

Übungsblatt 11 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe11.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 01.02.2021, 12:00 Uhr.

1. **Sichtweite zum Horizont.** Sie stehen auf einem Felsen (Höhe h über dem Meeresspiegel) und blicken über das Meer. Wie weit ist es bis zum Horizont? (Kugelgestalt der Erde mit Radius r auf Meereshöhe und geradlinige Lichtausbreitung vorausgesetzt) Leiten Sie eine Näherungsformel für diese Entfernung $L(h, r)$ zum Horizont der Gestalt

$$L(h, r) = cr^a h^b (1 + O(h/r)) \text{ für } h/r \rightarrow 0$$

mit geeigneten Konstanten a, b, c her. Werten Sie mit dem Taschenrechner sowohl $L(h, r)$ als auch die Näherung $cr^a h^b$ für die Zahlenwerte $h = 10\text{m}$ und $r = 6370\text{km}$ aus und vergleichen Sie die Ergebnisse.

2. **Eine einfache Version der Taylorformel.**

- (a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -fach stetig differenzierbare Funktion (d.h. die iterierten Ableitungen $g', g'', g''', \dots, g^{(n)}$ von g bis zur n -ten Stufe existieren und sind stetig). Es sei $g^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, \dots, n-1$, wobei $g^{(0)} = g$ und $g^{(j+1)} = (g^{(j)})'$. Beweisen Sie: $g(x) = O(|x|^n)$ für $x \rightarrow 0$. Verwenden Sie dazu den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in einem Induktionsbeweis.

- (b) Beweisen Sie für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$:

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} \frac{x^k}{k!} \right|_{x=0} = 1_{\{k=j\}}$$

Zur Notation: $\text{term}(x)|_{x=a} := \text{term}(a)$ steht für das Belegen der freien Variable x in einem Term $\text{term}(x)$ mit dem Wert a , also für das Einsetzen von a für x .

- (c) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere n -fach stetig differenzierbare Funktion und

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $g^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, \dots, n-1$. Folgern Sie mit der Teilaufgabe (a) für $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(|x|^n)$$

3. **Asymptotik des Arcuscosinus und des Areacosinus hyperbolicus bei 1.**

- (a) Beweisen Sie, dass für $x \uparrow 1$ (d.h. für $x \rightarrow 1, x < 1$) gilt:

$$\arccos x = \sqrt{2-2x} + O((1-x)^{3/2})$$

- (b) Beweisen Sie, dass für $x \downarrow 1$ (d.h. für $x \rightarrow 1, x > 1$) gilt:

$$\text{arcosh } x = \sqrt{2x-2} + O((x-1)^{3/2})$$

4. Rechenttraining mit Taylorapproximationen.

- (a) Finden Sie (mit Beweis) Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(1+x) = ax + bx^2 + o(x^2) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

- (b) Von einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Finden Sie (mit Begründung) $c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(1+f(x)) = cx + dx^2 + o(x^2) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

- (c) Finden Sie (mit Begründung und f wie vorher) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\arctan f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + o(x^3) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

5. Leibniz-Regel für höhere Ableitungen von Produkten.

Bearbeiten Sie die folgende Teilaufgabe (a) oder ihre Verallgemeinerung (b*).

- (a) Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktionen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

wobei $\cdot^{(k)}$ das Bilden der k -ten Ableitung bezeichnet.

- (b*) Es seien $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen, wobei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\prod_{j=1}^m f_j \right)^{(n)} = \sum_{(k_1, \dots, k_m) \in M_{m,n}} \text{mult}(k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m f_j^{(k_j)}$$

mit

$$M_{m,n} := \left\{ (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m \left| \sum_{j=1}^m k_j = n \right. \right\}$$

und dem sogenannten *Multinomialkoeffizienten*:

$$\text{mult}(k_1, \dots, k_m) := \frac{\left(\sum_{j=1}^m k_j \right)!}{\prod_{j=1}^m k_j!}$$

6. Die ersten Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen.

Gegeben seien $x \in \mathbb{R}$ und

$$f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(t) := \begin{cases} \frac{te^{xt}}{e^t - 1} & \text{für } t \neq 0, \\ 1 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f_x beliebig oft differenzierbar ist, auch an der Stelle $t = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird das n -te Bernoulli-Polynom $B_n(x)$ an der Stelle x durch

$$B_n(x) := f_x^{(n)}(0)$$

definiert. Sein Wert $B_n := B_n(0)$ an der Stelle $x = 0$ wird die n -te Bernoulli-Zahl genannt. Berechnen Sie $B_j(x)$ und B_j für $j = 0, 1, 2, 3$.

Hinweis: Sie können f_x direkt mehrfach ableiten oder die Asymptotik

$$f_x(t) = \sum_{j=0}^3 \frac{B_j(x)}{j!} t^j + O(t^4), \quad t \rightarrow 0,$$

in die Gleichung

$$(e^t - 1)f_x(t) = te^{tx}$$

einsetzen und ein Anfangsstück der zugehörigen Reihen mit Fehlertermen ausmultiplizieren.