

Übungsblatt 12 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe12.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 08.02.2021, 12:00 Uhr.

1. **Rechenttraining zur Integration.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (a) $\int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x) dx$ für $a, \lambda, \omega > 0$,
- (b) $\int_0^a e^{-\lambda x} \sin(\omega x) dx$ für $a, \lambda, \omega > 0$,
- (c) $\int_0^a x^2 e^{-x} \cos x dx$ für $a > 0$,
- (d) $\int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für $0 < a < 1$,
- (e) $\int_0^a x e^{-x^2/2} dx$ für $a > 0$,
- (f) $\int_a^b \frac{dx}{x \log x}$ für $1 < a < b$,
- (g) $\int_1^a x^n \log x dx$ für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- (h) $\int_0^a x \arctan x dx$ für $a > 0$,
- (i) $\int_0^a \arcsin x dx$ für $0 < a < 1$,
- (j) $\int_0^a \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$ für $a > 0$,
- (k) $\int_{-1}^a \frac{x^4-4x^3+3x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x} dx$ für $a < 0$,
- (l) $\int_0^a \frac{16}{x^4+4} dx$ für $a \in \mathbb{R}$.

2. *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:*

- (a) Finden Sie eine Stammfunktion F der Funktion

$$f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}.$$

- (b) Entscheiden Sie mit Beweis, ob die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert. *Hinweis:* Eine mögliche Lösung vergleicht Summanden $1/(n(\log n)^2)$ mit Zuwächsen der in (a) gefundenen Stammfunktion F .

3. *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:*

- (a) Stellen Sie $\sin x$ und $\cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und arithmetischen Operationen dar.
- (b) Formulieren Sie die allgemeine binomische Formel aus der Vorlesung. *Hinweis:* Gemeint ist *nicht* nur der Spezialfall für Quadrate aus der Schulmathematik.
- (c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$$

Hierbei steht $\sin^{2n} x$ für $(\sin x)^{2n}$.

4. Integration mit einer Euler-Substitution zu einem Kreis.

- (a) Berechnen Sie für $-5 < a < 5$ das Integral

$$\int_0^a \frac{dx}{3x - 4\sqrt{25 - x^2} - 25},$$

indem Sie die punktierte Kreislinie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\} \setminus \{(0, -5)\}$ mit der Euler-Substitution

$$x = \frac{10t}{1+t^2}, \quad y = 5\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisieren. Veranschaulichen Sie sich diese Euler-Substitution geometrisch als Projektion der Geraden $G = \{(t, -4) \mid t \in \mathbb{R}\}$ vom Punkt $(0, -5)$ aus auf die Kreislinie K . Skizzieren Sie hierzu die Kreislinie K , die Gerade G , den Punkt $(0, -5)$, einen typischen Punkt $(t, -4) \in G$, dessen Bildpunkt $(x, y) \in K$ und die Gerade durch diese drei Punkte.

- (b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\sin \varphi}{3 \cos \varphi - 4 \sin \varphi - 5} d\varphi$$

für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, indem Sie es durch eine geeignete Substitution auf das Integral aus Teilaufgabe (a) zurückführen.

5. Umfang einer Ellipse. Gegeben sei die Ellipse

$$E(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1\}$$

mit der großen Halbachse $a > 0$ und der kleinen Halbachse b , wobei $0 < b \leq a$. Ein Teilchen durchläuft diese Ellipse einmal:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

wobei $(x(t), y(t))$ den Ort des Teilchens zur Zeit t beschreibt. Der Geschwindigkeitsbetrag des Teilchens zur Zeit t beträgt

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2},$$

wobei der Punkt die Zeitableitung (Ableitung nach t) bedeutet. Durch Integration der Geschwindigkeit über die Zeit erhalten wir den Umfang der Ellipse:

$$U(a, b) = \int_0^{2\pi} v(t) dt$$

- (a) Beweisen Sie:

$$U(a, b) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 2a \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

wobei

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

die "Exzentrizität" der Ellipse bezeichnet. Hierbei ist $\int_{-1}^1 \dots$ als $\lim_{s \uparrow 1} \int_{-s}^s \dots$ zu verstehen.

Bemerkung: Das "elliptische Integral" $U(a, b)$ kann nur in Ausnahmefällen mit elementaren Funktionen dargestellt werden. Sie sollen es daher nicht „ausrechnen“.

- (b) Beweisen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 2\pi - \frac{\pi}{2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

6. **Die Kettenlinie.** Eine homogene Kette hängt an zwei Nägeln (Koordinaten $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$) an einer Wand, wobei $x_0 < x_1$. Die Schwerkraft zieht sie in negative y -Richtung nach unten. Die Kette werde durch einen Funktionsgraphen $K = \{(x, f(x)) \mid x_0 \leq x \leq x_1\}$ mit einer glatten Funktion f beschrieben. In jedem Punkt $P = (x, f(x)) \in K$ der Kette zieht der Teil der Kette rechts von P mit einer Kraft $F(x) = (F_1(x), F_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ am Teil der Kette links von P , und zwar in Richtung der Tangente von K in P . Wir nehmen an, dass die horizontale Kraftkomponente $F_1(x) = F_1 > 0$ nicht von x abhängt, während die vertikale Komponente $F_2(x)$ sich durch das Gewicht der Kette von x abhängig ändert: $F_2(x) = F_2(x_0) + \rho L(x)$, wobei $\rho > 0$ das Gewicht der Kette pro Längeneinheit und $L(x)$ die Länge des Kettenstücks zwischen $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $P = (x, f(x))$ bezeichnet.

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f der Integro-Differentialgleichung

$$b + c \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(s)^2} ds = f'(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

mit geeigneten Parametern $b \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ genügt. Drücken Sie diese Parameter durch ρ , F_1 und $F_2(x_0)$ aus.

- (b) Folgern Sie die Differentialgleichung

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = c.$$

- (c) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \sinh(c(x - x_2))$ für $x \in [x_0, x_1]$ mit einer geeigneten Konstanten $x_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Folgern Sie $f(x) = c^{-1} \cosh(c(x - x_2)) + y_2$ für diese x mit einer weiteren Konstanten $y_2 \in \mathbb{R}$.