

Übungsblatt 10 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der Aufgaben in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe10.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 25.01.2021, 12:00 Uhr.

1. **Rechenttraining zum Ableiten.** Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

- (a) $f_1(x) = x \log x$, $x > 0$;
- (b) $f_2(x) = \binom{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Zahl sei;
- (c) $f_3(x) = x^{x^x}$, $x > 0$, zu lesen als $x^{x^x} = x^{(x^x)}$;
- (d) $f_4(\varphi) = \frac{a + \cos \varphi}{\sqrt{(a + \cos \varphi)^2 + (b + \sin \varphi)^2}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen mit $a^2 + b^2 \neq 1$ seien;
- (e) $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $\sigma > 0$ eine gegebene Zahl sei;
- (f) $f_6(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma > 0$, wobei $x \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl sei;
- (g) $f_7(x) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$, $x > 0$.

Bemerkung: Die Funktion f_5 spielt in der Stochastik als sogenannte “Dichte einer Normalverteilung” eine wichtige Rolle. Die Funktion f_7 ist eine berühmte Näherung an die Fakultätsfunktion, die sogenannte “Stirlingsche Formel”. Mehr dazu im 3. Semester.

2. **Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion ins Unendliche.** Die erweiterte reelle Exponentialfunktion $\text{Exp} : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\text{Exp}(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } x = -\infty \\ +\infty & \text{für } x = +\infty \end{cases}$$

ist stetig.

3. **Stetigkeit und Überdeckungen.**

- (a) Es seien $M, N, U \subseteq \mathbb{C}$ mit $M \cup N = U$. Die Mengen M und N seien in U abgeschlossen. Zeigen Sie, dass eine Menge $V \subseteq U$ genau dann offen in U ist, wenn $V \cap M$ offen in M und $V \cap N$ offen in N ist.
- (b) Wie eben sei $U = M \cup N \subseteq \mathbb{C}$, und M und N seien in U abgeschlossen. Weiter sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, deren Einschränkungen auf M und N stetig sind. Zeigen Sie: f ist stetig.
- (c) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(M_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U mit in U offenen Mengen $M_i \subseteq U$. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, so dass für alle $i \in I$ die Einschränkung $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{C}$, $f_i(z) = f(z)$, von f auf M_i stetig ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist. Folgern Sie, dass die Aussage in (b) richtig bleibt, wenn man dort das Wort “abgeschlossen” durch “offen” ersetzt.
- (d) *Typische Anwendung von (b):* Gegeben seien $U \subseteq \mathbb{C}$ und zwei stetige Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Mengen $M := \{x \in U \mid f(x) - g(x) \leq 0\}$ und $N := \{x \in U \mid f(x) - g(x) \geq 0\}$ abgeschlossen in U sind. Folgern Sie, dass die Abbildung $f \wedge g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

4. Aus der Klausur zur Analysis 1 des Wintersemesters 2004/05, um einen Hinweis ergänzt:
Zeigen Sie für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + ax + o(x)$$

für $x \rightarrow 0$. Identifizieren Sie a .

Hinweis: Es gilt

$$\cot x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}},$$

falls $x \in \mathbb{C}$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

5. **Beispiel einer Vertauschung von Ableitung und Reihe.**

- (a) Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer offenen Umgebung U von $x_0 \in \mathbb{R}$. Alle f_n seien in x_0 stetig. Es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U} |f_n(x)| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig in x_0 ist:

$$g : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}$$

eine differenzierbare Funktion mit der folgenden Ableitung ist:

$$f'(x) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz, angewandt auf Real- und Imaginärteil (warum aufgespalten?).

6. **Ableitungen der Areafunktionen.** Gegeben seien die folgenden Hyperbelfunktionen und die zugehörigen Areafunktionen:

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]1, \infty[$, $f_1(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f_1^{-1} :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$, $f_1^{-1}(y) = \operatorname{arcosh}(y)$;
 (b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $f_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2^{-1}(y) = \operatorname{arsinh}(y)$;
 (c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, $f_3(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $f_3^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_3^{-1}(y) = \operatorname{artanh}(y)$;
 (d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $f_4(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, $f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $f_4^{-1}(y) = \operatorname{arcoth}(y)$.

Beweisen Sie für y im jeweils oben angegebenen Definitionsbereich:

- (a) $\operatorname{arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$;
 (b) $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$;
 (c) $\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$;
 (d) $\operatorname{arcoth}(y) = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}$.

Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktionen f_j^{-1} , $j = 1, 2, 3, 4$, jeweils auf zwei verschiedene Weisen, und zwar

- (i) direkt mit der eben bewiesenen expliziten Formel für die Umkehrfunktion;
 (ii) mit der allgemeinen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Überprüfen Sie in allen vier Fällen (a), (b), (c) und (d), dass die Ergebnisse aus (i) und (ii) übereinstimmen.