napoléon.** Gegeben sei ein Dreieck ABC in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Der Punkt C' werde erhalten, indem der Punkt A um den Punkt B um 60° in positiver Drehrichtung gedreht wird. In gleicher Weise, mit zyklisch vertauschten Rollen von A, B, C , wird A' bzw. B' durch 60° -Drehung von B bzw. C um C bzw. A erhalten. Es bezeichnen $C'' = \frac{1}{3}(A + B + C')$, $A'' = \frac{1}{3}(B + C + A')$ und $B'' = \frac{1}{3}(C + A + B')$ die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke ABC' , BCA' und CAB' .
- (a) Zeichnen Sie die beschriebene Figur für ein Dreieck ABC Ihrer Wahl. Es empfiehlt sich dabei, das Dreieck ABC im positiven Sinn orientiert zu zeichnen, damit die gleichseitigen Dreiecke ABC' , BCA' und CAB' auf den Seiten des Dreiecks ABC nach außen gezeichnet werden.
- (b) Drücken Sie A' , B' und C' als Linearkombinationen von A , B und C mit komplexen Koeffizienten aus, also als Terme der Gestalt $\alpha A + \beta B + \gamma C$ mit komplexen Zahlen α , β und γ . Drücken Sie ebenso A'' , B'' und C'' als Linearkombinationen von A , B und C aus. Stellen Sie die hier auftretenden komplexen Koeffizienten mit Hilfe der dritten Einheitswurzeln $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und ω^2 dar.
Hinweis: Beachten Sie, dass $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ gilt, und dass $-\omega$ und $-\omega^2$ sechste Einheitswurzeln sind.
- (c) Es bezeichne $S = \frac{1}{3}(A+B+C)$ den Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Zeigen Sie $B'' - S = \omega(A'' - S)$.
- (d) Zeigen Sie, dass $A''B''C''$ ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Mittelpunkt $\frac{1}{3}(A'' + B'' + C'')$ gleich dem Schwerpunkt S des Dreiecks ABC ist.
Bemerkung: Einer Legende zufolge wurde dieser Satz von Napoléon Bonaparte entdeckt. Historisch ist das allerdings nicht gesichert.