

Übungsblatt 3 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe3.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 23.11.2020, 12:00 Uhr.

1. **Eine Anwendung der geometrischen Summe.** Ein Sparer zahlt jedes Jahr am gleichen Tag x Euro auf sein Sparkonto ein. Es wird mit dem jährlichen Zinssatz p verzinst. Welches Guthaben weist das Konto (inkl. Zins und Zinseszins) unmittelbar nach der n -ten Einzahlung auf? Berechnen Sie mit dem Taschenrechner dieses Guthaben in den drei Fällen $x = 100$, $n = 40$ und $p = 0\%$ bzw. $p = 1\%$ bzw. $p = 4\%$. Vergleichen Sie die Zahlenwerte.
2. **Verträglichkeit von Supremum mit arithmetischen Operationen.** Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

$$AB := \{a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

und, falls $0 \notin A$,

$$A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}.$$

Beweisen Sie:

- (a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch $A + B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

- (b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^+$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch AB nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A \cdot \sup B = \sup(AB).$$

- (c) Ist $A \subset \mathbb{R}^+$ nichtleer und von der 0 weg beschränkt, d.h. besitzt A eine positive untere Schranke, so ist A^{-1} nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}.$$

3. **Quadratwurzeln.** Bei dieser Aufgabe sollen Sie weder die Existenz von Quadratwurzeln noch Eigenschaften von Quadratwurzeln als bekannt voraussetzen.

Beweisen Sie:

- (a) Für alle $a > 0$ ist die Menge $Q(a) := \{x > 0 \mid x^2 < a\}$ nichtleer und nach oben beschränkt.
- (b) Setzt man $\sqrt{a} := \sup Q(a)$ für alle $a > 0$, so gilt $\sqrt{a} > 0$ und $\sqrt{a}^2 = a$.
- (c) Es gilt $\sqrt{a^2} = a$ für alle $a > 0$.
- (d) Für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

4. **Approximation reeller Zahlen durch abbrechende Dezimalbrüche.** Es sei

$$D = \left\{ \frac{k}{10^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die Menge aller abbrechenden Dezimalbrüche. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a gilt:

$$\sup\{x \in D \mid x < a\} = a$$

5. **Summierte Kehrwerte von Quadratzahlen.** Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_m := \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$$

sowie

$$A := \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l \leq m$ gilt:

$$a_l \leq a_m \leq a_l + \frac{1}{l} - \frac{1}{m}$$

(b) Folgern Sie, dass 2 eine obere Schranke von A ist. Insbesondere ist $\sup A \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.

(c) Geben Sie (mit Beweis) ein $m \in \mathbb{N}$ explizit an, für das

$$a_m \leq \sup A \leq a_m + \frac{1}{10}$$

gilt. Berechnen Sie a_m für dieses m mit Taschenrechnergenauigkeit.

Bemerkung: Es gilt $\sup A = \pi^2/6$ mit der Kreiszahl $\pi = 3,14159 \dots$. Das beweisen wir allerdings erst am Ende des zweiten Semesters.

6. **Logarithmen – elementarer Zugang.** Bei dieser Aufgabe sollen Sie zwar die Rechenregeln und Monotonieeigenschaften für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, aber weder die Existenz von Logarithmen noch deren Eigenschaften als bekannt voraussetzen.

Es seien $a > 1$ und $b \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir definieren wir die Menge

$$L(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n \right\}.$$

Beweisen Sie:

(a) $3^{11} < 2^{19} < 3^{12}$ (Taschenrechner erlaubt!) Folgern Sie $\frac{19}{12} \in L(2, 3)$ und $\frac{19}{11} \notin L(2, 3)$.

(b) $\forall p \in \mathbb{Q} \forall q \in \mathbb{Q} : (p \in L(a, b) \wedge q < p \Rightarrow q \in L(a, b))$

Erinnerung: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.

(c) Die Menge $L(a, b)$ ist nichtleer und nach oben beschränkt. Also ist

$$\log_a b := \sup L(a, b) \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Wir nennen $\log_a b$ den Logarithmus von b zur Basis a .

(d) $\frac{19}{12} \leq \log_2 3 \leq \frac{19}{11}$

(e) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

(f) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, wobei auch $c \in \mathbb{R}^+$ gegeben sei. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst $\log_a(bc) \geq \log_a b + \log_a c$ und verwenden Sie dann die vorherige Teilaufgabe.