

Übungsblatt 1 zur Analysis einer Variablen

Bitte reichen Sie Ihre Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben (Nr. 1–6) in uni2work in einem pdf-File mit dem Namen „abgabe1.pdf“ elektronisch ein.

Abgabefrist: Montag, den 09.11.2020, 12:00 Uhr.

Bearbeiten Sie die mündlichen Aufgaben (Nr. 7 und 8) bitte ebenfalls bis zum gleichen Tag.

1. *Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt und Vierte so;
Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
Das Dritt und Viert wär nimmermehr.*
Goethe, Faust I

Zeigen Sie mit einer Wahrheitstabelle dass die hier bewiesene Aussage

$$[A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge A_4] \wedge [\neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \neg(A_3 \wedge A_4)]$$

äquivalent zu der folgenden Aussage ist:

$$A_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow A_3 \wedge A_4$$

Hinweis: Sie können die Anzahl der Fälle von 16 auf 4 reduzieren, indem Sie die Wahrheitswerte von $A_1 \wedge A_2$ und $A_3 \wedge A_4$ als Eingabegrößen auffassen.

2. **Varianten der aussagenlogischen de Morgan Regeln.** Beweisen Sie die folgenden Varianten der aussagenlogischen de Morgan'schen Regeln:

(a) $\neg(a \wedge b)$ ist gleichwertig mit $\neg a \vee \neg b$.

(b) $\neg(a \vee b)$ ist gleichwertig mit $\neg a \wedge \neg b$.

Verwenden Sie dazu *keine* Wahrheitstabelle, sondern formen Sie jeweils die linke Seite der Behauptung mit den schon bekannten aussagenlogischen Regeln so lange um, bis Sie die rechte Seite erhalten.

3. **de Morgan Regeln für 3 Aussagen.** Die aussagenlogischen de-Morganschen Regeln gelten ebenso für mehr als zwei Aussagen, sagen wir für n Aussagen:

Es gilt für $n \geq 2$ Aussagen $a_1, \dots, a_n$:

(a) $\neg(\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \dots \wedge \neg a_n)$ ist gleichwertig mit $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$.

(b) $\neg(\neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \dots \vee \neg a_n)$ ist gleichwertig mit $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$.

Beweisen Sie die Behauptung (a) im Fall $n = 3$. Verwenden Sie dazu *keine* Wahrheitstabelle, sondern formen Sie die linke Seite mit Hilfe der schon bekannten aussagenlogischen Gesetze sukzessive in die rechte Seite um. Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Gesetz Sie verwenden.

4. **Aussagenlogische Distributivgesetze für 3 Aussagen.** Auch die aussagenlogischen Distributivgesetze gelten für mehr als zwei Aussagen. Genauer gesagt gilt für eine Aussage a und $n \geq 2$ weitere Aussagen $b_1, \dots, b_n$:

- (a) $a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n)$ ist gleichwertig mit $(a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee \dots \vee (a \wedge b_n)$.
 (b) $a \vee (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)$ ist gleichwertig mit $(a \vee b_1) \wedge (a \vee b_2) \wedge \dots \wedge (a \vee b_n)$.

Beweisen Sie die erste dieser beiden Behauptungen im Fall $n = 3$. Verwenden Sie dazu *keine* Wahrheitstabelle, sondern formen Sie die linke Seite unter Verwendung der schon bekannten aussagenlogischen Gesetze in die rechte Seite um. Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Gesetz Sie verwenden.

5. **Logische Analyse eines Beweises mit Quantoren.** Geben Sie bei dem untenstehenden Beweis an den mit $\boxed{*_i}$ gekennzeichneten Stellen jeweils an, welche Behauptung an dieser Stelle noch zu beweisen ist und welche (relevanten) Aussagen an dieser Stelle durch den vorhergehenden Teil des Beweises gegeben sind. Geben Sie auch an den mit (j) gekennzeichneten Stellen jeweils an, welche an dieser Stelle gegebenen Aussagen und welche allgemeinen Aussagen über reelle Zahlen hier implizit verwendet werden.

Behauptung: Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \forall y > x : (y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \epsilon).$$

Beweis: $\boxed{*_1}$ Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. $\boxed{*_2}$ Wir setzen $\delta := \epsilon^2 > 0$. $\boxed{*_3}$ Nun sei $x > 0$ gegeben. $\boxed{*_4}$ Es sei weiter y mit $y > x$ gegeben. $\boxed{*_5}$ Es gelte $y - x < \delta$. $\boxed{*_6}$ Dann folgt

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{y} \stackrel{(2)}{\geq} \sqrt{y - x}$$

und damit

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \stackrel{(3)}{=} \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \stackrel{(4)}{\leq} \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} \stackrel{(5)}{<} \sqrt{\delta}.$$

Das war zu zeigen. (6) $\boxed{*_7}$

6. Übung zum Beweisen mit Quantoren.

- (a) Formulieren Sie das Gegenteil der Aussage

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon) \quad (1)$$

mit Hilfe einer prädikatenlogischen Formel, in der alle Quantoren vorne stehen und in der keine Negation vorkommt.

Hinweis: “ $\neg a < b$ ” kann durch “ $a \geq b$ ” ersetzt werden.

- (b) Versuchen Sie, sich dieses Gegenteil der Aussage (1) an Hand des Graphen der Quadratfunktion anschaulich vorzustellen. *Hinweis:* Zu dieser Teilaufgabe brauchen Sie keine Lösung aufschreiben!
 (c) Beweisen Sie das oben formulierte Gegenteil der Aussage (1). Die noch zu zeigende Behauptung sollte im Verlauf Ihres Beweises immer kürzer werden.
 (d) Analysieren Sie die logische Struktur Ihres Beweises von oben, indem Sie an allen Stellen, an denen sich die noch zu zeigende Behauptung ändert, diese noch zu zeigende Behauptung und alle durch den vorhergehenden Teil des Beweises gegebenen (relevanten) Aussagen angeben.

Mündliche Hausaufgaben (ohne Abgabe):

7. Leseaufgabe: Mengenlehre.

Lesen und verstehen Sie den Abschnitt 1.2 über Mengen im Skript.

8. Merken Sie sich das griechische Alphabet:

α, A (Alpha),	ν, N (Ny),
β, B (Beta),	ξ, Ξ (Xi),
γ, Γ (Gamma),	o, O (Omikron),
δ, Δ (Delta),	π, Π (Pi),
ϵ, E (Epsilon),	ρ, P (Rho),
ζ, Z (Zeta),	σ, Σ (Sigma),
η, H (Eta),	τ, T (Tau),
θ oder ϑ, Θ (Theta),	υ, Υ (Ypsilon),
ι, I (Jota),	ϕ oder φ, Φ (Phi),
κ, K (Kappa),	χ, X (Chi),
λ, Λ (Lambda),	ψ, Ψ (Psi),
μ, M (My),	ω, Ω (Omega).