

Übungsblatt 2 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben (Nr. 1–8) in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe2.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 16.11.2020, 12:00 Uhr.

Bearbeiten Sie die mündliche Aufgabe Nr. 9 bitte ebenfalls bis zum gleichen Tag.

1. **Addition und Multiplikation auf natürlichen Zahlen.** Es sei $N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Wir setzen $1 := N(0)$, $2 := N(1)$, $3 := N(2)$ und $4 := N(3)$. Die Addition $+$: $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und die Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ werden rekursiv wie folgt definiert: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned}n + 0 &:= n, \\n + N(m) &:= N(n + m), \\n \cdot 0 &:= 0, \\n \cdot N(m) &:= n \cdot m + n.\end{aligned}$$

Beweisen Sie mit diesen Definitionen:

- (a) $1 + 1 = 2$,
- (b) $2 + 2 = 4$,
- (c) $2 \cdot 2 = 4$.

2. **Gesetze für die Addition auf $\mathbb{N}_0$.** Die Addition $+$: $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ auf den natürlichen Zahlen sei wie in Aufgabe 1 rekursiv definiert. Beweisen Sie damit durch vollständige Induktion:

- (a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Assoziativgesetz der Addition*).
- (b) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz der Addition*).

Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung der Beweise! Geben Sie bei den Induktionsbeweisen genau an, inklusive aller Quantoren, welche Aussage induktiv bewiesen wird und wie die Induktionsvoraussetzung lautet.

3. **Die Kleinerrelation auf $\mathbb{N}_0$.** Wir verwenden die Notationen von Aufgabe 1. Die Kleinerrelation $< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird rekursiv so definiert:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}_0 : \neg n < 0, \\ \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : (n < N(m)) \Leftrightarrow n = m \vee n < m.\end{aligned}$$

Hierbei soll $A \Leftrightarrow B$ bedeuten, dass A als äquivalent zu B definiert wird. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Definition:

- (a) $1 < 3$,
- (b) $\neg 3 < 1$. Sie dürfen dabei als bekannt voraussetzen, dass die Zahlen $0, 1, 2, 3$ alle verschieden sind.
- (c) Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt genau eine der drei Aussagen $n < m$, $n = m$, $m < n$.

4. **Die arithmetische Summenformel.** Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{n=0}^m (a + nb) = (m + 1)(a + mb/2)$$

Wenn a_0 & a_1 angegeben sind benutze für die -

$|v = \underbrace{\psi(n-1)}_{a_{n-1}} \wedge \underbrace{\psi(n)}_{a_n}$ gilt. und führe Induktion.

5. Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13, minimal variiert:

- (a) Formulieren Sie eine Version des Induktionsprinzips, die zur Lösung der folgenden Teilaufgabe (b) nützlich ist.
- (b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ganzer Zahlen sei rekursiv wie folgt definiert:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 := 0, \\ a_1 := 2, \end{array} \right\} a_{n+1} := 4(a_n - a_{n-1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips aus Teilaufgabe (a), dass $a_n = n2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises! Geben Sie insbesondere an, auf welche Formel Sie das Induktionsprinzip aus (a) anwenden.

6. **Wohlordnung der natürlichen Zahlen.** Beweisen Sie, dass jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein minimales Element besitzt, d.h.

$$\forall M \subseteq \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in M \forall m \in \mathbb{N} : (m < n \Rightarrow m \notin M)).$$

Hinweis: Beweisen Sie das durch Kontraposition. Nehmen Sie also an, M besitze kein minimales Element, und folgern Sie $M = \emptyset$. Verwenden Sie hierzu vollständige Induktion.

7. **Eindeutigkeitsaussage im Rekursionssatz.** Beweisen Sie die folgende Eindeutigkeitsaussage im Rekursionssatz über $\mathbb{N}_0$: Sind M eine Menge, $a \in M$ ein Element davon und $g : \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow M$ eine Abbildung, so gibt es *höchstens eine* Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$ mit $f(0) = a$ und $f(n+1) = g(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

8. **Aussagenlogisches Distributivgesetz für n Aussagen.** Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle Aussagen a und $b_1, \dots, b_n$:

$$(a) \quad a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n) \text{ ist gleichwertig mit } (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee \dots \vee (a \wedge b_n).$$

Sie dürfen die Ihnen bereits bekannten Spezialfälle $n = 2, 3$ dabei ohne Begründung verwenden.

Mündliche Hausaufgabe (ohne Abgabe):

9. **Leseaufgabe: Potenz-Exponentialsummen.**

Lesen und verstehen Sie den Abschnitt über Potenz-Exponentialsummen am Ende des Abschnitts 1.3.1 im Skript.